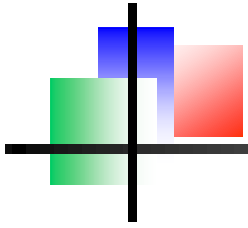


# Podstawy Fizyki IV

## Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 2, 17.02.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



# Równania Maxwella → r-nie falowe

próżnia:

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4)$$

$$\epsilon_0 \cong 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

$$\mu_0 \cong 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

r-nie (2):  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

tożsamość:  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$

z r-nia (4)  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

r-nia (1) i (2):  $\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

ostatecznie:  $\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

przyjmując  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ , dostajemy  $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

**$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  (dokładnie)**  
 **$\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$**

Podobnie:  $\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$

# Płaska fala EM w próżni

Wybieramy układ odniesienia tak, że pole rozchodzi się wzdłuż  $x$ :

$$\vec{E} = \vec{E}(kx - vt)$$

Liczmy jego dywergencję :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

i stąd:  $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$     czyli  $E_x = 0$

$$\vec{E} \perp \vec{k}$$

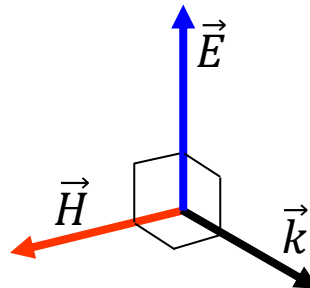
Przyjmijmy, że:  $\vec{E} = [0, E_y, 0]$

Liczmy rotację pola  $\vec{E}$  i korzystamy z równania Maxwella (2):

$$\left[ 0, 0, -\frac{\partial E_y}{\partial x} \right] = -\mu_0 \left[ \frac{\partial H_x}{\partial t}, \frac{\partial H_y}{\partial t}, \frac{\partial H_z}{\partial t} \right] \Rightarrow \vec{H} = [0, 0, H_z]$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &\perp \vec{k} \\ \vec{H} &\perp \vec{k} \\ \vec{E} &\perp \vec{H} \end{aligned}$$

Transverse  
Electro-  
Magnetic



# Płaska, monochromatyczna f. EM w próżni

$$E_y = E_{y0} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{ik}{\mu_0} E_{y0} e^{i(kx - \omega t)}$$

czyli:

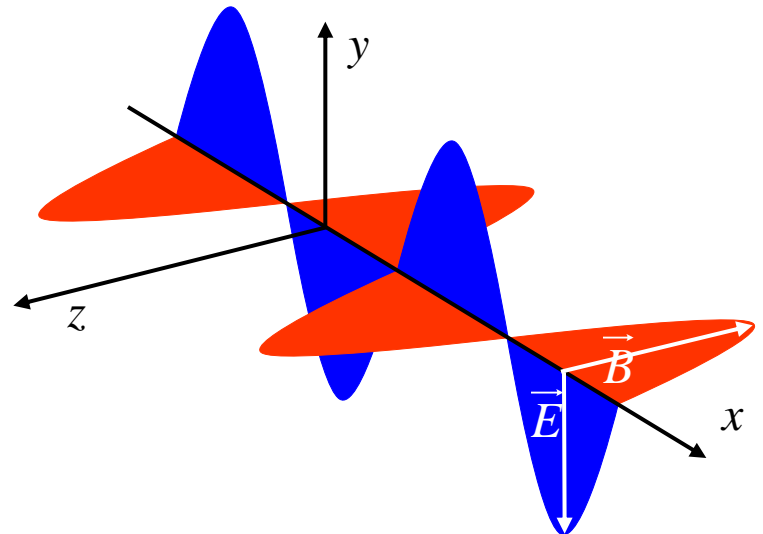
$$H_z = -\frac{ik}{\mu_0} E_{y0} \int e^{i(kx - \omega t)} dt = \frac{1}{c\mu_0} E_{y0} e^{i(kx - \omega t)} = \frac{1}{c\mu_0} E_y$$

Ponieważ  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  to:  $B_z = \frac{1}{c} E_y$

Siła Lorentza:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \frac{\vec{B}}{B} E\right)$$

mała prędkość:  $\vec{F} \cong q\vec{E}$



# Energia fali EM

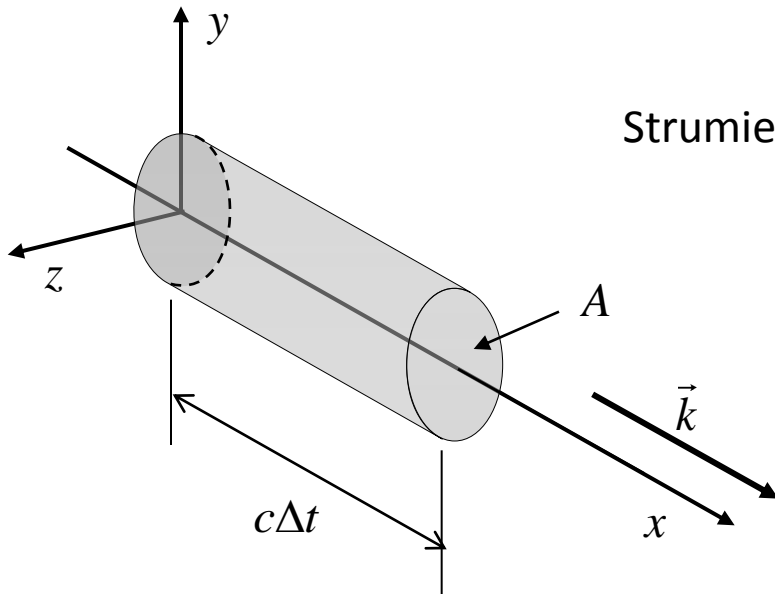
Gęstość energii w próżni (pola stacjonarne):

1. pola elektrycznego  $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2, \quad [\text{J}/\text{m}^3]$

2. pola magnetycznego:  $u_B = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 E^2}{2\mu_0} = u_E$$

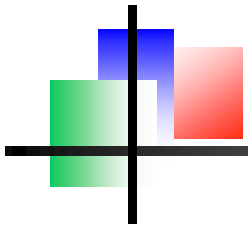
$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2$$



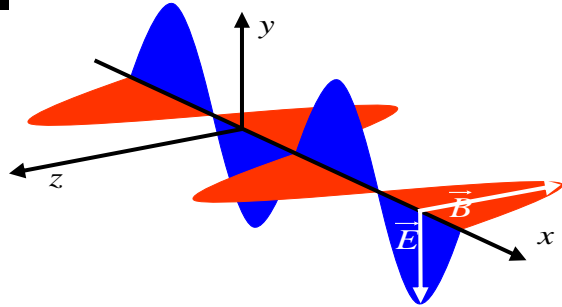
Strumień energii:

$$S = \frac{uc\Delta t A}{\Delta t A} = uc$$

$$= c\epsilon_0 E^2 = c^2 \epsilon_0 E \frac{E}{c} = \frac{1}{\mu_0} EB$$

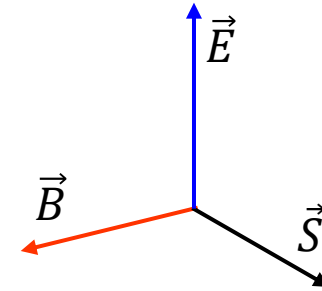


# Natężenie fali EM, wektor Poyntinga



Wektor Poyntinga

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \vec{E} \times \vec{H}\end{aligned}$$



oscylacje harmoniczne  
– uśredniamy po okresie

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\langle S \rangle = c \epsilon_0 E_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{c \epsilon_0 E_0^2}{2}$$

dla fali harm.

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

mamy:

$$I = \frac{c \epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$$

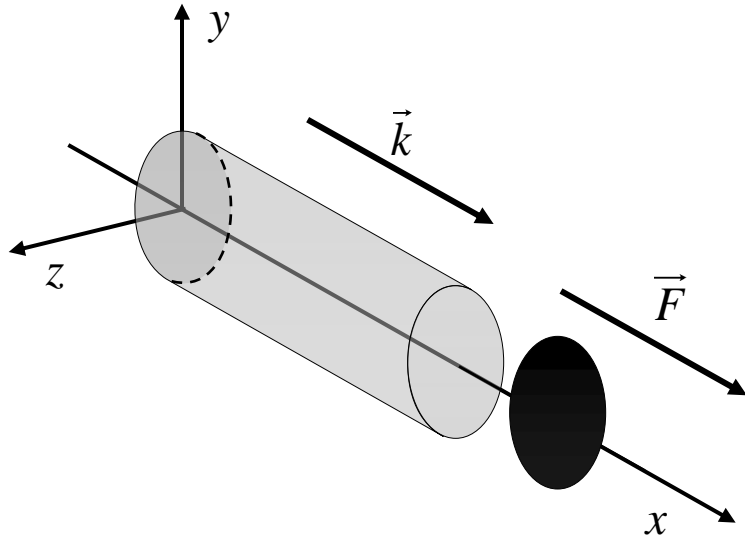
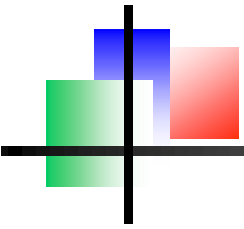
natężenie światła:

$$I = \langle S \rangle, \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

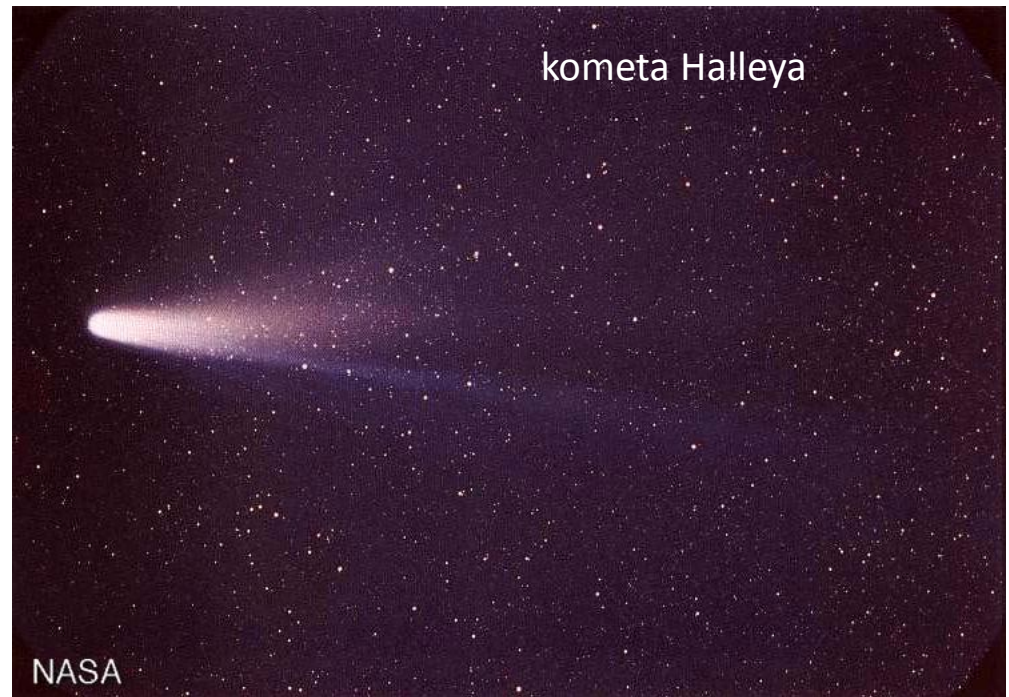
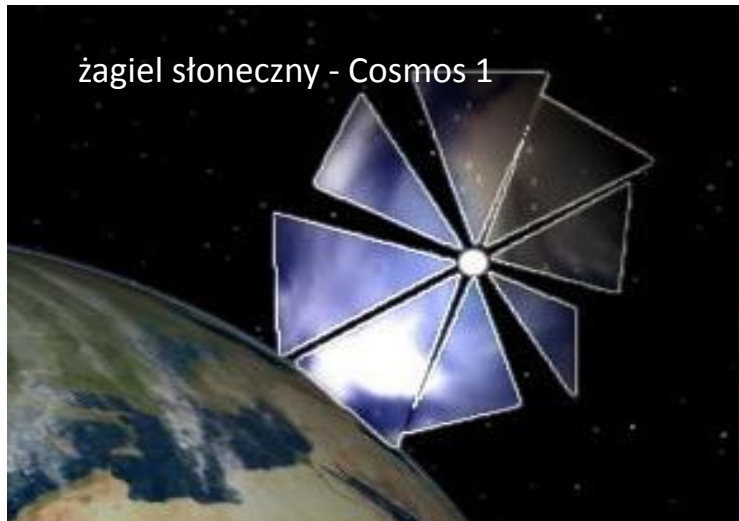
oporność falowa próżni

$$\eta = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cong 377 \Omega$$

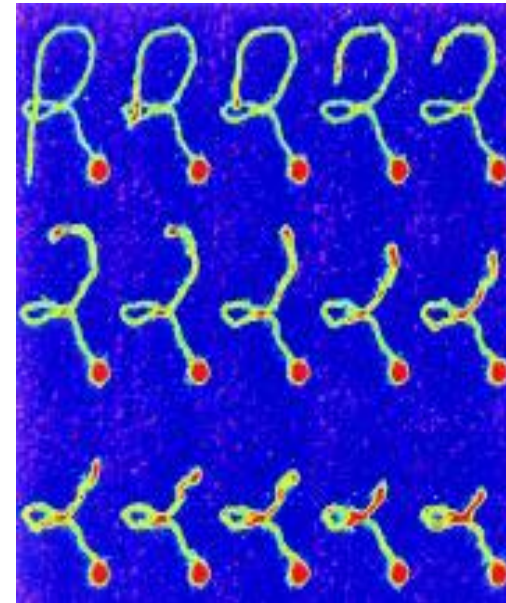
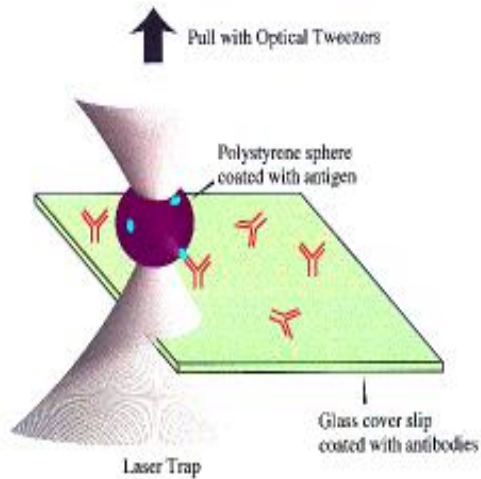
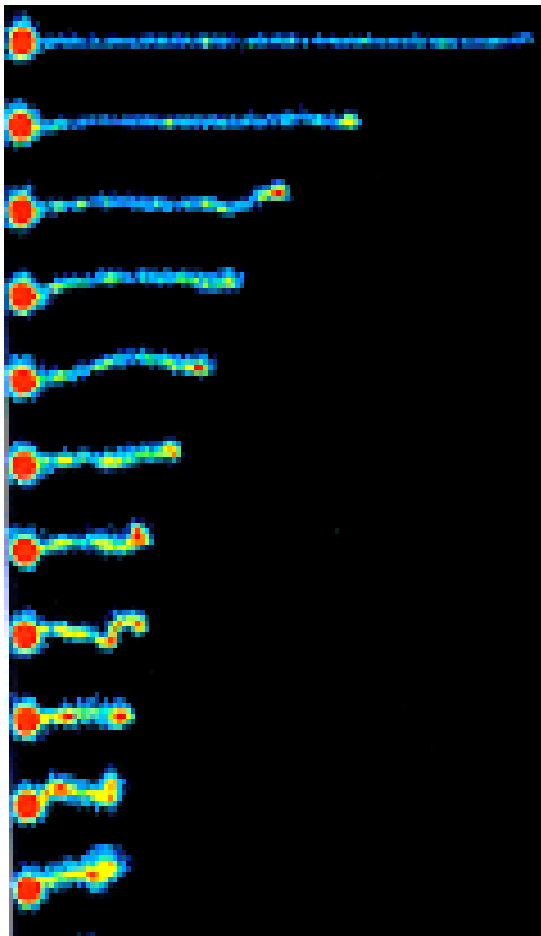
# Ciśnienie światła



$$P = u = \frac{S}{c}$$



# Pęseta optyczna



<http://www7.nationalacademies.org/bpa/Tweezers.pdf>



# Kwantyzacja pola EM

1900 – Max Planck, prom. c. d. c; atomy absorbują i emitują pakiety energii

1903 – J.J. Thomson, granulacja w jonizacji gazu prom. X

1905 – A. Einstein, zjawisko fotoelektryczne; praca wyjścia, energia elektronu

minimalna porcja energii pola EM - foton

$$E = h\nu$$

$$h \cong 6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \quad \text{stała Plancka}$$

źródło	$\Phi/A$ [foton/s·m <sup>2</sup> ]
laser 1PW, 20μm	10 <sup>43</sup>
światło słoneczne	10 <sup>18</sup>
światło Księżyca	10 <sup>12</sup>
światło gwiazd	10 <sup>10</sup>

jak duży jest foton widzialny?

$$\lambda = 0.6 \times 10^{-6} \text{m}$$

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} \cong 6.626 \times 10^{-34} \frac{3 \times 10^8}{0.6 \times 10^{-6}} \frac{\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m/s}}{\text{m}}$$

$$\cong 3 \times 10^{-19} \text{J}$$

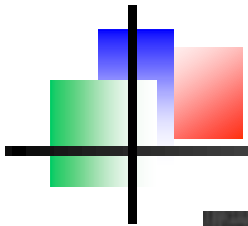
pęd fotonu

$$\vec{p} = h\vec{k}$$

foton jako cząstka

$$\mathcal{E} = [(cp)^2 + m_0^2]^{1/2}$$

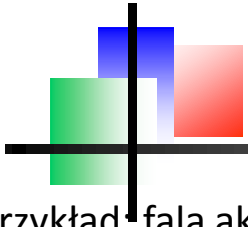
$$m_0 = 0$$



# Fotografia z małą liczbą fotonów



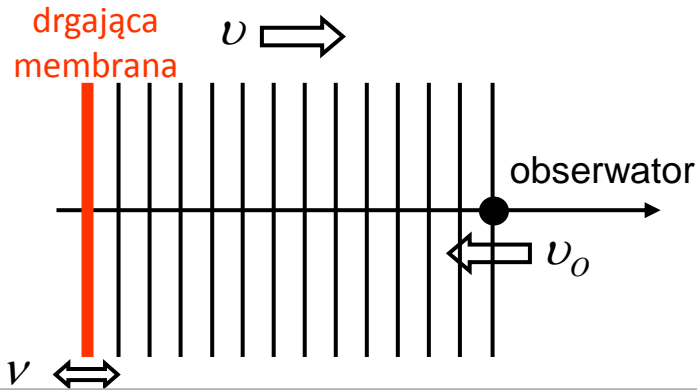
# Efekt Dopplera (klasyczny)



Przykład: fala akustyczna w powietrzu  
prędkość rozchodzenia się  $v$

Liczba cykli jest niezmiennikiem – nie zależy od układu odniesienia

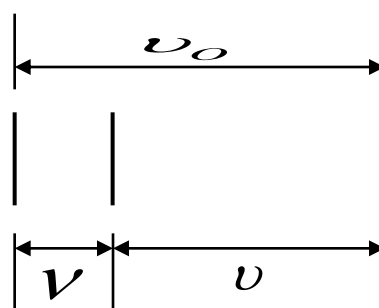
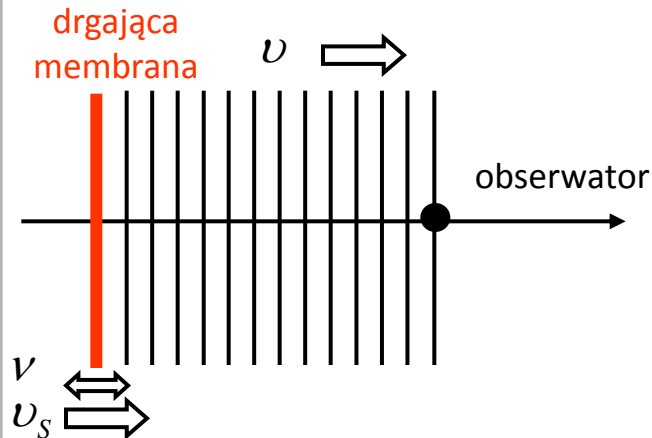
## 1. ruchomy obserwator



częstość = liczba cykli w jednostkowym czasie

$$v' = \frac{vt + v_o t}{\lambda t} = \frac{v}{\lambda} \frac{v + v_o}{v} = \frac{v + v_o}{v} v$$

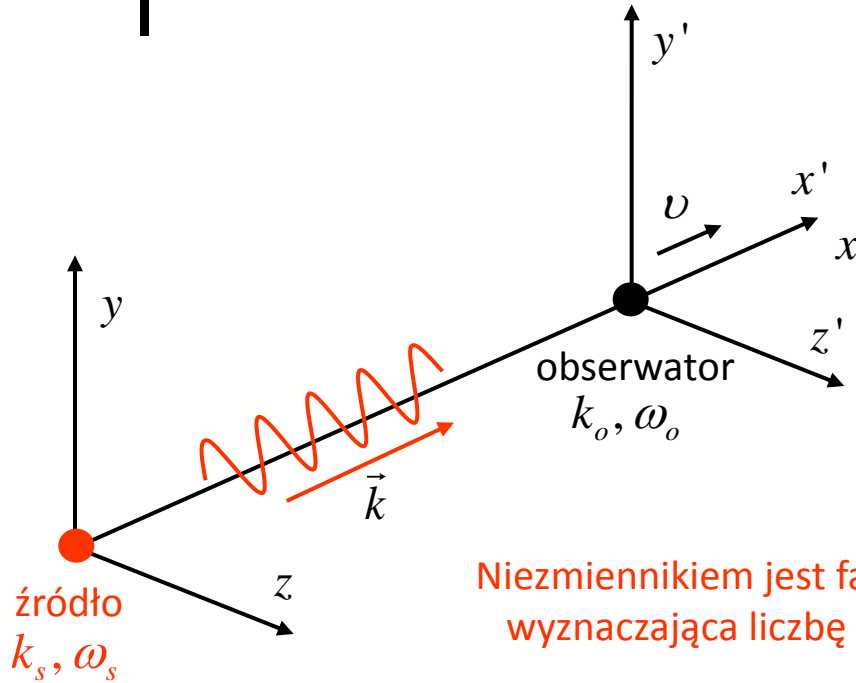
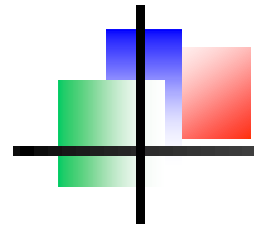
## 2. ruchome źródło



$$\frac{vt}{\lambda' t} = \frac{v}{vT - v_s T} = \frac{v}{v - v_s} v$$

ogólna formuła:  $v' = \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} v$

# Efekt Dopplera dla światła, 1



$$\text{STW} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos(k_s x - \omega_s t) &= \\ \cos\left(k_s \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \omega_s \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) &= \\ \cos\left(\underbrace{\frac{k_s - v\omega_s/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{k_o} x' - \underbrace{\frac{\omega_s - k_s v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}_{\omega_o} t'\right) &= \end{aligned}$$

zasada względności +  
konwencja znaku prędkości

$$u = -v$$

1.  $u < 0 \rightarrow$  układy oddalają się

$$\omega_o < \omega_s$$

2.  $u > 0 \rightarrow$  układy zbliżają się

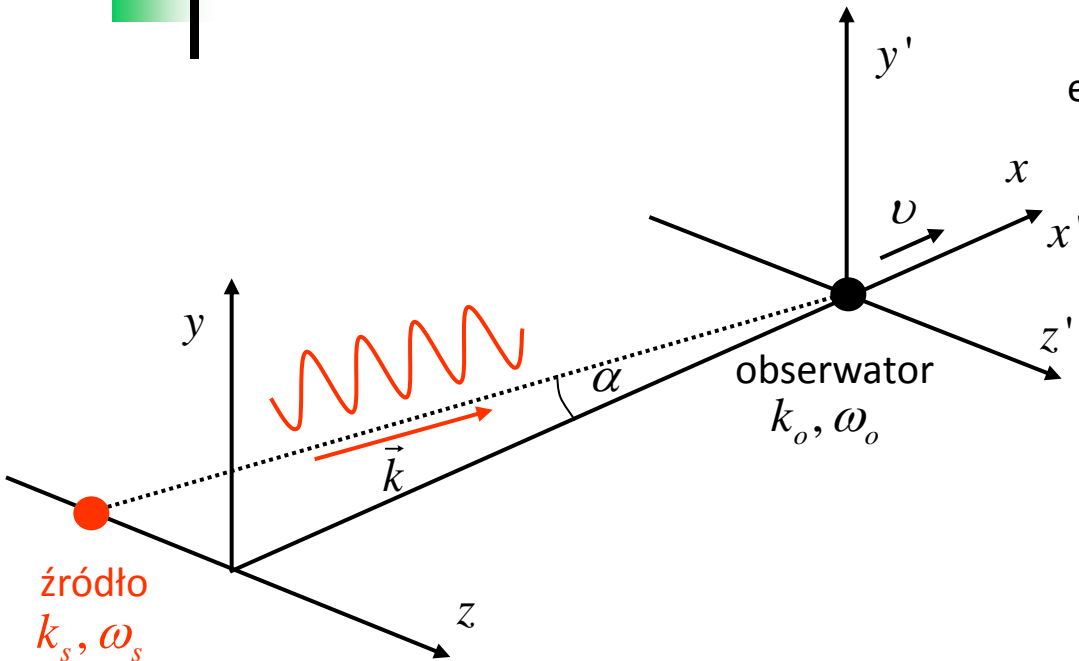
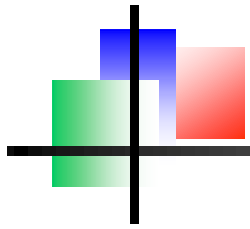
$$\omega_o > \omega_s$$

dopplerowskie przesunięcie częstotliwości:

$$\omega_o = \omega_s \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

dla małych prędkości:  $\omega_o = \omega_s \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \cong \left(1 + \frac{u}{c}\right) \omega_s$

# Efekt Dopplera dla światła, 2



STW, czterowektory:  
energia-pęd  $\leftrightarrow$  częstość-wektor falowy

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right), k^0 = \frac{k^{0'} + \frac{v}{c} k^{1'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{\omega_s}{c} = \frac{\frac{\omega_o}{c} + \frac{v}{c} \frac{\omega_o}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dopplerowskie przesunięcie częstości:  $\omega_o = \omega_s \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u}{c} \cos \alpha}$

poprzeczny efekt Dopplera:  $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_o = \omega_s \sqrt{1 - v^2/c^2}$

granica klasyczna:  $|u| \ll c \Rightarrow \omega_o \cong \omega_s \left( 1 + \frac{u}{c} \cos \alpha \right)$

zasada względności +  
konwencja znaku prędkości  
 $u = -v$

1.  $u < 0 \rightarrow$  układy oddalają się

2.  $u > 0 \rightarrow$  układy zbliżają się

# Efekt Dopplera dla światła, 3

$$\nu_o \cong \left(1 + \frac{u}{c}\right) \nu_s$$

Przykład:

atom sodu  $^{23}\text{Na}$ ,  $m = 28 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $T = 300^\circ\text{C} = 573\text{K}$   
linia 590 nm

$$\nu_s \cong 5.1 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

średnia prędkość termiczna atomu

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \cong 790 \text{ m/s}$$

średnie przesunięcie częstości – szerokość profilu linii

$$\Delta\nu \cong \frac{u}{c} \nu_s \cong 1.3 \text{ GHz}$$

$$\nu_o \cong \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \nu_s$$

Przykład:

atom sodu  $^{23}\text{Na}$ , linia 590nm, prędkość gwiazdy

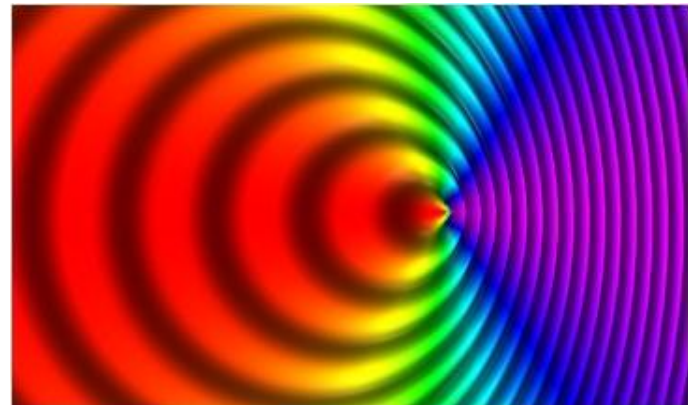
$$\frac{u}{c} = 0.8$$

Przesunięcie ku czerwieni daje nową częstość

$$\nu_o \cong \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \nu_s \cong 0.33 \nu_s$$

Nowa długość fali:

$$\lambda_o \cong 1.8 \mu\text{m}$$



# Laserowe chłodzenie atomów

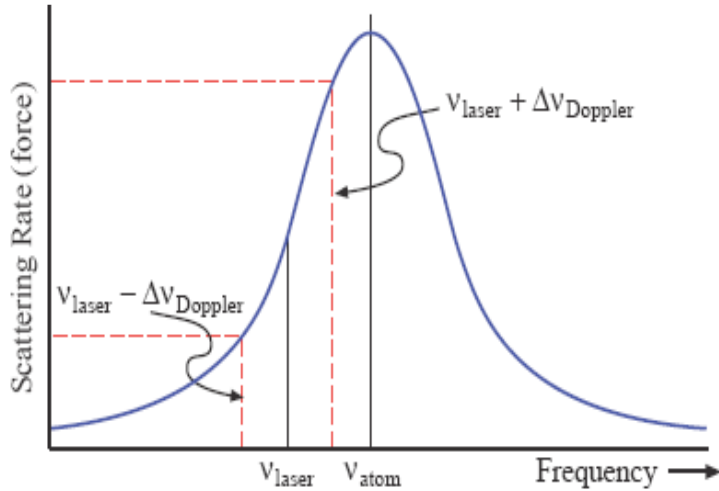
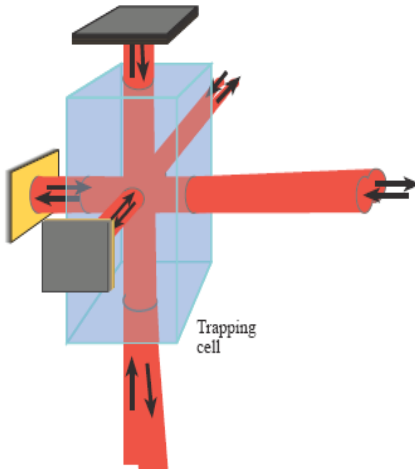
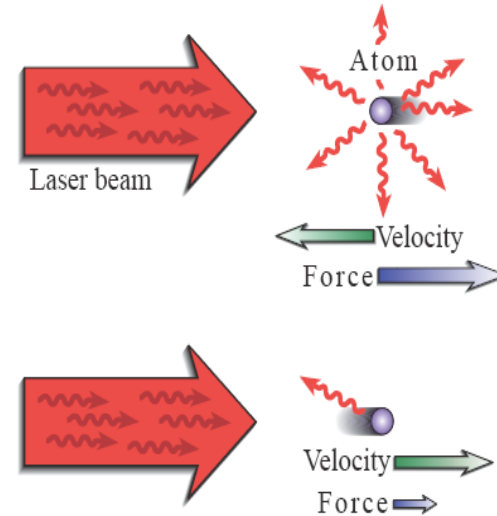


Figure 1. Atomic scattering rate versus laser frequency.



absorpcja fotonu

$$\Delta p_a = -\hbar k$$

wyświecenie

$$\langle \Delta p_a \rangle = 0$$

bilans

$$\langle \Delta p_a \rangle = -\hbar k$$

# Zakresy fal EM

