Uniwersytet Warszawski Wydział Fizyki

> Michał Karpiński Nr albumu: 195785

Splątanie w warunkach częściowej depolaryzacji

Praca magisterska na kierunku fizyka w ramach Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych w zakresie optyki

> Praca wykonana pod kierunkiem prof. dr. hab. Czesława Radzewicza Instytut Fizyki Doświadczalnej

Warszawa, wrzesień 2006

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

7 sierpnia 2006 r.

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

7 sierpnia 2006 r.

Streszczenie

Skonstruowane zostało źródło polaryzacyjnie splątanych par fotonów opierające się na procesie fluorescencji parametrycznej pierwszego typu. Został zaobserwowany i omówiony wpływ dryfu w krysztale dwójłomnym na jakość splątania. Zrealizowano pomiar macierzy gęstości polaryzacyjnych stopni swobody stanów dwufotonowych metodą tomografii kwantowej. Przeprowadzono kontrolowaną depolaryzację jednego z fotonów pary splątanej. Zrealizowane odwzorowania całkowicie dodatnie scharakteryzowano, wykonując tomografię procesów kwantowych (*Quantum Process Tomography*). Zmierzona została szeroka klasa odwzorowań depolaryzujących, uzyskano bardzo dobrą zgodność z przewidywaniami teoretycznymi.

Słowa kluczowe

splątanie, dekoherencja, odwzorowanie całkowicie dodatnie, macierz gęstości, tomografia kwantowa, QPT

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Entanglement under partial depolarization

Spis treści

Wstęp 6 101 Podstawy teoretyczne 1.1 101.1.1101.1.2131.1.3151.2Odwzorowania całkowicie dodatnie 191.3Rozkład na wartości osobliwe 211.4 241.5Izomorfizm Jamiołkowskiego 26Stan singletowy 1.5.1271.5.2Stan dowolny 281.6291.6.130 1.6.2311.6.331 1.6.432 $\mathbf{2}$ Źródło splątanych par fotonów 34 2.1342.1.1342.1.236 2.1.337 2.1.4Pomiar jakości splątania 41 2.2Dryf 432.346 **49** 3 Pomiar macierzy gęstości 3.1493.2 Metoda liniowej rekonstrukcji 50

	3.3	Metoda największej wiarygodności	55
		3.3.1 Fizyczna macierz gęstości	55
		3.3.2 Funkcja wiarygodności	56
	3.4	Rachunek błędu	57
		3.4.1 Macierz gęstości	57
		3.4.2 Entropia liniowa	60
		3.4.3 Współbieżność i splątanie	61
		3.4.4 Parametry tłumienia	62
	3.5	Zmierzone macierze gęstości	63
4	Dep	oolaryzacja	69
	4.1	Pełny układ doświadczalny	69
	4.2	Kontroler polaryzacji	72
5	Wy	niki pomiarów i wnioski	76
	5.1	Pomiary wstępne	77
	5.2	Depolaryzacja jednowymiarowa	77
	5.3	Depolaryzacja dwuwymiarowa	84
	5.4	Płaszczyzna <i>splątanie–entropia</i>	89
Po	Podsumowanie		
Bi	Bibliografia		

Wstęp

Splątanie jest jednym z najbardziej interesujących aspektów mechaniki kwantowej. Fakt, że dwa osobne układy kwantowe, które w przeszłości oddziaływały za sobą muszą być opisywane przez wspólną funkcję falową został dostrzeżony już przez Schrödingera. Zauważył on również, że w związku z tym "wiedza o pojedynczym podukładzie może stać się bardzo ograniczona, może spaść nawet do zera, podczas gdy wiedza o całym układzie pozostaje stale na maksymalnym poziomie" [1]. Ta na pierwszy rzut oka przecząca zdrowemu rozsądkowi cecha układów kwantowych powoduje, że mogą one znaleźć zastosowanie w praktycznych realizacjach, takich jak kryptografia kwantowa, bądź komputery kwantowe [2] [3].

Burzliwy rozwój eksperymentów optycznych wykorzystujących własności układów w stanie splątanym nastąpił w ciągu ostatnich kilkunastu lat, w związku ze skonstruowaniem źródła splątanych par fotonów opartego na procesie spontanicznej fluorescencji parametrycznej [4]. Wraz z rozwojem źródeł stanów splątanych pojawiły się ich pierwsze praktyczne zastosowania. Kryptografia kwantowa została po raz pierwszy zrealizowana przez Bennetta i in. na początku lat dziewięćdziesiątych [5]. Od początku bieżącego roku dostępny jest w handlu komercyjny aparat do kryptografii kwantowej. Zrealizowane w praktyce zostały również kwantowe bramki logiczne [6]. Trwają prace nad budową komputera kwantowego (m. in. [7]), który dzięki wykorzystaniu splątania, będzie w stanie dokonywać pewnych obliczeń znacznie szybciej niż komputery klasyczne.

W działaniu urządzeń wykorzystujących stany splątane istotne są efekty powodowane przez dekoherencję, na przykład podczas przesyłania splątanych fotonów na duże odległości za pomocą światłowodów. W ramach tej pracy przeprowadzono kontrolowaną dekoherencję stanu splątanego i w pełni ją scharakteryzowano. Dobre zrozumienie procesów zachodzących podczas dekoherencji pozwoli wypracować odpowiednie metody jej zapobiegania.

Jako obiekty splątane użyte zostały polaryzacyjnie splątane pary fotonów. Pary te są obecnie najłatwiej dostępnymi obiektami splątanymi, ze względu na stosunkowo proste w konstrukcji źródło, oparte na procesie fluorescencji parametrycznej pierwszego typu w kryształach β -boranu baru (BBO). Źródło takie po raz pierwszy skonstruowali Kwiat i in. [8], modyfikację związaną z użyciem femtosekundowego lasera pompującego zrealizowali Nambu i in. [9]. Podczas optymalizacji źródła wykorzystano teoretyczne opracowanie Dragana [10], w szczególności zaobserwowano istotne efekty związane z dryfem w krysztale dwójłomnym.

Zrealizowano pomiar macierzy gęstości polaryzacyjnych stopni swobody stanów dwufotonowych metodą tomografii kwantowej, opisaną szczegółowo przez Jamesa i in. [11].

Zasadniczym celem pracy pracy była depolaryzacja jednego z fotonów pary splątanej oraz pomiar i scharakteryzowanie odwzorowań opisujących te procesy. Pomiar odwzorowania działającego na obiekt kwantowy – odwzorowanie takie bywa nazywane kanałem kwantowym (ang. quantum channel) – jest określany mianem tomografii procesu kwantowego (ang. Quantum Process Tomography, QPT). Tomografia procesu kwantowego z wykorzystaniem stanów splątanych (ang. Entanglement Enhanced QPT) zrealizowana została po raz pierwszy przez De Martiniego i in. [12] [13], jednakże dotyczyła tylko odwzorowań unitarnych, nie powodujących dekoherencji. QPT została zrealizowana także w technice NMR [14] oraz do charakteryzacji kwantowych bramek logicznych [15]. Dekoherencje polaryzacyjnie splatanych par fotonów poprzez depolaryzację jednego z fotonów za pomocą matrycy nanodziurek (ang. nanohole array) przeprowadzili Altewischer i in. [16], nie dokonując jednakże pełnego scharakteryzowania zrealizowanych odwzorowań. Altepeter, Peters i in. [17] [18] zrealizowali pomiar symulowanych procesów depolaryzacyjnych przy użyciu QPT z wykorzystaniem stanów splątanych. Symulacja depolaryzacji polegała przepuszczeniu jednego z fotonów pary splątanej, wytwarzanej przez źródło impulsowe, przez kryształ dwójłomny, tak, by rozdzielić w czasie prostopadłe składowe polaryzacji o czas dłuższy niż czas koherencji. Powoduje to zanik korelacji pomiędzy składowymi polaryzacji, dzięki czemu stan pary fotonów (podczas obserwacji wyłącznie polaryzacyjnych stopni swobody), zachowuje się tak, jakby był stanem zdepolaryzowanym.

Metoda ta jest jednak tylko symulacją depolaryzacji, gdyż jest odwracalna: wystarczy w drodze wiązki umieścić kolejny kryształ dwójłomny obrócony o 90° względem pierwszego. Kryształ taki skompensuje wprowadzone uprzednio przesunięcie pomiędzy składowymi polaryzacji i przywróci korelacje. W przypadku rzeczywistego stanu zdepolaryzowanego taki proces "repolaryzacji" byłby w oczywisty sposób niemożliwy. Dodatkowo wadą tej metody jest powodowanie istotnego zaburzenia modu czasowo-przestrzennego paczki falowej depolaryzowanych fotonów, poprzez rozsunięcie w czasie (a więc także w przestrzeni) dwóch składowych polaryzacji. Powoduje to nieprzydatność tych stanów do eksperymentów interferometrycznych.

W związku z powyższym, w niniejszej pracy zastosowano inną metodę depolaryzacji, pozbawioną powyższych wad. Metoda ta jest zbliżona do zastosowanej przez Ricciego i in. [19] podczas depolaryzacji fotonów w celu późniejszej destylacji splątania. Depolaryzacja była realizowana jako mieszanina odwzorowań unitarnych. Ricci do realizacji zmian stanu polaryzacji odpowiadających odwzorowaniom unitarnym stosował komórki Pockelsa, natomiast w niniejszej pracy zastosowano światłowodowy kontroler polaryzacji. Zmieniając z pewną częstościa odwzorowanie realizowane przez kontroler, dokonywano uśrednienia zastosowanych odwzorowań po czasie, uzyskując w ten sposób depolaryzację. Taki sposób depolaryzacji nie zaburza modu czasowoprzestrzennego paczki falowej. Można go również w łatwy sposób uczynić ściśle nieodwracalnym, aplikując odwzorowania unitarne losowo (przy użyciu generatora liczb losowych), z częstością bliską częstości pojawiania się fotonów. Dodatkową zaletą depolaryzacji realizowanej jako statystyczna mieszanina odwzorowań unitarnych jest dużo większa kontrola nad realizowanym przekształceniem. Odwzorowanie wyłącznie depolaryzujące (unitalne¹) określone jest przez 3 parametry. W użytym układzie kontrolowane były wszystkie 3 parametry, co nie jest możliwe za pomocą metody wykorzystującej dekoherencję czasowa.

Struktura pracy przedstawia się następująco: W rozdziale 1 zebrane zostały podstawy teoretyczne pracy – opisano strukturę stanów dwufotonowych oraz odwzorowań całkowicie dodatnich. Omówiono łączący te dwie klasy obiektów izomorfizm Jamiołkowkiego oraz sposób realizacji tomografii procesów kwantowych (QPT). Rozdział 2 przedstawia źródło polaryzacyjnie splatanych par fotonów. Omówiona została optymalizacja źródła oraz wpływ dryfu w kryształach BBO na jakość splatania. W rozdziale 3 zreferowano, według Jamesa i in. [11], sposób pomiaru i rekonstrukcji macierzy gęstości stanu dwufotonowego. Przedstawiony został rachunek błedu pomiarowego dla wszystkich wielkości fizycznych obliczanych na podstawie macierzy gestości. Podano także przykłady zmierzonych macierzy gęstości. Rozdział 4 zawiera prezentację pełnego układu doświadczalnego oraz dokładne omówienie zastosowanej metody depolaryzacji. W rozdziale 5 przedstawiono zasadnicze wyniki pomiarów – scharakteryzowano wytworzone stany częściowo zdepolaryzowane oraz, wykorzystując QPT, prowadzące do nich odwzorowania. Otrzymane rezultaty porównano z przewidywaniami teoretycznymi przedstawionymi w rozdziale 1, uzyskując dobrą zgodność teorii z doświadczeniem. Na zakończenie zamieszczono krótkie podsumowanie uzyskanych rezultatów.

Część doświadczalna tej pracy zrealizowana została w Instytucie Fizyki Doświadczalnej UW oraz, w przeważającym zakresie, w Krajowym Labora-

 $^{^1\}mathrm{por.}$ podrozdział 1.2

torium Fizyki Atomowej Molekularnej i Optycznej w Toruniu. W związku z tym chciałbym podziękować osobom, które służyły mi pomocą podczas pobytu w Toruniu: dr. hab. Konradowi Banaszkowi za cenne dyskusje i pomoc w opracowaniu części teoretycznej pracy; mgr. Wojciechowi Wasilewskiemu za nieocenioną pomoc podczas przeprowadzania eksperymentów; pani Grażynie Chudańskiej, za organizację mojego pobytu w Toruniu.

Największe podziękowania chciałbym skierować do opiekuna mojej pracy, prof. Czesława Radzewicza za umożliwienie mi zetknięcia się z tak interesującymi zagadnieniami oraz za wiele cennych uwag i wskazówek zarówno podczas pracy doświadczalnej, jak i podczas opracowywania wyników.

Na zakończenie chciałbym podziękować także dwóm osobom, które nie przyczyniły się bezpośrednio do powstania tej pracy, lecz dzięki którym zainteresowałem się tą niezwykle ciekawą dziedziną: mojemu opiekunowi naukowemu z pierwszych lat studiów prof. Lucjanowi Pieli oraz mojemu opiekunowi podczas pobytu na Uniwersytecie Wiedeńskim, dr. Markusowi Aspelmeyerowi.

Rozdział 1

Podstawy teoretyczne

Rozdział ten zawiera podstawy teoretyczne zagadnień, których dotyczy zebrany materiał doświadczalny, przedstawiony w rozdziale 5. W pierwszej części omówiona zostanie ogólna struktura stanów polaryzacji pary fotonów. Omówienie będzie opierało się na analizie R. i M. Horodeckich [20]. Następnie przedstawiona zostanie analogiczna struktura przekształceń stanu polaryzacji pojedynczego fotonu, czyli odwzorowań całkowicie dodatnich (ang. *Completely Positive Maps*), na podstawie pracy D. K. L. Oi [21]. W kolejnej części krótko omówiony zostanie izomorfizm stanów dwufotonowych i odwzorowań całkowicie dodatnich – izomorfizm Jamiołkowskiego [22]. Ostatnia część rozdziału zawiera opis sposobu obliczania szeregu wielkości na podstawie macierzy gęstości, wyznaczanych eksperymentalnie, m. in. parametrów charakteryzujących odwzorowania całkowicie dodatnie oraz wielkości charakteryzujących stany dwufotonowe, takich jak miary splątania i entropii.

1.1 Stany dwufotonowe

1.1.1 Stan polaryzacji pojedynczego fotonu

W opisie kwantowym, stan polaryzacji pojedynczego fotonu (w ogólności układu dwupoziomowego, tzw. *qubitu*) określony jest przez wektor w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$. Wybierzmy pewną bazę w tej przestrzeni i oznaczmy wektory bazowe przez $|0\rangle$ i $|1\rangle^1$. Wtedy każdy stan kwantowy układu (w naszym przypadku każdy stan polaryzacji fotonu) da

 $^{^1{\}rm W}$ dalszej części pracy wektory te zostaną określone jako odpowiadające dwóm wzajemnie prostopadłym polaryzacjom liniowym. W tym rozdziale jednak oznaczać mogą dowolną parę wektorów bazowych.

się zapisać jako wektor:

$$|\psi^{(1)}\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle,$$
 (1.1)

gdzie współczynniki a_0, a_1 są liczbami zespolonymi, takimi że: $|a_0|^2 + |a_1|^2 =$ 1. Współczynniki te określają prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru odpowiednio stanu $|0\rangle$ bądź $|1\rangle$. Jak łatwo zauważyć, w przypadku stanu polaryzacji fotonu, omawiany opis jest identyczny z opisem polaryzacji za pomocą wektora Jonesa [23].

Wektor $|\psi^{(1)}\rangle$ jest wystarczający do opisu stanu dwupoziomowego układu kwantowego, gdy dysponujemy pełną informacją o tym stanie (a więc w praktyce układu izolowanego, nie oddziałującego z otoczeniem). W rzeczywistości, ze względu na oddziaływanie z otoczeniem (np. ze względu na depolaryzację) nie dysponujemy pełną informacją o stanie każdego pojedynczego układu (fotonu). Stan układu, na temat którego nie posiadamy pełnej informacji nazywamy stanem mieszanym. W przypadku stanu polaryzacji przykładem stanu mieszanego jest światło częściowo lub całkowicie niespolaryzowane: obserwator nie ma możliwości konkretnym fotonom przypisać odpowiedniego stanu polaryzacji (tzn. odpowiedniego wektora $|\psi^{(1)}\rangle$). Ze względu na swoją niewiedzę, obserwator musi zatem określić stan układu jako stan mieszany.

Stan układu, na temat którego posiadamy pełną wiedzę, nazywa się stanem czystym. W przypadku stanu polaryzacji, stanami czystymi są stany światła całkowicie spolaryzowanego.

Wektor $|\psi^{(1)}\rangle$ jest niewystarczający do opisu stanów mieszanych – konieczne jest użycie macierzy gęstości. Macierz gęstości stanu czystego $|\psi^{(1)}\rangle$ jest macierzą 2 × 2 zdefiniowaną jako:

$$\hat{\rho}^{(1)} = |\psi^{(1)}\rangle\langle\psi^{(1)}|.$$
(1.2)

Stan mieszany jest statystyczną mieszaniną stanów czystych. Macierz gęstości stanu mieszanego, będącego mieszaniną N stanów czystych $\{|\psi_i^{(1)}\rangle\}, i = 1 \dots N$ z wagami p_i ($\sum p_i = 1$) jest zdefiniowana jako:

$$\hat{\rho}_{mix}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} p_i |\psi_i^{(1)}\rangle \langle \psi_i^{(1)}|.$$
(1.3)

W przypadku stanu polaryzacji fotonu, macierz gęstości jest równoważna macierzy koherencji [23] o śladzie unormowanym do jedności.

Macierz gęstości niesie pełną informację o układzie kwantowym. Na jej podstawie można wyznaczyć wartość oczekiwaną dowolnej obserwabli. Wartość oczekiwana obserwabli \hat{A} dla stanu czystego $|\psi^{(1)}\rangle$ dana jest przez:

 $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi^{(1)} | \hat{A} | \psi^{(1)} \rangle$. Stosując (1.3) otrzymujemy wzór na wartość oczekiwaną \hat{A} dla stanu mieszanego:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i \langle \psi_i^{(1)} | \hat{A} | \psi_i^{(1)} \rangle = \operatorname{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}).$$
(1.4)

Warto przypomnieć podstawowe własności macierzy gęstości $\hat{\rho}$ odpowiadających fizycznym stanom kwantowym [24]:

- 1. Macierz gęstości jest hermitowska: $\hat{\rho}^{\dagger} = \hat{\rho}$.
- 2. Ślad macierzy gęstości jest równy jedności: $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$.
- 3. Ślad kwadratu macierzy gęstości jest równy jedności dla stanów czystych i jest mniejszy od jedności dla stanów mieszanych: $\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1$.
- 4. Macierz gęstości jest dodatnio określona (jej wartości własne są nieujemne).

Z warunków 1 i 2 wynika, że macierz gęstości określona jest przez 3 liczby rzeczywiste. Można łatwo wykazać, że stan układu dwupoziomowego można reprezentować za pomocą wektora w rzeczywistej przestrzeni \mathbb{R}^3 . Wektor taki nazywany jest wektorem Blocha, a w przypadku opisu stanu polaryzacji – wektorem Stokesa². Wektor Blocha stanu czystego ma zawsze długość 1 – wektory stanów czystych tworzą sferę o jednostkowym promieniu, tzw. sferę Blocha (w przypadku opisu stanu polaryzacji używa się sfery Poincarégo, która jest obrócona w stosunku do sfery Blocha). Wektor Blocha stanu mieszanego ma długość mniejszą od jedności. Jest średnią ważoną wektorów odpowiadających stanom czystym, których mieszaniną jest dany stan mieszany.

Formalnie, macierz gęstości jest powiązana z wektorem Blocha \mathbf{r} następującą zależnością:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{\sigma}_i), \qquad (1.5)$$

gdzie $\{r_i\}$ są elementami wektora Blocha, 1 jest macierzą jednostkową 2×2 , a $\{\hat{\sigma}_i\}$ są macierzami Pauliego:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

²Tradycyjnie nazwa wektor Stokesa odnosi się do czterowektora: $[S_0, S_1, S_2, S_3]$; odpowiednikiem wektora Blocha jest tzw. zredukowany wektor Stokesa, czyli wektor utworzony z trzech ostatnich elementów wektora Stokesa, przy S_0 unormowanym do jedności.



Rys. 1.1: Sfera Blocha. Zaznaczono pewien dowolnie wybrany wektor Blocha oraz położenie podstawowych stanów kwantowych. Mniejszą czcionką, w nawiasach zaznaczono położenie stanów na sferze Poincarégo. Pominięto stałe normalizacyjne.

Łatwo sprawdzić, że stanowi $|0\rangle$ odpowiada $\mathbf{r} = [0, 0, 1]$, stanowi $|1\rangle$: $\mathbf{r} = [0, 0, -1]$, stanowi $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$: $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 0, 0]$, a stanowi $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$: $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}[0, 1, 0]$ (por. rys. 1.1).

 \dot{W} przypadku korzystania z reprezentacji za pomocą zredukowanego wektora Stokesa **s** oraz sfery Poincarégo zależność (1.5) jest nieco inna:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + s_1 \hat{\sigma}_3 + s_2 \hat{\sigma}_1 + s_3 \hat{\sigma}_2).$$
(1.7)

Przejścia od sfery Blocha do sfery Poincarégo można dokonać za pomocą pojedynczego obrotu, co łatwo stwierdzić na podstawie rys. 1.1.

Mimo że w części eksperymentalnej stany kwantowe były realizowane za pomocą spolaryzowanych fotonów, w obliczeniach w dalszej części pracy stosowany będzie opis za pomocą sfery Blocha, ze względu na fakt, że w pracach teoretycznych, do których odnosi się część eksperymentalna, opis za pomocą sfery Poincarégo praktycznie w ogóle nie jest stosowany.

1.1.2 Stan polaryzacji pary fotonów

Stan polaryzacji pary fotonów określony jest przez wektor w czterowymiarowej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , będącej iloczynem tensorowym dwóch przestrzeni dwuwymiarowych: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Naturalną bazą w przestrzeni czterowymiarowej jest baza utworzona na podstawie baz w przestrzeniach dwuwymiarowych. Załóżmy, że dla fotonu A wybierzemy bazę $|0\rangle_A, |1\rangle_A$, a dla fotonu B – bazę $|0\rangle_B, |1\rangle_B$. Wtedy naturalną bazą w przestrzeni dwufotonowej jest baza następująca: $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B,$ $|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$. Wektory tej bazy będą od tego momentu oznaczane skrótowo jako $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

Najprostszym przypadkiem czystego stanu dwufotonowego jest stan będący iloczynem stanów pojedynczych fotonów:

$$|\psi^{(2)}\rangle = |\psi^{(1)}\rangle_A \otimes |\varphi^{(1)}\rangle_B, \qquad (1.8)$$

gdzie $|\psi^{(i)}\rangle$ oznacza wektor stanu *i*-fotonowego. Stan czysty tej postaci nazywany jest stanem separowalnym – jego własności są prostym złożeniem własności stanów pojedynczych fotonów.

Istnieje klasa czystych stanów dwufotonowych, nie dających się zapisać w postaci (1.8). Stany takie nazywane są stanami splątanymi. Własności pary splątanych fotonów nie da się wytłumaczyć na podstawie własności pojedynczych fotonów. Przykładami stanów splątanych są tzw. stany Bella:

$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle), \qquad (1.9)$$
$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle).$$

Jeśli para fotonów znajduje się w stanie $|\Phi^+\rangle$, stan fotonu A jest całkowicie skorelowany ze stanem fotonu B: jeśli foton A jest w stanie $|0\rangle_A$, to z całkowitą pewnością foton B jest w stanie $|0\rangle_B$. Podobnie, jeśli foton A jest w stanie $|1\rangle_A$, to foton B jest w stanie $|1\rangle_B$. Natomiast stan pojedynczego fotonu jest całkowicie nieokreślony: z równym prawdopodobieństwem może on być w stanie $|0\rangle$ jak i $|1\rangle$ – a więc pojedynczy foton pary będącej w stanie czystym $|\Phi^+\rangle$ znajduje się w stanie całkowicie mieszanym. Ściśle można to pokazać, wykorzystując formalizm macierzy gęstości. Macierz gęstości stanu $|\Phi^+\rangle$ jest postaci³:

$$\begin{split} |\Phi^{+}\rangle\langle\Phi^{+}| &= \frac{1}{2} \Big[(|0\rangle_{A} \otimes |0\rangle_{B})(\langle 0|_{A} \otimes \langle 0|_{B}) + (|0\rangle_{A} \otimes |0\rangle_{B})(\langle 1|_{A} \otimes \langle 1|_{B}) + (|1\rangle_{A} \otimes |1\rangle_{B})(\langle 0|_{A} \otimes \langle 0|_{B}) + (|1\rangle_{A} \otimes |1\rangle_{B})(\langle 1|_{A} \otimes \langle 1|_{B}) \Big]. \end{split}$$
(1.10)

Macierz gęstości podukładu A (pojedynczego fotonu) $\hat{\rho}_A^{(1)}$ można wyliczyć na podstawie macierzy gęstości całego układu (pary fotonów) $\hat{\rho}^{(2)}$ wykonując

³Macierz gęstości stanu $|\Phi^+\rangle$ jest podana explicite w równaniu (3.65).

ślad częściowy po podukładzie B (Tr_B), zdefiniowany dla przypadku przestrzeni czterowymiarowej $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2A} \otimes \mathcal{H}_{2B}$ następująco [3]. Dla wektorów $|\psi_A\rangle, |\varphi_A\rangle \in \mathcal{H}_{2A}$ oraz $|\psi_B\rangle, |\varphi_B\rangle \in \mathcal{H}_{2B}$:

$$\operatorname{Tr}_{B}(|\psi_{A}\rangle\langle\varphi_{A}|\otimes|\psi_{B}\rangle\langle\varphi_{B}|) = |\psi_{A}\rangle\langle\varphi_{A}|\operatorname{Tr}(|\psi_{B}\rangle\langle\varphi_{B}|) = = \langle\varphi_{B}|\psi_{B}\rangle|\psi_{A}\rangle\langle\varphi_{A}|$$
(1.11)

Stosując powyższą definicję do ortonormalnych wektorów bazowych otrzymujemy:

$$\hat{\rho}_A^{(1)} = \text{Tr}_B \hat{\rho}^{(2)} = \langle 0|_B \hat{\rho}^{(2)} |0\rangle_B + \langle 1|_B \hat{\rho}^{(2)} |1\rangle_B.$$
(1.12)

A zatem, dla macierzy gęstości danej przez (1.10):

$$\operatorname{Tr}_{B}(|\Phi^{+}\rangle\langle\Phi^{+}|) = \frac{1}{2}(|0\rangle_{A}\langle0|_{A} + |1\rangle_{A}\langle1|_{A}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$
 (1.13)

Jest to macierz stanu maksymalnie mieszanego – opisuje stan polaryzacji światła całkowicie zdepolaryzowanego.

Stany mieszane również mogą być stanami splątanymi. Stan mieszany jest stanem splątanym, jeśli dla każdego rozkładu [postaci analogicznej do (1.3)] macierzy gęstości $\hat{\rho}_{mix}$ tego stanu na macierze stanów **czystych** $\hat{\rho}_i$:

$$\hat{\rho}_{mix} = \sum_{i} p_i \hat{\rho}_i \tag{1.14}$$

macierze $\hat{\rho}_i$ nie były separowalne [3]. Definicja ta jest bardzo intuicyjna, natomiast jest zupełnie nieprzydatna, jeśli chodzi o praktyczne rozstrzygnięcie, czy dany stan jest splątany, czy separowalny. Bardziej przydatne kryteria omówione zostaną w podrozdziałach 1.1.3 i 1.6.4.

1.1.3 Dozwolone stany dwufotonowe

Macierz gęstości dowolnego stanu dwufotonowego może być w ogólnej postaci zapisana jako:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \Big[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + (\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes (\mathbf{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \sum_{m,n=1}^{3} T_{mn} \hat{\sigma}_n \otimes \hat{\sigma}_m \Big], \qquad (1.15)$$

gdzie \mathbf{r}, \mathbf{s} są wektorami w \mathbb{R}^3 o długości $\leq 1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ jest wektorem utworzonym z macierzy Pauliego⁴, a więc $\mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^3 r_i \hat{\sigma}_i$. Współczynniki T_{mn} tworzą rzeczywistą macierz 3×3 , która będzie oznaczana przez \mathbf{T} .

⁴Macierze i wektory w reprezentacji macierzy gęstości będą oznaczane odpowiednio daszkami i strzałkami; w reprezentacji Blocha – odpowiednio wielkimi i małymi pogrubionymi literami. Wektor $\hat{\sigma}$ jest "pomostem" pomiędzy obydwiema reprezentacjami, stąd zapis za pomocą obydwu notacji.

Wektory **r** i **s** są parametrami lokalnymi, charakteryzującymi osobno każdy z podukładów. Obliczając ślady częściowe macierzy $\hat{\rho}$ otrzymujemy:

$$\hat{\rho}_A = \operatorname{Tr}_B \hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \hat{\rho}_B = \operatorname{Tr}_A \hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{s} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}).$$
(1.16)

Otrzymane wyrażenia na $\hat{\rho}_A$ i $\hat{\rho}_B$ są postaci (1.5).

Macierz \mathbf{T} określa natomiast korelacje pomiędzy dwoma podukładami.

Macierz $\hat{\rho}$ jest określona przez 15 niezależnych parametrów. Jednak nie wszystkie parametry są istotne, jeśli chodzi o rozstrzygnięcie czy dany stan jest separowalny, czy splątany. Dokonamy więc teraz redukcji liczby parametrów określających $\hat{\rho}$ poprzez wybranie reprezentatywnej klasy stanów dwufotonowych [20].

Zauważmy, że (nie)separowalność jest niezmiennicza ze względu na lokalne transformacje unitarne postaci $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$ (gdzie \hat{U}_A jest transformacją podukładu A, \hat{U}_B – transformacją podukładu B). Możemy więc wybrać pewien podzbiór \mathcal{D} zbioru wszystkich stanów $\hat{\rho}$, taki, że każdy, dowolny stan $\hat{\rho}$ da się zapisać jako $\hat{\rho} = (\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B) \tilde{\rho} (\hat{U}_A^{\dagger} \otimes \hat{U}_B^{\dagger})$, gdzie $\tilde{\rho} \in \mathcal{D}$. Jako podzbiór \mathcal{D} wybierzmy stany takie, dla których macierz **T** jest diagonalna. Pokażmy teraz, za [20], że tak wybrany podzbiór jest reprezentatywny.

Dla każdej transformacji unitarnej \hat{U} istnieje jednoznacznie określony obrót **O** taki, że:

$$\hat{U}\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{U}^{\dagger} = (\mathbf{O}\hat{\mathbf{n}})\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}},\tag{1.17}$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ jest dowolnym wersorem w \mathbb{R}^3 . Jeżeli stan poddany zostanie transformacji $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$, to wielkości \mathbf{r}, \mathbf{s} i \mathbf{T} transformują się następująco:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}_A \mathbf{r}, \quad \mathbf{s}' = \mathbf{O}_B \mathbf{s}, \quad \mathbf{T}' = \mathbf{O}_A \mathbf{T} \mathbf{O}_B^{\dagger},$$
(1.18)

gdzie obroty \mathbf{O}_i odpowiadają transformacjom \hat{U}_i przez (1.17); a zatem, dla dowolnego stanu $\hat{\rho}$ możemy zawsze wybrać takie transformacje \hat{U}_A i \hat{U}_B , by odpowiadające im obroty zdiagonalizowały \mathbf{T} .

Stany należące do podzbioru \mathcal{D} są określone przez 9 parametrów. Jeśli natomiast ograniczymy się do stanów o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach – tzn. do stanów o $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{s} = 0$ [por. (1.16)], to pozostaną tylko 3 istotne parametry: diagonalne elementy macierzy \mathbf{T}' . Stany o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach są więc w pełni charakteryzowane przez macierz \mathbf{T} .

Dokonawszy redukcji istotnych parametrów, przedstawmy teraz warunek konieczny na postać macierzy \mathbf{T}' , by macierz gęstości była dodatnio określona (a więc by \mathbf{T}' odpowiadała fizycznemu stanowi).

Macierz $\hat{\rho}$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego operatora rzutowego \hat{P} :

$$\operatorname{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}) \ge 0. \tag{1.19}$$

Rozważmy operatory rzutowe odpowiadające stanom Bella (1.9): $\hat{P}_{(1)} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \hat{P}_{(2)} = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, \hat{P}^{(3)} = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|, \hat{P}^{(4)} = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$. Parametry rozkładu (1.15) tych operatorów są następujące:

$$\mathbf{r}_{i} = 0, \ \mathbf{s}_{i} = 0, \ i = 0, 1, 2, 3$$
$$\mathbf{T}_{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_{2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{T}_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_{4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(1.20)

Dla dowolnych $\hat{\rho}$ i $\hat{\rho}'$, określonych odpowiednio przez $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{T})$ i $(\mathbf{r}', \mathbf{s}', \mathbf{T}')$ zachodzi:

$$\operatorname{Tr}(\hat{\rho}\hat{\rho}') = \frac{1}{4} [1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' + \operatorname{Tr}(\mathbf{TT}'^{\dagger})].$$
(1.21)

Stosując (1.21) do czterech par $\hat{\rho}, \hat{P}^{(i)}$, gdzie $\hat{\rho} \in \mathcal{D}$, na podstawie nierówności (1.19) otrzymujemy warunki jakie muszą spełniać elementy macierzy **T**, by odpowiadająca jej macierz $\hat{\rho}$ była dodatnio określona:

$$1 - T_{11} - T_{22} - T_{33} \ge 0, \quad 1 - T_{11} + T_{22} + T_{33} \ge 0, \quad (1.22)$$

$$1 + T_{11} - T_{22} + T_{33} \ge 0, \quad 1 + T_{11} + T_{22} - T_{33} \ge 0.$$

Warunki te w prostokątnym układzie współrzędnych o osiach T_{11} , T_{22} , T_{33} określają czworościan foremny \mathcal{F} , przedstawiony na rys. 1.2.

Dla stanów o dowolnych **r** i **s** podany warunek jest jedynie warunkiem koniecznym. Natomiast dla stanów o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach (o $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{s} = 0$) warunek ten staje się warunkiem dostatecznym [20].

Przejdźmy teraz do omówienia warunku koniecznego, by dany stan $\hat{\rho}$ był stanem separowalnym. Rozważmy operator \hat{V} dany przez: $\hat{V}\hat{\varphi}\otimes\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}\otimes\hat{\varphi}$. Dla \hat{V} zachodzi następująca równość:

$$\operatorname{Tr}(\hat{V}\hat{A}\otimes\hat{B}) = \operatorname{Tr}(\hat{A}\hat{B}), \qquad (1.23)$$

z której wynika, że dla każdego separowalnego stanu $\hat{\rho}$:

$$\operatorname{Tr}(\hat{V}\hat{\rho}) \ge 0. \tag{1.24}$$

Zdefiniujmy teraz cztery operatory: $\hat{V}_i = (\hat{\sigma}_i \otimes \mathbb{1})\hat{V}(\hat{\sigma}_i \otimes \mathbb{1}), i = 0, 1, 2, 3$, gdzie $\hat{\sigma}_0 = \mathbb{1}$. Ponieważ zbiór stanów separowalnych jest niezmienniczy względem transformacji postaci $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$, z (1.24) wynika, że dla stanów separowalnych:

$$\operatorname{Tr}(V_i\hat{\rho}) \ge 0, \ i = 0, 1, 2, 3.$$
 (1.25)



Rys. 1.2: Czworościan foremny \mathcal{F} stanów dodatnio określonych (linia ciągła) oraz ośmiościan foremny \mathcal{O} stanów separowalnych (linia przerywana).

Operatory \hat{V}_i można przedstawić w postaci:

$$\hat{V}_i = \frac{1}{4} \Big[2(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) - \sum_{j=1}^3 T_{jj}^{(i)} \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_j \Big], \qquad (1.26)$$

gdzie macierze $\mathbf{T}^{(i)}$ są związane z macierzami \mathbf{T}_i (1.20): $\mathbf{T}^{(i)} = -2\mathbf{T}_i$. Z równania (1.26) i nierówności (1.25) wynika, że elementy macierzy \mathbf{T} należą do czworościanu foremnego symetrycznego w stosunku do czworościanu \mathcal{F} stanów dodatnio określonych względem początku układu współrzędnych. Stan separowalny musi być jednocześnie dodatnio określony, a więc warunkiem koniecznym na to, by stan $\hat{\rho} \in \mathcal{D}$ był separowalny, jest należenie elementów odpowiedniej macierzy \mathbf{T} do części wspólnej obydwu czworościanów, czyli do ośmiościanu foremnego, przedstawionego na rys. 1.2.

Można wykazać [20], że dla stanów o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach warunek ten staje się również warunkiem dostatecznym.

1.2 Odwzorowania całkowicie dodatnie

Przejdźmy teraz do analizy transformacji, jakim mogą podlegać stany polaryzacji pary fotonów. Analiza zostanie przeprowadzona na podstawie pracy [21].

Zastanówmy się, jakim przekształceniom może podlegać stan pojedynczego fotonu opisany macierzą gęstości $\hat{\rho}^{(1)}$. Niech S będzie odwzorowaniem z macierzy 2 × 2 w macierze 2 × 2. Załóżmy też, że odwzorowanie to nie powoduje strat (czyli, jeśli poddamy działaniu odwzorowania N fotonów, to na wyjściu otrzymamy również N fotonów). Odwzorowanie takie musi spełniać następujące warunki:

- 1. musi zachowywać ślad: $\forall \hat{\rho}^{(1)} \operatorname{Tr} S(\hat{\rho}^{(1)}) = \operatorname{Tr} \hat{\rho}^{(1)}$ (ten warunek wynika z założonej bezstratności odwzorowania),
- 2. musi być dodatnie: $\forall \hat{\rho}^{(1)} \ \hat{\rho}^{(1)} \ge 0 \Rightarrow S(\hat{\rho}^{(1)}) \ge 0.$

Powyższe dwa warunki zapewniają, że S przekształca macierze gęstości w macierze gęstości. Jednakże jest jeszcze trzeci warunek, który musi spełniać S by być fizycznie dozwolonym przekształceniem:

3. S musi być całkowicie dodatnie (ang. completely positive, CP).

S jest całkowicie dodatnie, jeśli odw
zorowanie $\mathbb{1}_n \otimes S$, gdzie $\mathbb{1}_n$ jest odw
zorowaniem tożsamościowym w przestrzeni macierzy $n \times n$, jest dodatnie dla
 każdego n.

Warunek ten ma bardzo naturalne fizyczne uzasadnienie: jest zawsze możliwe, że dany stan mieszany $\hat{\rho}^{(1)}$ jest splątany z pewnym innym stanem. Wtedy przekształcenie S odpowiada przekształceniu $\mathbb{1}_n \otimes S$ obydwu stanów, które musi również być fizycznym przekształceniem, a więc musi być dodatnie.

Pokażmy teraz, za [21], jakie ograniczenia na strukturę odwzorowań S narzucają powyższe trzy warunki. Przejdźmy do reprezentacji macierzy gęstości pojedynczego fotonu za pomocą wektora Blocha **r**. Działanie odwzorowania S na wektor **r** w tej reprezentacji można zapisać jako:

$$\mathbf{r}' = S(\mathbf{r}) = \mathcal{T}\mathbf{r} + \mathbf{b},\tag{1.27}$$

gdzie \mathcal{T} jest rzeczywistą macierzą 3×3 , a **b** trójelementowym rzeczywistym wektorem. Odwzorowanie tej postaci automatycznie spełnia warunek zachowywania śladu (czyli długości wektora Blocha). *S* jest określone przez 12 parametrów (9 elementów \mathcal{T} i 3 elementy wektora **b**).

Ograniczmy się teraz do odwzorowań unitalnych, czyli takich, dla których $\mathbf{b} = 0$. Dodatkowo załóżmy, że \mathcal{T} jest diagonalna i oznaczmy jej elementy

przez $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$. Łatwo pokazać, że odwzorowaniom całkowicie dodatnim odpowiadają $\boldsymbol{\eta}$ należące do czworościanu \mathcal{G} (w prostokątnym układzie odniesienia w przestrzeni parametrów η_1, η_2, η_3) o wierzchołkach w punktach:

$$A = (1, 1, 1), \ B = (-1, 1, 1), \ C = (1, -1, 1), \ D = (1, 1, -1).$$
(1.28)

Zbiór takich odwzorowań nazwijmy \mathcal{E} .

Aby udowodnić ten warunek, wystarczy pokazać, jak działa S na stan maksymalnie splątany $|\Phi^+\rangle$. Warunkiem koniecznym i dostatecznym [25] [26] by S było odwzorowaniem całkowicie dodatnim jest nierówność:

$$\mathbb{1}_2 \otimes S(|\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|) \ge 0. \tag{1.29}$$

Oznacza to, że macierz:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\eta_3 & 0 & 0 & \eta_1+\eta_2 \\ 0 & 1-\eta_3 & \eta_1-\eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1-\eta_2 & 1-\eta_3 & 0 \\ \eta_1+\eta_2 & 0 & 0 & 1+\eta_3 \end{pmatrix}$$
(1.30)

musi być dodatnio określona. Dodatniookreśloność macierzy (1.30) prowadzi do następujących nierówności:

$$(1+\eta_3)^2 - (\eta_1 + \eta_2)^2 \ge 0$$

$$(1.31)$$

$$(1-\eta_3)^2 - (\eta_1 - \eta_2)^2 \ge 0.$$

Nierówności te określają w przestrzeni czworościan. Czworościan ten został przedstawiony na rys. 1.3.

Wierzchołki czworościanu odpowiadają czterem podstawowym przekształceniom: identyczności oraz obrotom o 180° wokół osi x, y i z. Ponieważ czworościan jest figurą wypukłą, każdy wektor η wewnątrz czworościanu można przedstawić jako średnią ważoną wektorów odpowiadających 4 wierzchołkom. Każde odwzorowanie ze zbioru \mathcal{E} można więc zrealizować jako statystyczną mieszaninę 4 podstawowych odwzorowań (por. też 1.4).

Uogólnijmy teraz powyższe rozumowanie na odwzorowania unitalne o niediagonalnej macierzy \mathcal{T} . Każdą macierz \mathcal{T} można rozłożyć na iloczyn trzech macierzy:

$$\mathcal{T} = \mathbf{U} \mathbf{\Delta} \mathbf{V}^T \tag{1.32}$$

takich, że U i V są obrotami, a Δ jest diagonalna. Rozkład ten zostanie szczegółowo omówiony w części 1.3.

Ponieważ rozkład istnieje dla każdej macierzy \mathcal{T} , każdemu odwzorowaniu unitalnemu możemy przypisać diagonalną macierz Δ . Zupełna dodatniość jest niezmiennicza ze względu na obroty, a więc jeśli $\Delta \in \mathcal{E}$, to $\mathcal{T} = \mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^T$ jest całkowicie dodatnie i vice versa.



Rys. 1.3: Czworościan foremny \mathcal{G} całkowicie dodatnich odwzorowań unitalnych. Zaznaczono 4 podstawowe przekształcenia: identyczność oraz obroty o 180° wokół osi x, y i z.

1.3 Rozkład na wartości osobliwe

Zarówno w przypadku stanów dwufotonowych, jak i w przypadku odwzorowań całkowicie dodatnich warunki na, odpowiednio, dodatniość lub zupełną dodatniość wyznaczone były dla podzbioru zbioru stanów lub odwzorowań takiego, że macierz \mathbf{T} lub \mathcal{T}^5 była diagonalna. Następnie warunki te zostały uogólnione na cały zbiór stanów (odwzorowań) dzięki faktowi, że dowolną, niediagonalną, rzeczywistą macierz \mathbf{T} można rozłożyć na iloczyn macierzy obrotu, macierzy diagonalnej i kolejnej macierzy obrotu. Ponieważ dodatniość, separowalność i zupełna dodatniość są niezmiennicze ze względu na obroty, cechy podzbiorów o diagonalnych \mathbf{T} przenoszą się na cały zbór stanów (odwzorowań).

Opiszmy krótko fizyczną interpretację tego rozkładu, na przykładzie rozkładu macierzy \mathcal{T} odwzorowania. Zgodnie z (1.27) \mathcal{T} opisuje przekształcenie wektora Blocha. Działanie odwzorowania dokonuje zatem przekształcenia sfery Blocha. W ogólności obrazem sfery poddanej działaniu odwzorowania \mathcal{T}

⁵W tym podrozdziale symbol **T**, jeśli z kontekstu nie wynika inaczej, będzie oznaczać zarówno macierz **T** stanu, jak i macierz \mathcal{T} odwzorowania. Podobnie **D** będzie oznaczać także macierz Δ .

jest elipsoida zawarta wewnątrz sfery [21], przy czym w przypadku odwzorowań unitalnych, środek elipsoidy pokrywa się ze środkiem sfery. Korzystając z rozkładu 1.32 można łatwo zinterpretować działanie odwzorowania. Sfera Blocha jest obracana (obrót opisany macierzą \mathbf{V}^T). Następnie sfera ulega ściśnięciu do elipsoidy. Ściskanie zachodzi wzdłuż osi układu odniesienia; jego wielkość jest określona przez wartość elementów macierzy diagonalnej Δ (elementy Δ będą nazywane parametrami ściskania, badź tłumienia). Na koniec, uzyskana elipsoida jest obracana przez macierz obrotu U. Odwzorowaniu unitalnemu można zatem przyporządkować reprezentującą je elipsoidę. Aby przyporządkowanie było jednoznaczne, oprócz podania długości osi głównych (3 parametry – elementy diagonalne macierzy Δ) i orientacji elipsoidy (3 kąty Eulera obrotu \mathbf{U}), konieczne jest sprecyzowanie, jakiemu przekształceniu (obrotowi) poddany został wyjściowy układ odniesienia: daje to kolejne 3 parametry (aby na ich podstawie odtworzyć katy Eulera obrotu \mathbf{V}^T). W sumie elipsoida określona jest więc przez 9 parametrów, co odpowiada liczbie elementów macierzy \mathcal{T} .

W części 1.1.2 pokazano, że rozkład na obrót, macierz diagonalną i kolejny obrót istnieje dla każdej macierzy \mathbf{T} . Rozkład ten nazywany jest rozkładem na wartości osobliwe [27]. Ściśle, przez rozkład na wartości osobliwe macierzy \mathbf{T} rozumiany jest rozkład:

$$\mathbf{T} = \mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{V}^T, \tag{1.33}$$

gdzie \mathcal{U} i \mathcal{V} są unitarne, a \mathcal{D} jest diagonalna. Elementy \mathcal{D} nazywane są wartościami osobliwymi macierzy \mathbf{T} . W przypadku, gdy \mathbf{T} jest macierzą rzeczywistą 3×3 , \mathcal{U} i \mathcal{V} są również rzeczywiste – należą do grupy O(3) i opisują obroty niewłaściwe.

Rozkład (1.33) jest niejednoznaczny [28]. Jednoznacznie określone są jedynie elementy macierzy \mathcal{D} , z dokładnością do znaku i permutacji. Aby macierz \mathcal{D} była zdefiniowana jednoznacznie, nakłada się na nią dodatkowy warunek: elementy \mathcal{D} są nieujemne i uporządkowane malejąco. Warunek ten powoduje, że w przypadku macierzy \mathbf{T} stanu dwufotonowego jedna z macierzy \mathcal{U} lub \mathcal{V} nie jest macierzą obrotu (a jedynie obrotu niewłaściwego). Dla macierzy \mathbf{T} stanu dwufotonowego det $\mathbf{T} \leq 0$. Ponieważ elementy \mathcal{D} są nieujemne, det $\mathcal{D} \geq 0$. Aby równość:

$$\det \mathbf{D} = \det \mathcal{U} \det \mathcal{D} \det \mathcal{V} \tag{1.34}$$

była spełniona, wyznacznik jednej z macierzy unitarnych musi być równy -1 – macierz ta nie jest zatem macierzą obrotu właściwego.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że det $\mathcal{V} = -1$. Aby obie macierze unitarne były macierzami obrotów właściwych (czyli aby obie miały wyznacznik równy 1) należy zrezygnować z warunku nieujemności elementów \mathcal{D} , modyfikując rozkład (1.33) następująco. Wprowadźmy diagonalną macierz **J** o elementach równych co do modułu 1, taką, że det $\mathbf{J} = -1$ [w praktyce macierz **J** może być jedną z macierzy (1.20)]. Ponieważ $\mathbf{J}\mathbf{J} = \mathbb{1}_3$ i $\mathbf{J}^T = \mathbf{J}$, możemy przepisać rozkład (1.33) jako:

$$\mathbf{T} = \mathcal{U}\mathcal{D}\mathbf{J}(\mathbf{J}\mathcal{V})^T = \mathcal{U}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{V}}^T, \qquad (1.35)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{D}} = \mathcal{D}\mathbf{J}, \tilde{\mathbf{V}} = \mathcal{V}\mathbf{J}$. Możliwość wyboru macierzy \mathbf{J} na 4 sposoby, prowadzi to do niejednoznaczności powyższego rozkładu. Dodatkowo, można wprowadzić macierz \mathbf{K} o własnościach takich jak \mathbf{J} , poza tym, że det $\mathbf{K} = 1$. Wyrażenie (1.33) można wtedy zmodyfikować następująco:

$$\mathbf{T} = (\mathcal{U}\mathbf{K})(\mathbf{K}\mathcal{D}\mathbf{J})(\mathbf{J}\mathcal{V})^T = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T, \qquad (1.36)$$

gdzie $\mathbf{U} = \mathcal{U}\mathbf{K}, \mathbf{D} = \mathbf{K}\mathcal{D}\mathbf{J}, \mathbf{V} = \mathcal{V}\mathbf{J}$. Macierze U i V pozostają macierzami obrotów właściwych, rośnie natomiast liczba możliwości ich wyboru.

Powyższe modyfikacje rozkładu na wartości osobliwe polegają na zmianach znaków wartości osobliwych, wraz z towarzyszącymi im odpowiednimi modyfikacjami macierzy unitarnych. Można dokonać dalszych modyfikacji rozkładu: warunki (1.18) i (1.32) nie nakładają żadnego ograniczenia na kolejność elementów macierzy diagonalnej. Możemy zatem dokonać dowolnej permutacji tych elementów (wraz odpowiednią permutacją kolumn i wierszy macierzy U i V). Macierz obrotu po permutacji kolumn lub wierszy pozostaje macierzą obrotu, a więc rozkład, po permutacji elementów **D**, nadal jest rozkładem postaci (1.18) i (1.32). Liczba takich permutacji wynosi 3! = 6 (dla niezdegenerowanych wartości osobliwych), co razem z niejednoznacznością ze względu na znaki daje 24 sposoby, na jakie można macierzy **T** przypisać macierz diagonalną **D**.

Zastanówmy się teraz nad fizycznym znaczeniem niejednoznaczności rozkładu na wartości osobliwe. 6 permutacji elementów **D** odpowiada 6 możliwym sposobom wyboru osi układu współrzędnych. Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w części 1.2, macierzy **T** można przypisać elipsoidę będącą przekształconą (ściśniętą i obróconą) sferą. Osie układu odniesienia określone są przez kierunki ściskania sfery. Wybór **D** o elementach uporządkowanych według malejących wartości bezwzględnych odpowiada wyborowi układu odniesienia o osi x skierowanej wzdłuż kierunku najmniejszego ściskania itd.

Niejednoznaczność ze względu na znaki odpowiada obrotom układu współrzędnych o 180° wokół jego osi. Ponieważ macierz \mathcal{D} ma wszystkie elementy dodatnie, odpowiadająca jej macierz $\mathbf{D} = \mathbf{K}\mathcal{D}\mathbf{J}$ dla ustalonych \mathbf{J} i \mathbf{K} ma zawsze elementy o jednakowo określonym znaku (czyli np. $D_{11} > 0, D_{22} < 0$, $D_{33} > 0$). Wybór konkretnej postaci macierzy **J** i **K** oznacza, że punkty wewnątrz czworościanu z rys. 1.2 reprezentujące stan dwufotonowy określony macierzą **T** będą leżeć wyłącznie w pobliżu jednego z czterech naroży czworościanu. Ustalenia, których macierzy **J** i **K** należy użyć, można dokonać dysponując dodatkowymi informacjami o mierzonym stanie. Na przykład, wiedząc, że mamy do czynienia ze stanem bliskim jednemu ze stanów Bella, możemy wybrać takie **J** i **K**, by punkt wewnątrz czworościanu reprezentujący ten stan znalazł się w pobliżu odpowiedniego wierzchołka.

W przypadku zdegenerowanych wartości osobliwych liczba możliwości wyboru \mathbf{D} jest mniejsza, natomiast wzrasta niejednoznaczność wyboru macierzy \mathbf{U} i \mathbf{V} . Zdegenerowane wartości osobliwe macierzy \mathbf{T} oznaczają, że odpowiadająca jej elipsoida jest elipsoidą obrotową. \mathbf{U} i \mathbf{V} są więc zdefiniowane z dokładnością do obrotu wokół osi symetrii elipsoidy.

Dotychczas zakładaliśmy, że det $\mathcal{V} = -1$. Może się zdarzyć, że det $\mathcal{U} = -1$ (lub że oba wyznaczniki będą ujemne). Należy wtedy odpowiednio zastąpić macierz **K** przez macierz **J** (i ewentualnie **J** przez **K**), tak by obie macierze obrotów stały się macierzami obrotów właściwych.

Na koniec należy podkreślić, że wybór jednej z 24 postaci rozkładu zmienia jedynie znaki i kolejność elementów \mathbf{D} , natomiast nie zmienia najistotniejszej informacji zawartej w parametrach tłumienia (wartościach osobliwych), a mianowicie ich wartości bezwzględnej, określającej stopień zdepolaryzowania stanu dwufotonowego. Wybór ten nie zmienia również orientacji elipsoidy odpowiadającej macierzy \mathbf{T} , gdyż zmianie znaków lub kolejności parametrów tłumienia towarzyszą odpowiednie zmiany macierzy obrotów \mathbf{U} i \mathbf{V} .

1.4 Operatory Krausa

W części 1.2 pokazano, że każde diagonalne odwzorowanie unitalne całkowicie dodatnie, zachowujące ślad można przedstawić jako statystyczną mieszaninę odwzorowań odpowiadających wierzchołkom czworościanu \mathcal{G} : odwzorowania tożsamościowego i 3 obrotów o 180° wokół osi wzajemnie prostopadłych $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$:

$$\boldsymbol{\Delta} = a_0 \mathbb{1} + a_1 \mathbf{R}_1 + a_2 \mathbf{R}_2 + a_3 \mathbf{R}_3, \tag{1.37}$$

gdzie $\sum a_i = 1$. Zgodnie z (1.32) dowolne odwzorowanie można zapisać jako iloczyn obrotu (odwzorowania unitarnego), odwzorowania diagonalnego i kolejnego obrotu. Korzystając z (1.32) otrzymujemy więc:

$$\mathcal{T} = \mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^T = \sum_{i=0}^3 a_i \tilde{\mathbf{R}}_i, \qquad (1.38)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{R}}_i = \mathbf{U}\mathbf{R}_i\mathbf{V}^T$ i przyjęto $\mathbf{R}_0 = \mathbb{1}$. Powyższe oznacza, że każde odwzorowanie można zrealizować jako statystyczną mieszaninę czterech odwzorowań $\tilde{\mathbf{R}}_i$ z odpowiednimi wagami a_i (taki właśnie sposób realizacji odwzorowań całkowicie dodatnich zostanie wykorzystany w części eksperymentalnej, por. 4.2).

Podziałajmy teraz odwzorowaniem określonym macierzą \mathcal{T} na jeden z fotonów stanu dwufotonowego o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach, scharakteryzowanego macierzą \mathbf{T} . Łatwo pokazać [por. część 1.5.2, (1.50) - (1.52)], że w wyniku działania odwzorowania, otrzymujemy stan opisany macierzą $\mathbf{T}' = \mathcal{T}\mathbf{T}$. Korzystając z (1.38) możemy zapisać:

$$\mathbf{T}' = \sum_{k=0}^{3} a_k \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{T}$$
(1.39)

Macierz gęstości stanu po przekształceniu jest więc postaci:

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^{3} T'_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} a_k \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^{3} (\tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{T})_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \right) = \sum_{k=0}^{3} a_k \tilde{\rho}_k.$$
(1.40)

Stan po przekształceniu jest statystyczną mieszaniną stanów poddanych działaniu obrotów $\tilde{\mathbf{R}}_i$. Działanie $\tilde{\mathbf{R}}_i$ na pojedynczy foton opisany macierzą gęstości $\hat{\rho}^{(1)}$ można zapisać jako: $\tilde{\rho}^{(1)} = \hat{L}\hat{\rho}^{(1)}\hat{L}^{\dagger}$, gdzie \hat{L} jest macierzą unitarną \in SU(2) (macierzą Jonesa) odpowiadającą $\tilde{\mathbf{R}}_i \in$ SO(3) (obrotowi na sferze Poincarégo). Gdy odwzorowanie działa na jeden z fotonów pary splątanej opisanej macierzą gęstości $\hat{\rho}$, przekształcona macierz gęstości $\tilde{\rho}$ jest dana przez:

$$\tilde{\rho} = \hat{B}\hat{\rho}\hat{B}^{\dagger}, \qquad (1.41)$$

gdzie $\tilde{\hat{B}} = \hat{L} \otimes \mathbb{1}$.

Korzystając z (1.40) i (1.41) możemy zapisać macierze $\tilde{\rho}_k$ jako $\tilde{\rho}_k = \tilde{B}_k \hat{\rho} \tilde{B}_k^{\dagger}$, a działanie odwzorowania na stan $\hat{\rho}$ jako:

$$\hat{\rho}' = \sum_{k=0}^{3} a_k \tilde{\hat{B}}_k \hat{\rho} \tilde{\hat{B}}_k^{\dagger} = \sum_{k=0}^{3} \hat{B}_k \hat{\rho} \hat{B}_k^{\dagger}, \qquad (1.42)$$

gdzie $\hat{B}_k = a_k \hat{B}_k$. Operatory, których reprezentacją są macierze \hat{B}_k są przykładem operatorów Krausa [29]. Należy podkreślić, że jest to jedynie jeden z wielu możliwych wyborów operatorów Krausa; w ogólności operatory Krausa nie muszą być unitarne. W szczególności, dla odwzorowania diagonalnego obroty \mathbf{R}_i są po prostu obrotami wokół osi układu współrzędnych – odpowiadające im macierze Jonesa \hat{L} to macierze Pauliego. Działanie odwzorowania diagonalnego można zatem zapisać w prosty sposób jako:

$$\hat{\rho}' = \sum_{k=0}^{3} a_k (\hat{\sigma}_k \otimes \mathbb{1}) \hat{\rho} (\hat{\sigma}_k \otimes \mathbb{1}).$$
(1.43)

Na podstawie rozkładu (1.42) można podzielić odwzorowania na 4 klasy, w zależności od tego, ile z czterech parametrów a_k jest różnych od zera:

- 1. Jeśli tylko jeden z nich jest niezerowy, w oczywisty sposób mamy do czynienia z odwzorowaniem unitarnym.
- 2. W przypadku dwóch parametrów niezerowych, odwzorowanie jest mieszaniną dwóch odwzorowań unitarnych. Ponieważ na czworościanie \mathcal{G} odwzorowaniom takim odpowiadają punkty położone na jednej z krawędzi, ich działanie w dalszej części pracy określane jako depolaryzacja jednowymiarowa.
- 3. W przypadku trzech a_k różnych od zera, odwzorowanie jest mieszaniną trzech odwzorowań unitarnych. Na czworościanie odpowiadają takim odwzorowaniom punkty na dwuwymiarowych powierzchniach ścian bocznych – a więc jest to depolaryzacja dwuwymiarowa.
- 4. W przypadku wszystkich $a_k \neq 0$ mamy do czynienia z depolaryzacją trójwymiarową: odwzorowania są mieszaninami czterech odwzorowań unitarnych i odpowiadają im punkty we wnętrzu czworościanu.

W punktach 3 i 4 można wyróżnić szczególny przypadek depolaryzacji – depolaryzację symetryczną. Odwzorowanie dokonuje symetrycznej depolaryzacji, gdy współczynniki a_1 i a_2 (oraz a_3 w przypadku trójwymiarowym) są sobie równe.

Seria odwzorowań, dla których stosunek $a_1: a_2: a_3$ jest stały, wyznacza linię prostą w czworościanie \mathcal{G} .

1.5 Izomorfizm Jamiołkowskiego

Nietrudno zauważyć, że omówiona w 1.2 struktura odwzorowań całkowicie dodatnich oraz przedstawiona w części 1.1.3 struktura stanów dwufotonowych są analogiczne. Jest to przejaw izomorfizmu odkrytego przez prof. A. Jamiołkowskiego [22]. Izomorfizm ten w ogólnym przypadku zachodzi pomiędzy odwzorowaniami całkowicie dodatnimi działającymi na stany mieszane opisane macierzami gęstości działającymi w N-wymiarowej przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_N , oraz dodatnio określonymi operatorami na przestrzeni iloczynowej $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_N$ (macierzami gęstości) [28]. W szczególności, odwzorowaniom unitarnym odpowiadają macierze gęstości stanów czystych, odwzorowaniom depolaryzującym – macierze stanów mieszanych. Stanom o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach odpowiadają odwzorowania unitalne. Dla stanów dwufotonowych macierzom Pauliego (i identyczności) odpowiadają stany Bella.

Poniżej przedstawionych zostaną dwa proste przykłady izomorfizmu Jamiołkowskiego.

1.5.1 Stan singletowy

W tej części pokazana zostanie pełna równoważność unitalnych odwzorowań całkowicie dodatnich działających na pojedynczy foton i stanów, na które odwzorowania te przeprowadzają stan Bella $|\Psi^-\rangle$, czyli tzw. stan singletowy.

Niech stan jednego z fotonów pary splątanej będzie dany macierzą gęstości:

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \qquad (1.44)$$

gdzie **r** jest wektorem Blocha. Działanie odwzorowania unitalnego S na macierz $\hat{\rho}_A$ jest określone przez [por. (1.27)]:

$$S(\hat{\rho}_A) = \frac{1}{2} [\mathbb{1} + (\mathcal{T}\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\sigma}}]. \qquad (1.45)$$

Stan $|\Psi^{-}\rangle$ jest opisany macierzą gęstości:

$$\hat{\rho} = |\Psi^{-}\rangle \langle \Psi^{-}| = \frac{1}{4} \Big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sum_{i=1}^{3} \hat{\sigma}_{i} \otimes \hat{\sigma}_{i} \Big).$$
(1.46)

Zastosowanie przekształcenia *S* do jednego z fotonów splątanej pary $|\Psi^-\rangle$ oznacza zastosowanie w stosunku do całej pary odwzorowania $S \otimes \mathbb{1}$. Aby znaleźć macierz przekształconego stanu, sprawdźmy, jak *S* działa na stan $\hat{\rho}_j = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\sigma}_j) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$, gdzie $\hat{\mathbf{e}}_j$ jest wersorem bazowym:

$$S(\hat{\rho}) = \frac{1}{2} \Big[\mathbb{1} + (\mathcal{T}\hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \Big] = \frac{1}{2} \Big(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} \mathcal{T}_{ij} \hat{\sigma}_i \Big).$$
(1.47)

Na podstawie powyższego stwierdzamy, że działanie S polega na zastąpieniu macierzy $\hat{\sigma}_j$ przez macierz $\hat{\sigma}'_j$:

$$\hat{\sigma}_j' = \sum_{i=1}^3 \mathcal{T}_{ij} \hat{\sigma}_i. \tag{1.48}$$

A zatem, w działaniu na stan $|\Psi^{-}\rangle$ odwzorowanie $S \otimes \mathbb{1}$ daje:

$$\hat{\rho}' = (S \otimes \mathbb{1})(\hat{\rho}) = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sum_{i,j=1}^{3} \mathcal{T}_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \right).$$
(1.49)

Porównując (1.49) z (1.15) stwierdzamy, że w wyniku działania odwzorowania S określonego macierzą \mathcal{T} na jeden z fotonów stanu $|\Psi^{-}\rangle$ otrzymujemy stan $\hat{\rho}'$ opisany macierzą $\mathbf{T} = -\mathcal{T}$. Ponieważ $\hat{\rho}'$ jest stanem o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach, macierz \mathbf{T} w pełni charakteryzuje ten stan.

Ponieważ przyporządkowanie $\mathbf{T} = -\mathcal{T}$ jest jednoznaczne, rozumowanie można odwrócić: dowolnemu stanowi o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach opisanego macierzą \mathbf{T} można jednoznacznie przypisać odwzorowanie całkowicie dodatnie S określone przez macierz $\mathcal{T} = -\mathbf{T}$. Dowodzi to izomorfizmu odwzorowań całkowicie dodatnich ze stanu $|\Psi^{-}\rangle$ i stanów dwufotonowych o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach.

Korzystając z opisanego izomorfizmu, omówmy fizyczną interpretację elipsoidy odpowiadającej macierzy \mathbf{T} stanu dwufotonowego. Każdemu stanowi dwufotonowemu można przyporządkować odwzorowanie całkowicie dodatnie S, określone macierzą $\mathcal{T} = -\mathbf{T}$, przeprowadzające stan singletowy w dany stan dwufotonowy. S działa tylko na jeden foton pary. Pojedynczy foton jest w stanie całkowicie mieszanym, będącym równomierną statystyczną mieszaniną wszystkich stanów polaryzacji. W reprezentacji sfery Blocha możemy zatem przedstawić ten stan jako zbiór wszystkich punktów leżące na sferze, gdyż ich uśrednienie daje właśnie stan całkowicie mieszany. Zgodnie z opisem w części 1.2, odwzorowanie S powoduje obrót sfery Blocha, jej ściśnięcie do elipsoidy i kolejny obrót. Ze względu na izomorfizm Jamiołkowskiego, przyporządkowanie S (a więc i odpowiadającej mu elipsoidy) i \mathbf{T} jest jednoznaczne; otrzymujemy w ten sposób fizyczną interpretację elipsoidy odpowiadającej macierzy \mathbf{T} stanu dwufotonowego.

1.5.2 Dowolny stan o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach

Pokażmy teraz, jak odwzorowanie $S \otimes \mathbb{1}$, gdzie S jest określone macierzą \mathcal{T} , działa na dowolny stan $\hat{\rho}$ o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \Big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \Big).$$
(1.50)

Korzystając z (1.48) otrzymujemy:

$$\hat{\rho}' = (S \otimes \mathbb{1})(\hat{\rho}) = \frac{1}{4} \Big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^{3} T'_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \Big), \tag{1.51}$$

gdzie macierz \mathbf{T}' jest postaci:

$$\mathbf{T}' = \mathcal{T}\mathbf{T}.\tag{1.52}$$

Ponieważ przyporządkowanie (1.52) dla ustalonego **T** jest jednoznaczne, pokazaliśmy, że każdemu odwzorowaniu *S* działającemu na jeden z podukładów stanu $\hat{\rho}$ można przyporządkować jednoznacznie stan $\hat{\rho}' = (S \otimes \mathbb{1})(\hat{\rho})$ określony macierzą $\mathcal{T}\mathbf{T}$.

Równość (1.52) można odwrócić, mnożąc ją prawostronnie przez \mathbf{T}^{-1} :

$$\mathcal{T} = \mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}.\tag{1.53}$$

Warunkiem dokonania tego przekształcenia jest nieosobliwość macierzy **T**. Rozłóżmy **T** na wartości osobliwe (1.36): $\mathbf{T} = \mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^T$. Warunkiem odwracalności **T** jest det $\mathbf{T} \neq 0$. Korzystając z podstawowych własności wyznacznika, możemy zapisać:

$$\det \mathbf{T} \neq 0 \Leftrightarrow (\det \mathbf{U})(\det \mathbf{\Delta})(\det \mathbf{V}) \neq 0.$$
(1.54)

Macierze U i V są, zgodnie z definicją rozkładu na wartości osobliwe, macierzami unitarnymi należącymi do grupy O(3) [27]. Ponieważ wyznacznik macierzy $\in O(3)$ jest równy ±1, warunek (1.54) nie będzie spełniony jedynie dla det $\Delta = 0$. Wynika z tego, że aby istniała relacja odwrotna postaci (1.53), macierz diagonalna Δ nie może mieć zerowych elementów na diagonali. Stanom $\hat{\rho}'$, którym odpowiada taka macierz Δ (stany te w reprezentacji czworościanu \mathcal{F} leżą poza płaszczyznami $T_{11}T_{22}, T_{11}T_{33}$ i $T_{22}T_{33}$, rys. 1.2), można za pomocą równania (1.53) jednoznacznie przyporządkować odwzorowanie całkowicie dodatnie, które w wyniku działania na jeden z podukładów układu w stanie $\hat{\rho}$ da stan $\hat{\rho}'$.

1.6 Wielkości pochodne macierzy gęstości

W tej części przedstawione zostaną sposoby wyznaczenia, na podstawie eksperymentalnie zrekonstruowanych macierzy gęstości, wielkości omówionych w poprzednich częściach: macierzy **T** stanu dwufotonowego, macierzy **T** odwzorowania całkowicie dodatniego i parametrów tłumienia $D_{\{11,22,33\}}$ oraz $\Delta_{\{11,22,33\}}$ odpowiadających tym macierzom. Dodatkowo omówione zostaną wielkości charakteryzujące stan dwufotonowy, mianowicie entropia (określająca czystość stanu) oraz miary stopnia splątania: współbieżność C (ang. *concurrence*) oraz splątanie T (ang. *tangle*)⁶.

1.6.1 Macierz T stanu dwufotonowego

W wyniku pomiarów opisanych w rozdziale 3, otrzymywano oszacowania macierzy gęstości stanu dwufotonowego. Aby realizować przekształcenia stanów o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach, należało zweryfikować, czy źródło par splątanych rzeczywiście generowało takie stany. Dla każdej zmierzonej macierzy gęstości $\hat{\rho}_M$ sprawdzano, czy rzeczywiście odpowiada ona stanowi o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach. W tym celu wyznaczano macierze gęstości pojedynczych fotonów, obliczając, zgodnie z (1.12), ślady częściowe $\text{Tr}_A \hat{\rho}_M$ oraz $\text{Tr}_B \hat{\rho}_M$ i sprawdzano, czy macierze te, w granicach błędu pomiarowego, są równe macierzom opisującym stan całkowicie zdepolaryzowany, czyli $\frac{1}{2}$ 1.

Stwierdziwszy, że mamy do czynienia z macierzą opisującą stan o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach, przystąpmy do wyznaczenia macierzy \mathbf{T} odpowiadającej $\hat{\rho}_M$ [20]. Macierz $\hat{\rho}_M$ wyraża się następująco przez elementy \mathbf{T} :

$$\hat{\rho}_M = \frac{1}{4} \Big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \Big).$$
(1.55)

Pomnóżmy $\hat{\rho}_M$ przez $\hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l$, pamiętając, że dla macierzy Pauliego zachodzi $\hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{1}, i = 1, 2, 3$:

$$\hat{\rho}_M \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l = \frac{1}{4} \Big[\hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l + \sum_{(i,j) \neq (k,l)} T_{ij}(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k) \otimes (\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_l) + T_{kl} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \Big].$$
(1.56)

Weźmy teraz ślad powyższego wyrażenia. Ponieważ iloczyny macierzy Pauliego spełniają: $\text{Tr}(\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) = \delta_{ij}$ (gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera), otrzymujemy:

$$\operatorname{Tr}(\hat{\rho}_M \hat{\sigma}_k \otimes \hat{\sigma}_l) = T_{kl}. \tag{1.57}$$

Jest to szukane wyrażenie na elementy macierzy **T**.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia parametrów tłumienia stanu ρ_M , czyli elementów macierzy diagonalnej $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$. Zgodnie z (1.18) macierz \mathbf{T} można rozłożyć na macierz obrotu \mathbf{U} , macierz diagonalną $\mathbf{D} \in \mathcal{D}$ i kolejną macierz obrotu \mathbf{V} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T,\tag{1.58}$$

 $^{^6}$ Wielkość ta, według mojej wiedzy, nie posiada jeszcze utrwalonej w literaturze polskiej nazwy; w niniejszej pracy będę ją określał po prostu nazwą "splątanie", ewentualnie "splątanie T", w przypadkach mogących prowadzić do niejednoznaczności.

rozkładając ją na wartości osobliwe, por. część 1.3. Parametrami tłumienia są elementy diagonalnej macierzy \mathbf{D} .

1.6.2 Macierz \mathcal{T} odwzorowania

Rekonstrukcja macierzy \mathcal{T} jest kluczowym elementem wykonania tomografii procesu kwantowego (QPT), gdyż \mathcal{T} w pełni charakteryzuje odwzorowanie unitalne. Macierz \mathcal{T} unitalnego odwzorowania całkowicie dodatniego S była wyznaczana na podstawie dwóch zmierzonych macierzy gęstości: macierzy $\hat{\rho}_0$ wyjściowego (nieprzekształconego) stanu oraz macierzy $\hat{\rho}_S$ stanu poddanego działaniu $S \otimes \mathbb{1}$. O unitalności odwzorowania świadczył fakt, że odwzorowanie w działaniu na stan o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach daje również stan o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach. Korzystając z (1.57), z łatwością można wyznaczyć macierze \mathbf{T}_0 i \mathbf{T}_S odpowiadające tym dwóm stanom. Korzystając z (1.53) można na podstawie macierzy \mathbf{T}_0 i \mathbf{T}_S wyznaczyć macierz odwzorowania: $\mathcal{T} = \mathbf{T}_S \mathbf{T}_0^{-1}$.

Warunkiem zastosowania (1.53) jest nieosobliwość macierzy \mathbf{T}_0 – warunek ten był zawsze spełniony, gdyż jako stan $\hat{\rho}_0$ stosowany był stan bliski stanowi Bella $|\Phi^+\rangle$ o parametrach tłumienia bliskich jedności.

Macierze parametrów tłumienia Δ odpowiadające \mathcal{T} wyznacza się tak samo jak w przypadku macierzy \mathbf{T} stanu dwufotonowego, stosując jedynie podczas modyfikowania rozkładu na wartości osobliwe w miejscu macierzy \mathbf{K} macierz \mathbf{J} , gdyż det $\mathcal{T} \ge 0$.

1.6.3 Entropia

Podstawową miarą czystości stanu kwantowego jest entropia von Neumanna S^7 . W sensie kwantowoinformatycznym jest ona również miarą informacji niesionej przez stan. Jako miara czystości S jest uogólnieniem stopnia polaryzacji stanów jednofotonowych. W drugim znaczeniu jest uogólnieniem entropii Shannona znanej z klasycznej teorii informacji [3].

Entropia von Neumanna stanu dwufotonowego opisanego macierzą gęstości $\hat{\rho}$ jest zdefiniowana jako [3]:

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}). \tag{1.59}$$

S bardzo wygodnie wyraża się przez wartości własne $\{\lambda_i\}, i = 1, 2, 3, 4$ macierzy $\hat{\rho}$:

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \log_2 \lambda_i, \qquad (1.60)$$

 $^{^{7}}$ W tym podrozdziałe S nie oznacza odwzorowania całkowicie dodatniego

gdzie przyjmuje się, że $0 \log_2 0 = 0$.

Entropia von Neumanna przyjmuje wartości rzeczywiste z przedziału [0, 2], przy czym wartość 0 odpowiada stanom czystym, a wartość 2 – stanowi całkowicie mieszanemu.

Wadą entropii von Neumanna jest jej niewygodna analitycznie postać – funkcja $x \log_2 x$ jest rozbieżna przy $x \to 0$. Dlatego jako miara czystości stanu zastosowana zostanie entropia liniowa S_L (ang. *linear entropy*). Wielkość ta nie ma bezpośredniego związku z teorią informacji, ale za to posiada wygodną analitycznie postać. Znormalizowana tak, by jej wartość leżała w przedziale [0, 1], entropia liniowa dana jest przez [11]:

$$S_L = \frac{4}{3} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2)].$$
 (1.61)

Podobnie, jak w przypadku entropii von Neumanna, można ją wyrazić przez wartości własne macierzy gęstości:

$$S_L = \frac{4}{3} \left(1 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 \right). \tag{1.62}$$

1.6.4 Miary splątania

Współbieżność⁸ C jest jedną z miar stopnia splątania stanu dwufotonowego $\hat{\rho}$ [30]. Aby zdefiniować współbieżność wyznaczmy najpierw niehermitowską macierz **R** [11]:

$$\hat{R} = \hat{\rho} \hat{\Sigma} \hat{\rho}^T \hat{\Sigma}, \qquad (1.63)$$

gdzie macier
z $\hat{\Sigma}$ w bazie $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ wyraża się jako:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(1.64)

Niech $\{r_i\}, i = 1, 2, 3, 4$ będą wartościami własnymi \hat{R} , uporządkowanymi malejąco: $r_1 \ge r_2 \ge r_3 \ge r_4$. Współbieżność zdefiniowana jest jako:

$$C = \max\left(0, \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} - \sqrt{r_4}\right). \tag{1.65}$$

Jak widać obliczenie współbieżności polega na odjęciu od pierwiastka kwadratowego największej wartości własnej pierwiastków pozostałych trzech wartości. Jeśli największa wartość własna jest na tyle duża, by "przeważyć" nad

⁸W literaturze polskiej spotykana jest też nazwa "zgodność".

pozostałymi na tyle, by różnica pozostała dodatnia, stan jest splątany, a C > 0. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia ze stanem separowalnym.

Podsumowując, współbieżność przyjmuje wartości z przedziału [0,1] - 0 dla stanów separowalnych, 1 dla stanów maksymalnie splątanych (np. dla stanów Bella).

Znając współbieżność z łatwością można wyliczyć splątanie T, zdefiniowane jako:

$$T = C^2. \tag{1.66}$$

Istnieje jeszcze trzecia miara splątania, mianowicie splątanie tworzenia⁹ E (ang. *entanglement of formation*), które również jest funkcją współbieżności:

$$E = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right), \tag{1.67}$$

gdzie $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$. Ponieważ zarówno $h\left((1 + \sqrt{1-x^2})/2\right)$ jak i funkcja kwadratowa są monotonicznie rosnące na zbiorze liczb nieujemnych, wszystkie trzy przedstawione miary są sobie równoważne w sensie uporządkowania, jakie wprowadzają w zbiorze stanów dwufotonowych.

⁹Świadomie nie posłużyłem się w tym miejscu nazwą "splątanie formowania" zalecaną przez Komisję Nazewnictwa Fizycznego PTF. Chciałbym w ten sposób zwrócić uwagę, że nazwa ta jest niespójna z dotychczasowym nazewnictwem. Istnieje szereg wielkości termodynamicznych określanych po angielsku członem *of formation*, który na język polski tłumaczony jest jako "tworzenia": entropia tworzenia, entalpia tworzenia itd. Określenia typu "entropia formacji" w stosunku do tych wielkości nie są spotykane. Proponuję, by, przez analogię do tych utrwalonych już nazw, *entanglement of formation* tłumaczyć na język polski jako "splątanie tworzenia".

Rozdział 2

Źródło splątanych par fotonów

Treścią rozdziału będzie omówienie podstawowego elementu układu doświadczalnego, mianowicie źródła polaryzacyjnie splątanych par fotonów. Pierwsza część zawiera opis źródła par fotonów o dużej jasności. Za pomocą tego źródła nie było możliwe uzyskanie par fotonów splątanych w dużym stopniu, czego przyczyny zostały wyjaśnione w części drugiej. W części trzeciej omówione zostały parametry ostatecznie zastosowanego źródła o mniejszej jasności, ale dającego pary fotonów o wysokim stopniu splątania.

Aby uczynić tekst bardziej zwięzłym, w dalszej części pracy zamiast określenia "polaryzacyjnie splątane pary fotonów", stosowane będzie określenie "pary splątane".

2.1 Źródło o dużej jasności

2.1.1 Wprowadzenie

Pary splątane wytwarzane były w procesie spontanicznej fluorescencji parametrycznej [31] pierwszego typu w dwóch kryształach β -boranu baru (BBO, β -BaB₂O₄) [8] [9].

W pojedynczym krysztale BBO w procesie fluorescencji parametrycznej pierwszego typu z jednego fotonu wiązki pompującej o polaryzacji promienia nadzwyczajnego wytwarzana jest para fotonów, których suma częstości i suma wektorów falowych jest równa, odpowiednio, częstości i wektorowi falowemu fotonu pompującego (rys. 2.1a). Zachowanie sumy wektorów falowych w tym procesie wynika bezpośrednio z zasady zachowania pędu; warunek ten jest nazywany warunkiem dopasowania fazowego. Wynika z niego, że fotony o określonej częstości emitowane będą w kierunkach opisywanych przez stożek o wierzchołku wewnątrz kryształu BBO (rys. 2.1b). W szczególności, możliwe



Rys. 2.1: Fluorescencja parametryczna. a) warunek dopasowania fazowego; b) fluorescencja z jednego kryształu, pary fotonów oznaczone są jednakowym symbolem; c) stożki wytwarzane przez 2 kryształy.

jest wytworzenie pary fotonów o identycznych częstościach, równych połowie częstości wiązki pompującej, tzw. zdegenerowanej pary fotonów, która na rys. 2.1 jest parą środkową. Fotony wytworzone w procesie fluorescencji parametrycznej pierwszego typu są jednakowo spolaryzowane: oba mają polaryzację promienia zwyczajnego. Stan polaryzacji zdegenerowanej pary możemy zatem opisać jako:

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, \tag{2.1}$$

gdzie przez $|0\rangle^1$ oznaczony został stan o polaryzacji promienia zwyczajnego w krysztale BBO.

Analogicznie, w kryształe BBO o osi optycznej obróconej o 90° względem osi pierwszego kryształu i pompowanej wiązką o polaryzacji również obróconej o 90° wytwarzane będą zdegenerowane pary w stanie:

$$|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B. \tag{2.2}$$

Przez $|1\rangle$ oznaczono stan o polaryzacji liniowej prostopadłej do $|0\rangle$.

Jeśli oba kryształy BBO będą dostatecznie cienkie i umieszczone zostaną bezpośrednio jeden za drugim, natomiast wiązka pompująca spolaryzowana będzie pod kątem 45° względem polaryzacji $|0\rangle$ (dzięki czemu w jednakowym stopniu pompowane będą obydwa kryształy), zdegenerowane fotony z

 $^{^1}$ Należy podkreślić, że użyte oznaczenie stanu polaryzacji $|0\rangle$ nie ma żadnego związku z oznaczeniem kwantowego stanu próżni.

pierwszego i drugiego kryształu będą z dobrym przybliżeniem emitowane w ten sam mod przestrzenny (rys. 2.1c), a zatem ich stan można będzie opisać przez:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + e^{i\varphi} |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + e^{i\varphi} |11\rangle), \qquad (2.3)$$

Pomiędzy stanami $|00\rangle$ i $|11\rangle$ pojawia się przesunięcie fazowe φ , ponieważ, ze względu na dwójłomność kryształów BBO, fotony o polaryzacji poziomej przebywają w kryształach inną drogę optyczną niż fotony spolaryzowane pionowo. Przesunięcie to można skompensować umieszczając przed kryształami odpowiedni kompensator fazy [9]. Po skompensowaniu przesunięcia φ stan pary fotonów staje się jednym ze stanów maksymalnie splątanych, czyli jednym ze stanów Bella:

$$|\Phi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$
 (2.4)

2.1.2 Źródło

Schemat konstrukcji zastosowanego źródła par splątanych przedstawiony został na rys. 2.2. Wiązka pompująca kryształy BBO (X2 oraz X3) wytwarzana była w procesie generacji drugiej harmonicznej impulsów oscylatora femtosekundowego. Generacja drugiej harmonicznej zachodziła w krysztale BBO grubości 1 mm (X1). Długość fali drugiej harmonicznej wynosiła $\lambda =$ 390,5 nm, szerokość połówkowa widma 11 nm (FWHM). Źródłem światła był oscylator femtosekundowy na krysztale szafiru domieszkowanego tytanem, pompowany laserem neodymowym. Moc wyjściowa oscylatora wynosiła ok. 250 mW, wytwarzane impulsy miały długość 40 fs, centralną długość fali 781 nm i widmo o szerokości połówkowej ok. 15 nm (FWHM). Częstość powtarzania impulsów wynosiła 78 MHz. Oscylator skonstruowany został w Laboratorium Procesów Ultraszybkich IFD UW.

Za pomocą dwóch zwierciadeł dichroicznych (DM1, DM2) oraz filtra barwnego (F3) niebieska wiązka² drugiej harmonicznej oddzielana była od czerwonej wiązki pompującej kryształ X1. Za pomocą soczewki L2 wiązka niebieska ogniskowana była na kryształach BBO. Osie optyczne kryształów umieszczone były prostopadle względem siebie, pod kątem 45° do płaszczyzny stołu optycznego. Za pomocą płytki półfalowej H3 uzyskiwana była pionowa polaryzacja wiązki pompującej. Kompensator Babineta BC służył do skompensowania przesunięcia fazowego φ pomiędzy fotonami generowanymi w pierwszym i drugim kryształe.

 $^{^2 \}rm W$ dalszej części tekstu przez wiązkę niebieską będzie rozumiana wiązka o długości fali bliskiej 390 nm, a przez wiązkę czerwoną – o długości bliskiej 780 nm.
Po przejściu przez kryształy wiązka pompująca była pochłaniana, natomiast wiązki fotonów wytworzone w procesie fluorescencji parametrycznej zbierane były do światłowodów jednomodowych i kierowane do liczników pojedynczych fotonów (Perkin-Elmer, Kanada). Aby zbierać pary fotonów pod możliwie małym kątem, wiązki odbijane były przez zwierciadła dielektryczne. Po przejściu przez płytki półfalowe i kostki polaryzujące oraz przez czerwone filtry barwne wiązki ogniskowane były na końcówkach światłowodów za pomocą soczewek asferycznych o ogniskowej 11 mm.

Impulsy odpowiadające zliczonym fotonom kierowane były z liczników SPCM do elektronicznego układu zliczającego koincydencje (tzn. jednoczesne – z dokładnością do 2 ns – zarejestrowanie impulsów przez oba detektory). Sygnał koincydencji, jak również pojedynczych zliczeń z obydwu detektorów, zliczany był za pomocą licznika karty PCI-6602 (National Instruments, USA) i analizowany przez komputer.

2.1.3 Optymalizacja

W tej części omówiony zostanie szczegółowo sposób optymalizacji ustawienia poszczególnych elementów układu. Optymalizacja dokonywana była w oparciu o teoretyczną analizę A. Dragana [10].

Aby opis był możliwie zwięzły i przejrzysty, sprecyzowane zostanie teraz kilka pojęć przydatnych podczas omawiania procedur optymalizacyjnych. Przez obrót elementu optycznego rozumiany będzie obrót wokół osi optycznej układu. Przez pochylenie w pionie – obrót elementu wokół osi poziomej prostopadłej do osi optycznej. Przez pochylenie w poziomie – obrót wokół osi pionowej prostopadłej do osi optycznej. Kąty obrotu, jeśli nie zaznaczono inaczej, liczone będą w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, od powierzchni stołu optycznego, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, patrząc w kierunku biegu wiązki. Kierunek osi z oznacza kierunek równoległy do osi optycznej układu, kierunek x – kierunek prostopadły do osi optycznej, a równoległy do powierzchni stołu, kierunek y – kierunek prostopadły do dwóch pozostałych.

Generacja drugiej harmonicznej zachodziła w krysztale X1 (1 mm BBO). Kryształ został obrócony tak, by jego oś optyczna była prostopadła do polaryzacji wiązki z oscylatora. Kryształ umieszczony został na stoliku przesuwnym w kierunku z. Optymalizacja ustawienia kryształu polegała na maksymalizacji mocy generowanej drugiej harmonicznej. W tym celu za pomocą przesuwu kryształ umieszczany był dokładnie w ognisku wytwarzanym przez soczewkę L1 o ogniskowej 50 mm. Następnie kryształ był pochylany w kierunku pionowym, aż do uzyskania maksimum natężenia wiązki niebieskiej. Ponieważ oscylator został przestrojony tak, by centralna długość fali impulsów wynosiła 781 nm, w maksimum natężenia drugiej harmonicznej centralna



Rys. 2.2: Źródło par splątanych. X1, X2, X3 – kryształy BBO; BC – kompensator Babineta; H1, H2, H3 – płytki półfalowe; PBS1, PBS2 – kostki polaryzujące; M1, M2 – zwierciadła dielektryczne; DM1, DM2 – zwierciadła dichroiczne; F1, F2, F3 – filtry barwne; L1, L2 – soczewki; AL1, AL2 – soczewki asferyczne; SPCM1, SPCM2 – liczniki pojedynczych fotonów; & – układ koincydencyjny; PC – komputer.

długość fali wiązki niebieskiej wynosiła 390,5 nm. Moc wiązki niebieskiej wynosiła 18 mW.

Zgodnie z pracą [10], ze względu na to, by generacja par fotonów fluorescencji parametrycznej zachodziła symetrycznie względem osi optycznej układu, osie optyczne kryształów powinny być skierowane pod kątem odpowiednio 45° oraz 135° (w płaszczyźnie xy). Dodatkowo, osie optyczne obu kryształów powinny być swoimi zwierciadlanymi odbiciami względem płaszczyzny xz. Zastosowane ustawienie osi optycznych przedstawione zostało na rys. 2.3.

Osie kryształów orientowane były w dwóch etapach. Na początku ustalony został kąt pochylenia osi optycznej (oznaczany często przez θ i nazywany kątem wycięcia). W tym celu obserwowane było widmo drugiej harmonicznej generowanej w krysztale przy prostopadłym padaniu wiązki laserowej 780 nm. Na podstawie długości fali wiązki pompującej i długości fali drugiej harmonicznej oraz wzorów Sellmeiera dla BBO, w prosty sposób można wyznaczyć wartość kąta θ . Metodą tą nie da się jednak odróżnić osi pochylonej pod kątem θ od osi pod kątem $\pi - \theta$. Aby odróżnić te dwa ustawienia, obserwowany był kierunek zmian długości fali drugiej harmonicznej przy pochylaniu kryształu. Stwierdzono, że dla obydwu kryształów $\theta = 30^{\circ} \pm 0.02^{\circ}$. Dodatkowo na podstawie maksimum natężenia drugiej harmonicznej ustalono w przybliżeniu kąt obrotu osi optycznej φ .

Precyzyjne ustawienie osi optycznych pod kątem, odpowiednio, 45° i 135° względem płaszczyzny stołu oraz 90° względem siebie (w płaszczyźnie *xy*) uzyskane zostało poprzez umieszczenie kryształów pomiędzy parą skrzyżowanych polaryzatorów. Kryształy były obracane aż do uzyskania minimum natężenia światła za drugim polaryzatorem. Ponieważ minimum natężenia występowałoby także dla równoległego ustawienia osi optycznych, położenie osi ustalono wstępnie na podstawie obserwacji wydajności generacji drugiej harmonicznej.

Tą samą metodą ustawione zostały płytka półfalowa H3 (tak, by za płytką wiązka niebieska była spolaryzowana pio-



Rys. 2.3: Ustawienie osi optycznych (pogrubione linie ciągłe) kryształów BBO. Zaznaczono również kąt wycięcia θ i kąt obrotu osi optycznej φ .

nowo) oraz kompensator Babineta. Kompensator złożony był z dwóch klinów z kwarcu krystalicznego, z których jeden mógł być przesuwany względem drugiego. Aby kliny wprowadzały opóźnienie pomiędzy promieniami zwyczajnym i nadzwyczajnym w kryształach BBO, kompensator został obrócony tak, by osie – szybka i wolna – klinów były skierowane odpowiednio prostopadle lub równolegle do osi szybkich i wolnych kryształów (czyli pod kątem 45°).

Z pracy [10] wynika, że aby zebrać jak największą liczbę par fotonów z procesu fluorescencji parametrycznej powinny być spełnione następujące warunki: (1) wiązka pompująca i wiązki fotonów fluorescencji muszą leżeć w jednej płaszczyźnie; (2) kąt pomiędzy wiązką pompującą a wiązką fotonów fluorescencji powinien być możliwie najmniejszy; (3) dla kryształu grubości 1 mm wiązka pompująca powinna być zogniskowana do $w_0 \approx 50 \ \mu m \ (w_0$ – promień wiązki gaussowskiej w przewężeniu). Ze względów technicznych przyjęto, że mod, w którym zbierane są fotony fluorescencji (zdefiniowany przez elementy optyczne kierujące fotony do światłowodu) będzie mieć na powierzchni kryształu przewężenie o $w_0 \approx 100 \ \mu m \ (wg \ [10] \ w_0$ powinno być mniejsze).

Do zogniskowania wiązki niebieskiej na kryształach BBO użyta została

soczewka o ogniskowej 150 mm (L2). Ognisko znajdowało się na tyle daleko od soczewki (45 cm), by możliwe było umieszczenie pomiędzy soczewką L2 a kryształami X2 i X3 pozostałych elementów optycznych. Parametr w_0 wiązki zmierzony w ognisku metodą ostrzową wyniósł $w_0 = 60 \ \mu m$ w kierunku poziomym oraz $w'_0 = 40 \ \mu m$ w kierunku pionowym. Wiązka pompująca była eliptyczna, ze względu na dryf (ang. *walk-off*) w krysztale drugiej harmonicznej. Soczewka L2 umieszczona była na stoliku przesuwnym w kierunku osi z tak, by możliwa była późniejsza precyzyjna regulacja położenia ogniska. Zasięg Rayleigha wiązki pompującej miał długość ok. 40 mm, co oznacza, że obydwa kryształy znajdowały się w obszarze, w którym wiązka była dobrze skolimowana. Kryształy zostały umieszczone w ognisku, ze szczególnym zwróceniem uwagi na ich prostopadłe ustawienie względem wiązki pompującej.

Kolejnym krokiem było wyznaczenie odległości pomiędzy kryształami a soczewkami AL1 i AL2. Soczewki oraz końcówki światłowodów umieszczone były na stolikach przesuwnych z regulacją 4 stopni swobody: (1) odległości pomiędzy soczewką a końcówką światłowodu, (2) przesuwu całego stolika (wraz z soczewką) w kierunku osi x oraz (3)(4) przesuwu końcówki światłowodu w kierunkach x i y (w efekcie, po uwzględnieniu działania soczewki, oznacza to regulację kierunku, z którego zbierane są fotony). Podczas optymalizacji układu od tyłu do światłowodów wprowadzana była wiązka lasera o długości fali 780 nm. Na podstawie pomiaru promienia wiązki opuszczającej światłowód metodą ostrzową stwierdzone zostało, że ognisko o $w_0 = 98 \ \mu m$ znajduje się w odległości 62 cm od soczewki asferycznej.

Kąt α , pod którym zbierane były fotony, czyli kąt pomiędzy wiązką pompującą a zbieraną wiązką fotonów fluorescencji parametrycznej, określony został przez geometrię układu. Ze względu na ograniczenia przestrzenne, tj. konieczność późniejszego umieszczenia dodatkowych elementów pomiędzy zwierciadłami dielektrycznymi a soczewkami asferycznymi (por. rys. 2.2), zwierciadła zostały ustawione w odległości 32 cm od soczewek asferycznych, czyli 30 cm kryształów. Minimalna odległość pomiędzy krawędziami zwierciadeł, przy której tylko niewielka część mocno rozbieżnej wiązki pompującej była odbijana, wynosiła 8 mm. Oznacza to, że kąt α nie może być mniejszy niż 15 mrad (0,86°). By umożliwić symetryczne ustawienie zwierciadeł przy jednoczesnym zachowaniu niewielkiej odległości między nimi zastosowano przedstawiony na rys. 2.2 krzyżowy układ wiązek.

Kąt zbierania fotonów α definiuje długość fali, którą należy pompować kryształy BBO (ponieważ od długości fali wiązki pompującej, poprzez warunek dopasowania fazowego, zależy kąt emisji zdegenerowanych par fotonów). Zależność długość fali od kąta α można w prosty sposób obliczyć na podstawie warunku dopasowania fazowego (por. rys. 2.1a) i wzorów Sellmeiera dla BBO. Dla $\alpha = 15$ mrad długość fali wynosi 390,5 nm i, jak wcześniej wspomniano, taka właśnie długość fali wiązki pompującej została zastosowana.

W celu ustawienia końcówek światłowodów tak, by zbierały fotony symetrycznie względem wiązki pompującej pod kątem 15 mrad, w pobliżu zwierciadeł M1 i M2 umieszczony został na stoliku przesuwnym (w kierunku x) niewielki kołowy otwór. Wpuszczając wiązkę lasera od tyłu do światłowodów za pomocą tego otworu wiązki w obydwu ramionach zostały ustawione symetrycznie i pod właściwym kątem. Metoda ta pozwoliła również skontrolować ustawienie wszystkich trzech wiązek w jednej płaszczyźnie.

Ostateczne ustawienie położenia światłowodów i soczewek asferycznych polegało na maksymalizacji liczby zliczeń fotonów fluorescencji parametrycznej (w szczególności koincydencji). Zasadniczo optymalizacja polegała na: (1) regulacji odległości pomiędzy soczewką asferyczną a końcówką światłowodu; (2) optymalizacji położenia zwierciadeł i końcówek światłowodów w kierunku poziomym; (3) optymalizacji w kierunku pionowym. Dodatkowo optymalizowane było położenie kryształu X1 oraz soczewki L2.

Początkowo układ był optymalizowany ze względu na zliczenia tylko z jednego kryształu – płytka półfalowa H3 ustawiona była tak, by pompować tylko jeden kryształ, a płytki H1 i H2 tak, by do detektorów docierały tylko fotony spolaryzowane pod kątem 45° (ew. 135°), a więc tylko fotony generowane w jednym krysztale. Zgodnie z oczekiwaniami, generacja par fotonów zachodziła z dużą wydajnością: liczba pojedynczych zliczeń dochodziła do $400\,000 \text{ s}^{-1}$, a liczba koincydencji do $20\,000 \text{ s}^{-1}$.

Aby uzyskać stan splątany konieczne jest, by liczba koincydencji z jednego kryształu była równa liczbie koincydencji z drugiego kryształu. Po zoptymalizowaniu układu w taki sposób, by liczby te były równe, konieczne jest zweryfikowanie, czy uzyskany stan pary fotonów rzeczywiście jest stanem splątanym. Sposób weryfikacji omówiony zostanie w części 2.1.4. Jednocześnie omówiona zostanie regulacja przesunięcia fazowego za pomocą kompensatora Babineta.

2.1.4 Pomiar jakości splątania

Zgodnie z krótką analizą przedstawioną w części 2.1.1 ogólna postać stanu pary fotonów generowanej przez omawiane źródło jest dana przez:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + e^{i\varphi}|11\rangle).$$
(2.5)

W zależności od tego, czy za pomocą kompensatora przesunięcie fazowe ustalone zostanie na $\varphi = 0$, czy też $\varphi = \pi$, uzyskamy odpowiednio jeden ze stanów Bella:

$$\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{2.6}$$

lub

$$|\Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \tag{2.7}$$

(warto w tym miejscu przypomnieć, że stan $|0\rangle$ oznacza stan o polaryzacji liniowej pod kątem 45° do powierzchni stołu, a $|1\rangle$ – stan o polaryzacji pod kątem 135°).

Latwo zauważyć, że gdy w obydwu ramionach układu zliczane będą fotony w stanie $|0\rangle$ (lub w obydwu w stanie $|1\rangle$) zaobserwowane zostanie maksimum koincydencji. Z drugiej strony, jeśli w ramieniu 1 zliczane będą fotony w stanie $|0\rangle$, a w ramieniu 2 – w stanie $|1\rangle$ (i vice versa), nie zaobserwujemy (w idealnym przypadku) żadnych koincydencji.

Zastanówmy się teraz, jakie wyniki uzyskamy, wykonując w obydwu ramionach pomiary nie w bazie polaryzacji $|0\rangle - |1\rangle$, tylko w bazie polaryzacji równoległych i prostopadłych do powierzchni stołu optycznego: $|D_+\rangle - |D_-\rangle$, gdzie

$$|D_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle). \tag{2.8}$$

Stany $|\Phi^+\rangle$ i $|\Phi^-\rangle$ zapisane w nowej bazie mają postać:

$$|\Phi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D_{+}D_{+}\rangle + |D_{-}D_{-}\rangle), \qquad (2.9)$$
$$|\Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D_{+}D_{-}\rangle + |D_{-}D_{+}\rangle).$$

Zatem dla stanu $|\Phi^+\rangle$ minimum (a dokładniej zero) koincydencji pojawi się przy pomiarze w obydwu ramionach stanów ortogonalnych względem siebie, natomiast dla stanu $|\Phi^-\rangle$ minimum zaobserwowane zostanie podczas pomiaru tych samych stanów. Warto zauważyć, że dla stanu różniącego się od stanów $|\Phi^{\pm}\rangle$ rejestrowane maksima i minima będą mniej wyraźne.

Z powyższego rozumowania wynika, że w celu ustawienia kompensatora Babineta tak, by uzyskać stan $|\Phi^+\rangle$, płytki półfalowe H1 i H2 należy ustawić w taki sposób, aby w jednym z ramion mierzony był stan o polaryzacji poziomej, a w drugim – stan o polaryzacji pionowej. Przesunięcie fazowe wprowadzane przez kompensator należy regulować aż do uzyskania minimum koincydencji.

Po ustawieniu kompensatora dokonywany był pomiar stopnia splątania pary fotonów: rejestrowana była zależność liczby koincydencji od kąta obrotu jednej z płytek półfalowych (podczas gdy druga była ustawiona tak, by mierzony był stan $|D_+\rangle$ bądź $|D_-\rangle$). Dla stanu w pełni splątanego $|\Phi^+\rangle$ podczas obracania płytki półfalowej liczba koincydencji będzie rosnąć od zera



Rys. 2.4: Rzut wiązek na płaszczyznę xy po przejściu a) przez pierwszy kryształ, b) przez drugi kryształ. Wiązkę fotonów generowanych w pierwszym kryształe oznaczono liczbą 1. Kropką zaznaczono środek wiązki. Zaniedbano eliptyczność wiązki pompującej. Na rys. b) zaznaczono również mod z którego zbierane są fotony (o $w_0 \approx 100 \ \mu m$).

do maksimum, a następnie z powrotem maleć do zera, a więc widzialność, zdefiniowana jako:

$$V = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_{max} + N_{min}} \tag{2.10}$$

(gdzie N oznacza liczbę koincydencji), będzie wynosiła 100%.

Niestety, mimo wielokrotnych prób optymalizacji układu mierzona widzialność nie przekroczyła 70 %. Przyczyny, dla których nie było możliwe uzyskanie lepszej widzialności omówione zostaną w następnym podrozdziale.

2.2 Dryf

Wyjaśnieniem niemożności uzyskania widzialności bliskiej 100% podczas pomiarów korelacji w bazie polaryzacji $|D_+\rangle - |D_-\rangle$ jest dryf promienia nadzwyczajnego w kryształe dwójłomnym (ang. *walk-off*) [32]. W kryształe BBO o kącie wycięcia $\theta = 30^{\circ}$ kąt dryfu wynosi 69,3 mrad dla $\lambda = 390,5$ nm i 65 mrad dla $\lambda = 781$ nm [33]. Dla kryształu o grubości 1 mm oznacza to przesunięcie wiązki odpowiednio o 69,3 µm i 65 µm w kierunku od osi optycznej kryształu. Przesunięcie to jest porównywalne z rozmiarem ogniska wiązki pompującej.

Przeanalizujmy teraz jakiemu przesunięciu ulegają fotony generowane w pierwszym krysztale. Jako oś odniesienia (względem której określane będzie przesunięcie wiązek) przyjęto oś będącą przedłużeniem wiązki pompującej przed kryształami. Foton wiązki pompującej (niebieski) w pierwszym krysztale propaguje się jako promień nadzwyczajny, a więc ulega dryfowi. Foton fluorescencji parametrycznej (czerwony) propaguje się jako promień zwyczajny. W pierwszym krysztale efekt prowadzi do rozmycia wiązki: jeśli foton niebieski rozpadnie się na dwa czerwone na początku kryształu, to dryf będzie niewielki; jeśli do rozpadu dojdzie na końcu kryształu, wówczas fotony zostaną zdryfowane o pełne 69 μ m. Kierunek dryfu można łatwo odczytać na podstawie rys. 2.3. Rzuty wiązek na płaszczyznę xy po przejściu przez pierwszy (oraz przez drugi) kryształ przedstawione są na rys. 2.4.



Rys. 2.5: Rozsunięcie stożków fluorescencji parametrycznej, przekrój płaszczyzną *xz.* Rysunek nie w skali.

Czerwony foton wytworzony w pierwszym krysztale propaguje się przez drugi kryształ ja-

ko promień nadzwyczajny, a więc podlega dryfowi (rys. 2.4b).

Fotony generowane w drugim krysztale ulegają mniejszemu przesunięciu. Ta część wiązki pompującej, która powoduje wytwarzanie par fotonów w drugim krysztale, przez pierwszy kryształ propaguje się jako promień zwyczajny, a więc nie ulega dryfowi. W drugim krysztale wiązka niebieska podlega dryfowi, wiązki czerwone – nie. Analogicznie jak w pierwszym krysztale, prowadzi to do rozmycia wiązek czerwonych.

Na podstawie rys. 2.4 widać wyraźnie, że oprócz rozmycia wiązek czerwonych dochodzi do ich rozsunięcia o ok. $\frac{1}{\sqrt{2}}65 \ \mu m = 46 \ \mu m$ w kierunku poziomym. Wartość rozsunięcia jest porównywalna z promieniem wiązki pompującej, co wyjaśnia dlaczego dryf może mieć istotny wpływ na parametry źródła.

Rozsunięcie stożków fluorescencji jest przyczyną zmniejszenia widzialności V. W procesie fluorescencji parametrycznej emitowane są fotony o ciągłym widmie (por. rys. 2.1b). Do modu, w którym zbierane są fotony (zdefiniowanego przez ustawienie końcówek światłowodów i soczewek asferycznych), dopasowane są mody fluorescencji parametrycznej o nieco innym widmie – gdyż widmo fluorescencji parametrycznej silnie zależy od odległości od osi optycznej układu³. W wyniku niedopasowania widmowego obserwuje się zmniejszenie kontrastu prążków interferencyjnych, a więc w konsekwencji spadek

³Dokładniej, z warunku dopasowania fazowego wynika zależność częstotliwości emitowanego promieniowania od kierunku w przestrzeni. W płaszczyźnie, w której znajduje się detektor, różnice kierunku przekładają się na różnice w odległościach od osi optycznej.

widzialności.

Istnieje jeszcze drugi, geometryczny efekt, prowadzący do rozsunięcia się wiązek fotonów fluorescencji parametrycznej generowanych w obydwu kryształach. Ponieważ środki kryształów umieszczone są w odległości ok. 1 mm od siebie, stożki fotonów fluorescencji parametrycznej są przesunięte względem siebie. Na rys. 2.5 w uproszczony sposób przedstawiono przekrój stożków fluorescencji parametrycznej płaszczyzną *xz.* Zaznaczono jedynie położenie środka każdego z modów oraz nie uwzględniono dryfu.

Ponieważ |AB| = 1 mm, a $\alpha = 15$ mrad z łatwością można wyznaczyć wielkość rozsunięcia jako: $|BC| = |BD| = |AB| \operatorname{tg} \alpha =$ $15 \ \mu \mathrm{m}$. Efekt jest mniej znaczący niż w przypadku dryfu, ale nadal porównywalny z promieniem wiązki pompującej.

Na rys. 2.6 przedstawiono rozsunięcie



Rys. 2.6: Ostateczny układ stożków fluorescencji, przekrój płaszczyzną *xz.* Rysunek nie w skali.

stożków spowodowane przez oba efekty jednocześnie. Dryf wprowadza asymetrię rozmieszczenia stożków względem wiązki pompującej: po prawej stronie fotony fluorescencji emitowane są w modach, których środki rozsunięte są o ok. 30 μ m; po lewej stronie rozsunięcie jest dwukrotnie większe i wynosi ok. 60 μ m.

Skutki tej asymetrii zostały wyraźnie zaobserwowane podczas optymalizacji układu. Jak już zostało wspomniane w części 2.1.3, na początku maksymalizowana była liczba zliczeń fotonów z tylko jednego kryształu. Wybór kryształu, z którego zliczane były fotony następował przez odpowiednie ustawienie płytek półfalowych H1 i H2. Po zoptymalizowaniu liczby zliczeń z pierwszego kryształu (np. X2), płytki półfalowe były obracane tak, by obserwować fotony z drugiego kryształu. Po obróceniu płytek, w ramieniu prawym liczba pojedynczych zliczeń zmieniała się bardzo nieznacznie (następował spadek o nie więcej niż 10%). Natomiast w ramieniu lewym regularnie obserwowano znaczny spadek liczby pojedynczych zliczeń (o 40 do 50%). Przywrócenie poprzedniej liczby zliczeń wymagało regulacji ustawienia końcówek światłowodów wyłącznie w kierunku poziomym. Obydwa zaobserwowane fakty są w pełni zgodne z przedstawionym wyżej modelem.

Jak widać, omówiony prosty geometryczny model dobrze opisuje zaobserwowane podczas optymalizacji asymetrie liczby zliczeń. Dryf był już przedmiotem analizy w ramach bardziej złożonych modeli, również w pracy [10]; brak jednak w tej pracy ilościowego oszacowania wpływu dryfu na jakość splątania. Zaletą przedstawionego tu modelu jest jego prostota, pozwalająca w łatwy sposób oszacować wpływ dryfu na parametry źródła par fotonów.

2.3 Końcowe ustawienie źródła

Skutki omówionego w poprzedniej części efektu dryfu można zredukować na dwa sposoby: (1) umieszczając w obydwu ramionach układu dodatkowe kryształy BBO ustawione tak, by skompensować dryf [10] lub (2) zwiększając promień wiązki pompującej. Zaletą metody pierwszej jest utrzymanie wysokiej jasności źródła, jednak ze względu na brak odpowiedniego kryształu konieczne było zastosowanie metody drugiej. Soczewka L2 została wymieniona na soczewkę o ogniskowej 50 mm. Pozwoliło to uzyskać w miejscu kryształów eliptyczne przewężenie o promieniach $w_0 = 250 \ \mu m$ i $w'_0 = 170 \ \mu m$.

Jak już zostało wspomniane wcześniej, wiązka pompująca była eliptyczna ze względu na dryf w krysztale drugiej harmonicznej (X1). Przy poziomej polaryzacji wiązki z oscylatora wiązka w ognisku była węższa w kierunku poziomym. Spoglądając na rys. 2.4b łatwo stwierdzić, że ze względu na fakt, iż rozsunięcie wiązek fotonów fluorescencji parametrycznej przez efekt dryfu zachodzi w kierunku poziomym, pożądane byłoby, by wiązka pompująca była szersza w kierunku poziomym, a węższa – w pionowym. Aby uzyskać taką konfigurację, pomiędzy oscylatorem a soczewką L1 umieszczona została płytka półfalowa w ten sposób, by kryształ X1 był pompowany wiązką o polaryzacji pionowej. Kryształ X1 został następnie obrócony o 90°. Dzięki temu wiązka w miejscu kryształów X2 i X3 stała się szersza w kierunku poziomym. Kosztem obrócenia kryształu X1 było zmniejszenie mocy generowanej drugiej harmonicznej, która spadła do ok. 11 mW.

Wraz ze zwiększeniem promienia wiązki pompującej musiały ulec zwiększeniu również mody, w które zbierane były fotony fluorescencji. Soczewki asferyczne AL1 i AL2 o ogniskowej 11 mm zostały zastąpione soczewkami o ogniskowej 8 mm. Dodatkowo, do 90 cm zwiększona została odległość pomiędzy kryształami a soczewkami. Ostatecznie promień modu zbierającego w miejscu kryształów wynosił ok. 290 μ m. Wybrana została taka wartość promienia, gdyż w wyniku kilku prób stwierdzono, że lepszą wydajność zbierania par fotonów uzyskuje się dla stosunku promienia modu zbierającego do promienia wiązki pompującej bliższemu 1,4 – 1,5 niż 2.

W wyniku powyższych zmian wyraźnie spadła liczba zliczeń par fotonów. Liczba pojedynczych zliczeń przy pompowaniu tylko jednego kryształu nie przekraczała 42 000 s⁻¹. Wzrósł za to stosunek liczby koincydencji do pojedynczych zliczeń: przy 39 000 s⁻¹ pojedynczych zliczeń liczba koincydencji



Rys. 2.7: Liczba koincydencji w zależności od kąta obrotu płytki półfalowej w ramieniu 1. W ramieniu 2. zliczane były fotony w stanie $|D_+\rangle$, czas zliczania wynosił 30 s

dochodziła do 5800 s⁻¹, co daje wydajność 14,8%.

Nie zaobserwowano omówionej w poprzednim rozdziale asymetrii przy obserwowaniu fotonów generowanych w pierwszym bądź w drugim kryształe. Przy zmianie obserwowanego kryształu liczba zliczeń nie ulegała zmianom większym niż o 10%.

Po zoptymalizowaniu układu w ten sposób, by liczba koincydencji z jednego i drugiego kryształu była jednakowa (ostateczne wyrównanie liczby koincydencji uzyskiwano przez niewielkie obrócenie płytki półfalowej H3) i odpowiednim ustawieniu kompensatora Babineta zmierzona widzialność w bazie polaryzacji $|D_+\rangle$ i $|D_-\rangle$ wyniosła 89%.

Aby jeszcze zwiększyć widzialność, w obydwu ramionach pomiędzy zwierciadłami a płytkami falowymi umieszczone zostały filtry interferencyjne o centralnej długości fali 780 nm i szerokości 10 nm. Spowodowało to dalszy spadek zarówno liczby pojedynczych zliczeń, jak i koincydencji, odpowiednio do 4000 s⁻¹ i 550 s⁻¹ przy pompowaniu jednego kryształu. Jednakże, ponieważ użycie filtrów spowodowało, że z obu kryształów zbierane były fotony o bardzo zbliżonym widmie (a więc praktycznie nierozróżnialne), widzialność w bazie polaryzacji $|D_+\rangle$ i $|D_-\rangle$ wzrosła nawet do 99%. Wykres zależności liczby koincydencji od kąta obrotu płytki półfalowej w ramieniu 1, gdy płytka w ramieniu 2 ustawiona była tak, by zliczane były fotony w stanie $|D_+\rangle$, wraz z dopasowaną sinusoidą o okresie 180° przedstawiony jest na rys. 2.7. Widzialność w bazie polaryzacji $|0\rangle$, $|1\rangle$ wynosiła 98%. Tak duża widzialność w obydwu bazach polaryzacji potwierdza uzyskanie stanu o dużym stopniu splątania. Jednak w dalszych pomiarach, ze względu na mniejszą pracochłonność optymalizacji źródła, korzystano z ustawienia przy którym widzialność wynosiła ok. 97%.

Przyczyną redukcji widzialności mogła być niedokładność prostopadłego ustawienia osi optycznych kryształów BBO, błędy odczytu kąta obrotu płytek falowych oraz, pomimo zastosowania filtrów interferencyjnych, pewna asymetria widma fluorescencji parametrycznej z każdego z kryształów.

Podczas obrotu płytek półfalowych liczba pojedynczych zliczeń nie ulegała zmianom większym niż o 7% w stosunku do średniej liczby zliczeń, co świadczy o symetrycznym ustawieniu źródła.

Rozdział 3

Pomiar macierzy gęstości

W rozdziale tym omówiony zostanie sposób pomiaru macierzy gęstości opisującej polaryzacyjne stopnie swobody pary fotonów. W krótkim wstępie omówione zostaną podstawowe własności macierzy gęstości. Następnie przedstawiona zostanie tzw. metoda liniowej rekonstrukcji macierzy gęstości, w pewnym stopniu analogiczna do pomiaru klasycznego wektora Stokesa. Wadą tej metody jest fakt, że stosunkowo często otrzymane macierze gęstości są niefizyczne. Stąd w kolejnym podrozdziale przedstawiona zostanie bardziej skomplikowana obliczeniowo metoda największej wiarygodności, w wyniku której otrzymuje się fizyczne macierze gęstości. Na koniec omówiony zostanie rachunek błędu i podane zostaną przykłady zmierzonych macierzy gęstości, charakteryzujących skonstruowane źródło par fotonów. Rozdział ten jest w większości oparty na pracy D. Jamesa i in. [11].

3.1 Wstęp

Macierz gęstości opisująca stan polaryzacji pary fotonów jest macierzą 4×4 spełniającą warunki wymienione w części 1.1.2: unormowanie, hermitowskość i dodatniookreśloność.

Macierz gęstości pary fotonów jest rozszerzeniem na przypadek dwufotonowy macierzy koherencji, znanej z klasycznego opisu stanu polaryzacji światła [23]. Macierz koherencji jest blisko związana z parametrami Stokesa, które w łatwy sposób można zmierzyć. Dla pojedynczej wiązki światła pomiar wektora Stokesa opiera się na zmierzeniu natężenia (liczby fotonów) pionowej i poziomej składowej polaryzacji, następnie polaryzacji ukośnej (pod kątem 45°) i polaryzacji kołowej lewoskrętnej. W języku mechaniki kwantowej odpowiada to pomiarom w bazie stanów $\{|0\rangle, |1\rangle, |D_+\rangle, |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)\}.$ Opisana w następnym podrozdziale metoda liniowej rekonstrukcji macierzy gęstości jest rozszerzeniem metody Stokesa na stan polaryzacji dwóch fotonów. 16 elementów macierzy gęstości wyznaczanych jest na podstawie pomiarów liczby zliczeń (koincydencji) w bazie 16 różnych, liniowo niezależnych dwufotonowych stanów polaryzacji.

Wyznaczenie macierzy gęstości będzie opierało się na wykonaniu 16 pomiarów liczby zliczeń. Z drugiej strony, macierz gęstości opisuje stan pojedynczej pary fotonów. Ponieważ dokonanie pomiaru stanu polaryzacji fotonu modyfikuje ten stan, nie jest możliwe wykonanie owych 16 pomiarów na jednej parze fotonów. Aby zmierzyć macierz gęstości, należy dysponować wieloma identycznymi kopiami danego stanu kwantowego. Omówione w rozdziale 2 źródło par fotonów wytwarza kolejne pary fotonów w praktycznie takim samym stanie kwantowym i



Rys. 3.1: Fragment układu doświadczalnego z elementami koniecznymi do pomiaru macierzy gęstości. Q1, Q2 – płytki ćwierćfalowe; IF1, IF2 – filtry interferencyjne; pozostałe oznaczenia jak na rys. 2.2.

jest stabilne w czasie. Dzięki temu możliwe jest przeprowadzanie pomiarów macierzy gęstości. Metoda pomiaru macierzy gęstości stanu kwantowego polegająca na wielokrotnych pomiarach wykonywanych na identycznych kopiach stanu nazywana jest tomografią kwantową.

Aby móc zrealizować pomiar polaryzacji w 16 konfiguracjach konieczna była niewielka modyfikacja układu doświadczalnego. W obydwu ramionach oprócz płytek półfalowych umieszczone zostały również płytki ćwierćfalowe (rys. 3.1). Dzięki temu w każdym z ramion możliwe było zliczanie fotonów o dowolnym stanie polaryzacji.

3.2 Metoda liniowej rekonstrukcji

Jak wspomniano powyżej, w metodzie liniowej rekonstrukcji macierzy gęstości przeprowadza się pomiar liczby koincydencji dla 16 różnych ustawień płytek półfalowych i ćwierćfalowych w obydwu ramionach. Wartości elementów macierzy gęstości zależą liniowo od zmierzonych liczb koincydencji, stąd nazwa metody. W tabeli 3.2 zamieszczona została lista 16 par stanów użytych do pomiaru macierzy gęstości. Lista została sporządzona analogicznie do listy użytej w pracy [11]. Zaletą wyboru takiego zestawu stanów jest fakt, że, przejścia od stanu poprzedniego do następnego dokonuje się zawsze przez obrót tylko jednej płytki falowej.

W celu przyporządkowania konkretnym ustawieniom płytek falowych odpowiednich stanów polaryzacji posłużono się rachunkiem Jonesa. Dokonajmy następującego przyporządkowania wektorów Jonesa stanom polaryzacji:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Należy pamiętać, że stany $|0\rangle$ i $|1\rangle$ są wyznaczone przez orientację osi optycznych kryształów BBO, a więc odpowiadają polaryzacjom liniowym pod kątem odpowiednio 45° i 135° względem powierzchni stołu optycznego. Kostki polaryzujące PBS1 i PBS2 przepuszczają

Lp.	ramię 1	ramię 2	$ \psi^{(2)} angle$
1	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$
2	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$[0\ 1\ 0\ 0]$
3	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$
4	$ 1\rangle$	0 angle	$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$
5	$ R\rangle$	$ 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ 0 \ -i \ 0]$
6	$ R\rangle$	$ 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[0 \ 1 \ 0 \ -i]$
7	$ D_{-}\rangle$	$ 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[0\ 1\ 0\ -1]$
8	$ D_{-}\rangle$	$ 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 0 \ -1 \ 0]$
9	$ D_{-}\rangle$	$ R\rangle$	$\frac{1}{2}[1 - i - 1 i]$
10	$ D_{-}\rangle$	$ D_{-}\rangle$	$\frac{1}{2}[1 \ -1 \ -1 \ 1]$
11	$ R\rangle$	$ D_{-}\rangle$	$rac{1}{2} [1 \ -1 \ -i \ i]$
12	$ 0\rangle$	$ D_{-}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[1 - 1 \ 0 \ 0]$
13	$ 1\rangle$	$ D_{-}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[0 \ 0 \ 1 \ -1]$
14	$ 1\rangle$	$ L\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[0 \ 0 \ 1 \ i]$
15	$ 0\rangle$	$ L\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[1 \ i \ 0 \ 0]$
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	$rac{1}{2}[1 \hspace{.1in} i \hspace{.1in} - \hspace{.1in} i \hspace{.1in} 1]$

Tab. 3.2: Baza stanów użytych do pomiaru macierzy gęstości: $|0\rangle$, $|1\rangle$ – polaryzacje wyznaczone przez osie kryształów BBO, por. 2.1.1, $|D_{-}\rangle$ – ukośna pod kątem 45° do $|0\rangle$, $|R\rangle$ – kołowa prawoskrętna: $|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$, $|L\rangle$ – kołowa lewoskrętna. $|\psi^{(2)}\rangle$ – wektor stanu dwufotonowego w bazie $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$.

światło spolaryzowane poziomo względem powierzchni stołu, opisane wektorem Jonesa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} = |D_{-}\rangle. \tag{3.2}$$

Działanie płytek falowych odpowiada pomnożeniu wektora Jonesa (3.2) przez odpowiednią macierz Jonesa. Macierz płytki półfalowej obróconej o kąt α względem kierunku 45° jest dana przez:

$$\hat{H}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$
(3.3)

Macierz płytki ćwierć
falowej obróconej o kąt β :

$$\hat{Q}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i - \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & i + \cos 2\beta \end{pmatrix}.$$
(3.4)

Działając macierzami \hat{H} i \hat{Q} na wektor $|D_{-}\rangle$ otrzymujemy wektor $|\psi^{(1)}\rangle$, na który podczas pomiaru rzutowany jest stan pojedynczego fotonu (tzn. stan, w którym zliczane są fotony przy danym ustawieniu płytek falowych):

$$|\psi^{(1)}(\alpha,\beta)\rangle = \hat{Q}(\beta)\hat{H}(\alpha)|D_{-}\rangle = \begin{pmatrix} a(\alpha,\beta)\\b(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = a(\alpha,\beta)|0\rangle + b(\alpha,\beta)|1\rangle, \quad (3.5)$$

gdzie współczynniki a i b dane są przez:

$$a(\alpha,\beta) = \frac{1}{2} [\sin(2\alpha + 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta) + i(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)]$$

$$b(\alpha,\beta) = \frac{1}{2} [\sin(2\alpha + 2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta) + i(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)].$$
(3.6)

Wykonując iloczyn tensorowy wektorów $|\psi^{(1)}\rangle$ opisujących każde z ramion układu otrzymujemy wektor stanu dwufotonowego odpowiadającego danemu ustawieniu płytek falowych:

$$|\psi^{(2)}(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)\rangle = |\psi^{(1)}(\alpha_1,\beta_1)\rangle \otimes |\psi^{(1)}(\alpha_2,\beta_2)\rangle =$$

= $a(\alpha_1,\beta_1)a(\alpha_2,\beta_2)|00\rangle + a(\alpha_1,\beta_1)b(\alpha_2,\beta_2)|01\rangle +$
+ $b(\alpha_1,\beta_1)a(\alpha_2,\beta_2)|10\rangle + b(\alpha_1,\beta_1)b(\alpha_2,\beta_2)|11\rangle$ (3.7)

(indeksy dolne oznaczają wielkości dotyczące odpowiednio pierwszego lub drugiego ramienia). Składowe tego wektora dla użytych 16 ustawień płytek falowych przedstawione zostały w ostatniej kolumnie tabeli 3.2. Dla skrócenia zapisu wektory te w dalszej części tego rozdziału będą oznaczane przez $|\psi_n\rangle$, gdzie n jest numerem stanu z tabeli 3.2.

Ponieważ pomiar stanu kwantowego odpowiada rzutowaniu na określony kierunek w przestrzeni Hilberta, każdemu wektorowi $|\psi_n\rangle$ odpowiada operator rzutowy $\mu_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$. Mierzona podczas eksperymentu liczba koincydencji n_n jest dana przez wyrażenie:

$$n_n = N \langle \psi_n | \hat{\rho} | \psi_n \rangle = N s_n, \qquad (3.8)$$

gdzie $\hat{\rho}$ jest macierzą gęstości stanu dwufotonowego, a N stałym współczynnikiem określającym liczbę koincydencji zliczeń fotonów o dowolnej polaryzacji rejestrowaną w trakcie pomiaru. W powyższym równaniu wprowadzona została wielkość s_n określająca prawdopodobieństwo zarejestrowania koincydencji dla danego pomiaru μ_n .

W celu wyznaczenia macierzy gęstości na podstawie zbioru 16 wyników pomiarów $\{n_n\}$ przekształćmy macierz gęstości $\hat{\rho}$ do postaci 16-wymiarowego wektora kolumnowego **r**. Procedura jest analogiczna do procedury przekształcania jednofotonowej macierzy koherencji na wektor Stokesa. Aby dokonać

przekształcenia, potrzebny jest zbiór 16 macierzy 4 × 4 $\{\hat{\Gamma}_n\}$, mających następujące własności:

$$\operatorname{Tr}(\hat{\Gamma}_{n}\hat{\Gamma}_{m}) = \delta_{nm}$$

$$\forall \hat{A} \quad \hat{A} = \sum_{n=1}^{16} \hat{\Gamma}_{n} \operatorname{Tr}(\hat{\Gamma}_{n}\hat{A}), \qquad (3.9)$$

gdzie \hat{A} jest dowolną macierzą 4×4 , a δ_{nm} oznacza deltę Kroneckera. Okazuje się, że własności te spełniają unormowane iloczyny tensorowe macierzy Pauliego: $\sigma_i \otimes \sigma_j$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Macierze $\hat{\Gamma}_n$ zostały przedstawione explicite w pracy [11]. Przy ich użyciu można powiązać macierz $\hat{\rho}$ z elementami r_n wektora **r**:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{16} \hat{\Gamma}_n r_n \tag{3.10}$$

$$r_n = \text{Tr}(\hat{\Gamma}_n \hat{\rho}). \tag{3.11}$$

Korzystając z równań (3.8) i (3.10) można wyrazić liczbę zarejestrowanych koincydencji n_n przez elementy wektora **r**:

$$n_n = N \sum_{m=1}^{16} B_{nm} r_m, \qquad (3.12)$$

gdzie wprowadzona została macierz \mathbf{B} o wymiarze 16×16 :

$$B_{nm} = \langle \psi_n | \hat{\Gamma}_m | \psi_n \rangle. \tag{3.13}$$

Odwracając zależność (3.12) możemy wyrazić elementy wektora **r** przez liczby koincydencji n_n :

$$r_n = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{16} (B^{-1})_{nm} n_m.$$
(3.14)

Należy zauważyć, że równanie (3.12) można odwrócić tylko pod warunkiem, że macierz **B** jest nieosobliwa. Nieosobliwość macierzy **B** jest prostym kryterium pozwalającym sprawdzić, czy dany zbiór 16 stanów bazowych $\{|\psi_n\rangle\}$ jest dobrą bazą do pomiaru macierzy gęstości.

Podstawiając równanie (3.14) do (3.10) znajdujemy wyrażenie na szukaną macierz gęstości w zależności od liczby koincydencji:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{16} \sum_{m=1}^{16} (B^{-1})_{nm} \hat{\Gamma}_m n_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{16} \hat{M}_n n_n.$$
(3.15)

W powyższym równaniu zdefiniowany został zbiór 16 macierzy $\{\hat{M}_n\}$. Skrócony zapis równania za ich pomocą będzie przydatny podczas obliczania błędu pomiarowego.

Jedyną nieznaną wielkością w równaniu (3.15) pozostaje współczynnik N. Współczynnik ten można wyznaczyć, korzystając z pewnej matematycznej własności zbioru macierzy $\{\hat{M}_n\}$.

Na podstawie równania (3.15):

$$\langle \psi_m | \hat{M}_n | \psi_m \rangle = \sum_l \langle \psi_m | \hat{\Gamma}_l | \psi_m \rangle (B^{-1})_{ln}.$$
(3.16)

Korzystając z (3.13) otrzymujemy:

$$\langle \psi_m | \hat{M}_n | \psi_m \rangle = \sum_l \langle \psi_m | \hat{\Gamma}_l | \psi_m \rangle (B^{-1})_{ln} = \sum_l B_{ml} (B^{-1})_{ln} = \delta_{mn}.$$
(3.17)

Wprowadzając bazę w czterowymiarowej przestrzeni Hilberta: $\{|i\rangle, i = 1, 2, 3, 4\}$ równanie (3.15) można zapisać jako:

$$\langle i|\hat{\rho}|j\rangle = \sum_{k,l} \sum_{n} \langle i|\hat{M}_{n}|j\rangle \langle \psi_{n}|k\rangle \langle l|\psi_{n}\rangle \langle k|\hat{\rho}|l\rangle.$$
(3.18)

Ponieważ powyższe równanie jest spełnione dla dowolnego $\hat{\rho}$, musi zachodzić następujący związek:

$$\sum_{n} \langle i | \hat{M}_{n} | j \rangle \langle \psi_{n} | k \rangle \langle l | \psi_{n} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$
(3.19)

Zapisując ten związek w postaci macierzowej otrzymujemy poszukiwaną własność macierzy \hat{M}_n :

$$\sum_{n} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{n}) |\psi_{n}\rangle \langle \psi_{n}| = \mathbb{1}.$$
(3.20)

Z (3.20) wynika od razu, po pomnożeniu obu stron przez $\hat{\rho}$:

$$\sum_{n} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{n}) |\psi_{n}\rangle \langle \psi_{n} | \hat{\rho} = \hat{\rho}.$$
(3.21)

Biorąc ślad tego wyrażenia i mnożąc je obustronnie przez N otrzymujemy:

$$\sum_{n} \operatorname{Tr}(\hat{M}_{n}) n_{n} = N.$$
(3.22)

Można łatwo sprawdzić, że dla użytej bazy (tab. 3.2) pierwsze 4 macierze M_n mają ślad równy jedności, natomiast ślad pozostałych macierzy jest równy zeru. Korzystając z tego faktu, otrzymujemy wyrażenie na szukaną wielkość N:

$$N = \sum_{n=1}^{4} n_n.$$
(3.23)

Możemy zatem, na podstawie (3.23) i (3.15), zapisać ostateczny wzór wyrażający macierz gęstości przez zmierzone liczby koincydencji:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{n=1}^{16} \hat{M}_n n_n}{\sum_{n=1}^{4} n_n}.$$
(3.24)

Przykłady macierzy gęstości wyznaczonych za pomocą tej zależności zostaną przedstawione w podrozdziale 3.5. Macierze obliczane w ten sposób, ze względu na unormowanie i hermitowskość macierzy \hat{M}_n , są również unormowane ($\text{Tr}\hat{\rho} = 1$) i hermitowskie. Jednakże, szczególnie dla stanów splątanych o niewielkiej entropii, uzyskiwane macierze w większości przypadków nie są dodatnio określone, co spowodowane jest przez błędy pomiarowe. Macierze ujemnie określone nie reprezentują fizycznych stanów. Ponieważ mają ujemne wartości własne, nie jest możliwe obliczenie na ich podstawie pewnych wielkości, takich jak np. entropia (por. rozdz. 1.6). Z tego powodu konieczne jest zastosowanie metody wyznaczania macierzy gęstości, która automatycznie będzie zapewniała jej dodatniookreśloność. Metoda taka zostanie omówiona w następnym podrozdziale.

3.3 Metoda największej wiarygodności

Oszacowanie macierzy gęstości metodą największej wiarygodności (ang. maximum likelihood estimation) opiera się na zapostulowaniu macierzy w postaci zapewniającej jej unormowanie, hermitowskość i dodatniookreśloność. Następnie definiowana jest funkcja wiarygodności (zależna od 16 elementów macierzy gęstości i sparametryzowana zmierzonymi liczbami koincydencji) określająca prawdopodobieństwo, z jakim dla danej macierzy gęstości zmierzylibyśmy określone liczby koincydencji. Wyznaczenie macierzy gęstości opiera się na numerycznym znalezieniu maksimum funkcji wiarygodności – stąd nazwa metody.

3.3.1 Fizyczna macierz gęstości

Warunek dodatnio
określoności macierzy \hat{G} można matematycznie zapisać jako:

$$\forall |\psi\rangle \quad \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle \ge 0. \tag{3.25}$$

Warunek ten spełnia macierz postaci $\hat{G} = \hat{T}^{\dagger}\hat{T}$, gdzie \hat{T} jest dowolną macierzą (o odpowiednim wymiarze). Łatwo sprawdzić, że rzeczywiście tak jest:

$$\langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{T}^{\dagger} \hat{T} | \psi \rangle = \langle (\hat{T} \psi) | (\hat{T} \psi) \rangle \ge 0.$$
(3.26)

Dodatkowo, ponieważ $(\hat{T}^{\dagger}\hat{T})^{\dagger} = \hat{T}^{\dagger}\hat{T}$, tak zdefiniowana macierz \hat{G} jest również hermitowska. Normalizację macierzy \hat{G} można zapewnić dzieląc przez ślad $\text{Tr}(\hat{T}^{\dagger}\hat{T})$. W ten sposób otrzymujemy warunek na fizyczną macierz gęstości $\hat{\rho}_{f}$:

$$\hat{\rho}_f = \frac{\hat{T}^{\dagger}\hat{T}}{\mathrm{Tr}(\hat{T}^{\dagger}\hat{T})}.$$
(3.27)

Ze względu na uproszczenie dalszych obliczeń, macier
z \hat{T} wygodnie jest zapostulować w postaci dolnotrój
kątnej:

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0\\ t_5 + it_6 & t_2 & 0 & 0\\ t_{11} + it_{12} & t_7 + it_8 & t_3 & 0\\ t_{15} + it_{16} & t_{13} + it_{14} & t_9 + it_{10} & t_4 \end{pmatrix}.$$
(3.28)

Liczba parametrów macierzy T jest zgodna z liczbą parametrów macierzy gęstości (16, z czego 15 jest niezależnych).

Otrzymaliśmy zatem macierz gęstości w postaci zapewniającej jej unormowanie, hermitowskość i dodatniookreśloność. Macierz została sparametryzowana zbiorem szesnastu parametrów $\{t_n\}$.

3.3.2 Funkcja wiarygodności

Pomiar macierzy gęstości $\hat{\rho}$ polega na zmierzeniu 16 liczb koincydencji n_n . Wartość oczekiwana liczby koincydencji dla danego pomiaru wynosi $\bar{n}_n = N \langle \psi_n | \hat{\rho} | \psi_n \rangle$. Zakładając, że szumy będące źródłem błędów mają gaussowski rozkład prawdopodobieństwa, możemy zapisać prawdopodobieństwo P zmierzenia zestawu 16 liczb koincydencji $\{n_n\}$ jako:

$$P(n_1, \dots, n_{16}) = \frac{1}{Z} \prod_{n=1}^{16} \exp\left[-\frac{(\bar{n}_n - n_n)^2}{2\sigma_n^2}\right],$$
 (3.29)

gdzie Z jest stałą normalizacyjną, a σ_n odchyleniem standardowym dla *n*tego pomiaru koincydencji, danym, przy założeniu szumu poissonowskiego, w przybliżeniu przez $\sigma_n = \sqrt{\bar{n}_n}$.

Wartości oczekiwane \bar{n}_n są określone przez macierz gęstości $\hat{\rho}_f$:

$$\bar{n}_n = N \langle \psi_n | \hat{\rho}_f(t_1, \dots, t_{16}) | \psi_n \rangle, \qquad (3.30)$$

a więc dla danego n i określonej stałej N są jednoznacznie wyznaczone przez 16 parametrów t_m . W związku z tym prawdopodobieństwo P, że dla stanu

opisanego macierzą $\hat{\rho}_f(t_1, \ldots, t_{16})$ zmierzymy zestaw $\{n_1, \ldots, n_{16}\}$ koincydencji jest dane przez:

$$P(n_1, \dots, n_{16}) = \frac{1}{Z} \prod_{n=1}^{16} \exp\left[-\frac{(N\langle\psi_n|\hat{\rho}_f(t_1, \dots, t_{16})|\psi_n\rangle - n_n)^2}{2N\langle\psi_n|\hat{\rho}_f(t_1, \dots, t_{16})|\psi_n\rangle}\right], \quad (3.31)$$

gdzie $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. Ze względu na uproszczenie obliczeń numerycznych, zamiast poszukiwania maksimum funkcji wiarygodności (3.31), wygodniej jest szukać maksimum jej logarytmu. Jest to matematycznie równoważne, gdyż logarytm jest funkcją monotonicznie rosnącą, a funkcja P przyjmuje zawsze wartości nieujemne. Problem sprowadza się zatem do znalezienia minimum (ze względu na ujemny wykładnik eksponensu w wyrażeniu na P) następującej funkcji, zależnej od $\{t_m\}$ i sparametryzowanej liczbami koincydencji $\{n_n\}$:

$$L(t_1, \dots, t_{16}; n_1, \dots, n_{16}) = \sum_{n=1}^{16} \frac{(N\langle \psi_n | \hat{\rho}_f(t_1, \dots, t_{16}) | \psi_n \rangle - n_n)^2}{2N\langle \psi_n | \hat{\rho}_f(t_1, \dots, t_{16}) | \psi_n \rangle}.$$
 (3.32)

Zaniedbana została zależność wielkości N od $\{t_m\}$, gdyż jej zmiany tylko w niewielkim stopniu wpływają na wynik. Przed zlogarytmowaniem funkcja P została pomnożona przez stałą normalizacyjną Z. Nie zmienia to położenia maksimum, gdyż Z > 0.

Minimum funkcji L znajdowane było za pomocą funkcji fminunc programu Matlab. Procedura wymagała inicjalizacji początkowymi wartościami parametrów $\{t_m\}$. Algorytm okazał się być zbieżny praktycznie dla dowolnych wartości początkowych tych parametrów, a więc nie było konieczne wstępne szacowanie ich wartości. Po wyznaczeniu optymalnych wartości parametrów $\{t_m\}$ macierz gęstości obliczana była za pomocą zależności (3.27)

Macierze gęstości otrzymane metodą największej wiarygodności nie różniły się znacznie od macierzy uzyskanych metodą liniowej rekonstrukcji, jednak zawsze spełniały warunek dodatniookreśloności, por. (3.5). Podczas dalszego opracowywania wyników korzystano z macierzy oszacowanych metodą największej wiarygodności. Macierze uzyskane metodą liniowej rekonstrukcji służyły jedynie do weryfikacji poprawnej zbieżności procedury numerycznej.

3.4 Rachunek błędu

3.4.1 Macierz gęstości

W opisanej powyżej metodzie pomiaru macierzy gęstości istnieją dwa główne źródła błędów — poissonowskie fluktuacje liczby zliczeń oraz błąd związany z ustawieniem kątów obrotu płytek falowych. Jako pierwsze omówione zostaną błędy związane ze statystyką zliczeń fotonów.

Jak już wspomniano wcześniej [równanie (3.8)], macierz gęstości jest określona przez 16 parametrów s_n :

$$s_n = \frac{n_n}{N} = \frac{n_n}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}.$$
(3.33)

Błędy wielkości s_n można wyznaczyć na podstawie wzoru:

$$\overline{\delta s_n \delta s_m} = \sum_{l,k=1}^{16} \left(\frac{\partial s_n}{\partial n_l} \right) \left(\frac{\partial s_m}{\partial n_k} \right) \overline{\delta n_l \delta n_k}.$$
(3.34)

Mierzone liczby zliczeń (koincydencji) n_n są statystycznie niezależnymi poissonowskimi zmiennymi losowymi, a zatem:

$$\overline{\delta n_l \delta n_k} = n_l \delta_{lk} \tag{3.35}$$

Pochodna wyrażenia (3.33) wynosi:

$$\frac{\partial s_m}{\partial n_n} = \frac{\delta_{mn}}{N} - \frac{n_m}{N^2} D_n, \qquad (3.36)$$

gdzie:

$$D_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } 1 \le n \le 4\\ 0 & \text{dla pozostałych } n \end{cases}$$
(3.37)

Podstawiając (3.36) i (3.35) do (3.34) otrzymujemy:

$$\overline{\delta s_n \delta s_m} = \frac{n_m}{N^2} \delta_{mn} + \frac{n_n n_m}{N^3} (1 - D_n - D_m).$$
(3.38)

Ponieważ wielkość N dla każdego z przeprowadzonych pomiarów była znacznie większa od jedynki (rzędu 10^4), drugi człon powyższego wyrażenia można zaniedbać. W ten sposób otrzymujemy ostateczne wyrażenie na błąd związany z szumem poissonowskim:

$$\overline{\delta s_n \delta s_m} = \delta_{nm} \frac{n_m}{N^2} = \delta_{nm} \frac{s_m}{N} \tag{3.39}$$

Przejdźmy teraz do oszacowania błędu związanego z niedokładnością ustawień płytek falowych. Wielkości s_n można wyrazić przez macierz gęstości oraz wektory bazowe $|\psi_n\rangle$:

$$s_n = \langle \psi_n | \hat{\rho} | \psi_n \rangle. \tag{3.40}$$

 s_n zależą od kątów obrotu płytek falowych poprzez wektory bazowe, a dokładniej poprzez zależności (3.6) i (3.7). Zróżniczkujmy wyrażenie (3.40) po pewnym kącie θ :

$$\frac{\partial s_n}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \langle \psi_n | \right] \hat{\rho} | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \hat{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} | \psi_n \rangle \right]. \tag{3.41}$$

Korzystając z równań (3.15) oraz (3.33), możemy zapisać:

$$\frac{\partial s_n}{\partial \theta} = \sum_{m=1}^{16} s_m \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \langle \psi_n | \right] \hat{M}_m | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | \hat{M}_m \left[\frac{\partial}{\partial \theta} | \psi_n \rangle \right] \right\}.$$
(3.42)

Dla uproszczenia zapisu oznaczmy kąty obrotu płytek falowych $\{\alpha_{1,n}, \beta_{1,n}, \alpha_{2,n}, \beta_{2,n}\}$ przez $\{\theta_{1,n}, \theta_{2,n}, \theta_{3,n}, \theta_{4,n}\}$. Korzystając z (3.42), otrzymujemy wyrażenie na pochodne s_n względem kątów obrotu płytek falowych:

$$\frac{\partial s_n}{\partial \theta_{i,n}} = \sum_{m=1}^{16} s_m f_{nm}^{(i)},\tag{3.43}$$

gdzie

$$f_{nm}^{(i)} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta_{i,n}}\langle\psi_n|\right]\hat{M}_m|\psi_n\rangle + \langle\psi_n|\hat{M}_m\left[\frac{\partial}{\partial\theta_{i,n}}|\psi_n\rangle\right].$$
 (3.44)

Błąd wielkości s_n spowodowany niepewnością odczytu kąta obrotu płytek falowych jest zatem dany przez:

$$\overline{\delta s_n \delta s_m} = \delta_{nm} \sum_{i=1}^{4} \sum_{k,l=1}^{16} s_k s_l f_{nk}^{(i)} f_{nl}^{(i)} (\Delta \theta)^2, \qquad (3.45)$$

gdzie założono, że błędy ustawienia płytek falowych dla każdego z 16 pomiarów liczby koincydencji są niezależne od siebie. W rzeczywistości, ponieważ pomiędzy kolejnymi pomiarami zmieniane było położenie tylko jednej płytki falowej, błędy te nie są w pełni niezależne. Jednakże, powyższe założenie znacznie upraszcza rachunki i wydaje się dawać rozsądne oszacowanie błędów doświadczalnych (por. [11]).

W wyrażeniu (3.45) wprowadzone zostało oznaczenie $\Delta \theta$, będące niepewnością ustawienia kąta obrotu płytek falowych. Dla stosowanych uchwytów obrotowych została ona oszacowana jako 0,5° dla każdej z 4 płytek.

Łącząc wyrażenia (3.39) i (3.45), otrzymujemy wzór na całkowity błąd wielkości s_n :

$$\overline{\delta s_n \delta s_m} = \delta_{mn} \left[\frac{s_n}{N} + \sum_{i=1}^4 \sum_{k,l=1}^{16} s_k s_l f_{nk}^{(i)} f_{nl}^{(i)} (\Delta \theta)^2 \right].$$
(3.46)

Korzystając z powyższego wzoru oraz z wyrażeń (3.15) i (3.33), możemy obliczyć błędy elementów macierzy gęstości wyznaczonej metodą liniowej rekonstrukcji:

$$(\Delta \hat{\rho}_{ij})^2 = \sum_{m,n=1}^{16} \frac{\partial \hat{\rho}_{ij}}{\partial s_n} \frac{\partial \hat{\rho}_{ij}}{\partial s_m} \overline{\delta s_n \delta s_m} =$$

$$= \sum_{n=1}^{16} (M_{n(ij)})^2 \left[\frac{s_n}{N} + \sum_{i=1}^4 \sum_{k,l=1}^{16} s_k s_l f_{nk}^{(i)} f_{nl}^{(i)} (\Delta \theta)^2 \right].$$
(3.47)

Aby oszacować błędy macierzy gęstości $\hat{\rho}_P$ wyznaczonej metodą największej wiarygodności można użyć tej samej metody, obliczając wielkości s_n jako: $s_n = \langle \psi_n | \hat{\rho}_P | \psi_n \rangle$. Metoda ta oczywiście nie uwzględnia błędów zawartych w samej procedurze rekonstrukcji macierzy, ale ponieważ różnice pomiędzy macierzami gęstości wyznaczonymi obydwoma metodami są niewielkie [porównywalne z błędami obliczonymi za pomocą wyrażenia (3.47), p. wyniki doświadczalne w części 3.5], można uznać takie oszacowanie wielkości błędu za zadowalające.

Warto zwrócić uwagę na znaczny wkład niepewności kątów obrotu płytek falowych do całkowitego błędu macierzy gęstości. Dla niepewności $\Delta \theta = 0,5^{\circ}$ i liczb zliczeń rzędu 5000 błąd pochodzący od kątów obrotu stanowił ok. $\frac{2}{3}$ całkowitego błędu.

3.4.2 Entropia liniowa

W celu obliczenia błędu entropii liniowej (por. część 1.6.3) ΔS_L wyznaczmy najpierw jej pochodną po wielkościach s_n :

$$\frac{\partial S_L}{\partial s_n} = -\frac{8}{3} \sum_{i=1}^4 \lambda_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial s_n}.$$
(3.48)

Występującą w powyższym wyrażeniu pochodną cząstkową wartości własnej macierzy można obliczyć, korzystając z rachunku zaburzeń dla macierzy hermitowskich [11]. Pochodna ta jest dana przez:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s_n} = \langle v_i | \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial s_n} | v_i \rangle, \qquad (3.49)$$

gdzie $|v_i\rangle$ są wektorami własnymi $\hat{\rho}$. Ponieważ $\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{16} \hat{M}_n s_n$, otrzymujemy wyrażenie na szukaną pochodną cząstkową:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial s_n} = \langle v_i | \hat{M}_n | v_i \rangle. \tag{3.50}$$

Wstawiając to wyrażenie do (3.48) i wykonując serię przekształceń otrzymujemy:

$$\frac{\partial S_L}{\partial s_n} = -\frac{8}{3} \sum_{i=1}^4 \lambda_i \langle v_i | \hat{M}_n | v_i \rangle = -\frac{8}{3} \operatorname{Tr}(\hat{\rho} \hat{M}_n) =$$
(3.51)
$$= -\frac{8}{3} \sum_{m=1}^{16} \operatorname{Tr}(\hat{M}_m \hat{M}_n) s_m.$$

Ostatecznie błąd entropii liniowej dany jest przez:

$$(\Delta S_n)^2 = \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{\partial S_L}{\partial s_n}\right)^2 \delta s_n^2 = \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{8}{3} \sum_{m=1}^{16} \operatorname{Tr}(\hat{M}_m \hat{M}_n) s_m\right)^2 \delta s_n^2.$$
(3.52)

3.4.3 Współbieżność i splątanie

Współbieżność C określona jest przez wartości własne macierzy \hat{R} (1.65) utworzonej na podstawie macierzy gęstości $\hat{\rho}$ (1.63).

Aby obliczyć błąd C, należy wyznaczyć pochodną cząstkową $\frac{\partial C}{\partial s_n}$:

$$\frac{\partial C}{\partial s_n} = \sum_{i=1}^4 a_i \frac{1}{2\sqrt{r_i}} \frac{\partial r_i}{\partial s_n},\tag{3.53}$$

gdzie $a_1 = 1$, $a_i = -1$, i = 2, 3, 4. Pozostałe oznaczenia jak w części 1.6.4. Pochodną tę można wyznaczyć korzystając rachunku zaburzeń dla macierzy niehermitowskich (gdyż \hat{R} nie jest hermitowska) [11]:

$$\frac{\partial C}{\partial s_n} = \sum_{i=1}^4 a_i \frac{1}{2\sqrt{r_i}} \langle \xi_i | \frac{\partial \hat{R}}{\partial s_n} | \zeta_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^4 \sum_{m=1}^{16} a_i \frac{1}{2\sqrt{r_i}} \langle \xi_i | \hat{Q}_{m,n} s_n | \zeta_i \rangle,$$
(3.54)

gdzie $\langle \xi_i | i | \zeta_i \rangle$ są odpowiednio lewo- i prawostronnymi wektorami własnymi macierzy \hat{R} :

$$\langle \xi_i | \hat{R} = r_i \langle \xi_i |, \ \hat{R} | \zeta_i \rangle = r_i | \zeta_i \rangle, \tag{3.55}$$

znormalizowanymi tak, że $\langle \xi_i | \zeta_j \rangle = \delta_{ij}$, a macierze $\hat{Q}_{m,n}$ są zdefiniowane następująco:

$$\hat{R} = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{16} \hat{Q}_{m,n} s_m s_n.$$
(3.56)

Z powyższego wynika i z (1.63) wynika, że $\hat{Q}_{m,n} = \hat{M}_m \hat{\Sigma} \hat{M}_n^T \hat{\Sigma} + \hat{M}_n \hat{\Sigma} \hat{M}_m^T \hat{\Sigma}.$

Wykorzystując (3.54) możemy obliczyć błąd wyznaczenia współbieżności:

$$(\Delta C)^{2} = \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{\partial C}{\partial s_{n}}\right)^{2} \delta s_{n}^{2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{16} \left(\sum_{i=1}^{4} \sum_{m=1}^{16} a_{i} \frac{1}{2\sqrt{r_{i}}} \langle \xi_{i} | \hat{Q}_{m,n} s_{n} | \zeta_{i} \rangle \right)^{2} \delta s_{n}^{2}.$$
(3.57)

Obliczenie błędu wyznaczenia splątania ΔT na podstawie błędu ΔC jest bardzo proste, ze względu na prostą postać zależności (1.66):

$$\Delta T = 2C\Delta C. \tag{3.58}$$

3.4.4 Parametry tłumienia

Parametry tłumienia dla danej macierzy gęstości $\hat{\rho}$ (bądź dla danego odwzorowania S), której odpowiada macierz \mathbf{T} (macierz \mathcal{T}) określone są przez zmodyfikowany rozkład macierzy \mathbf{T} na wartości osobliwe (1.58). Ponieważ rozkład na wartości osobliwe nie jest szeroko stosowany do analizy danych pomiarowych, brak jest w literaturze opracowanego rachunku błędu dla tego rozkładu¹. Z tego powodu błąd zostanie tutaj oszacowany poprzez numeryczne obliczenie odpowiednich pochodnych.

Wyraźmy błąd parametrów tłumienia przez błędy 16 elementów macierzy gęstości $\hat{\rho}$. Dla wygody utwórzmy z 16 niezależnych parametrów określających macierz $\hat{\rho}$ 16-elementowy wektor $\vec{\rho}$. Błąd parametru tłumienia D_{ii} jest dany przez:

$$(\Delta D_{ii})^2 = \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{\partial D_{ii}}{\partial \rho_n}\right)^2 \delta \rho_n^2.$$
(3.59)

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial D_{ii}}{\partial \rho_n}$ zostały wyznaczone numerycznie, dzięki czemu w prosty sposób otrzymano oszacowanie błędu elementów macierzy tłumienia **D**. W (3.59) założono, że błędy poszczególnych ρ_n są statystycznie niezależne.

Parametry tłumienia Δ_{ii} odwzorowania całkowicie dodatniego obliczane są na podstawie dwóch macierzy gęstości – stanu początkowego i końcowego. Zależą zatem od 32 wielkości – 16 parametrów macierzy stanu początkowego $\hat{\rho}^i$ i 16 parametrów macierzy stanu końcowego $\hat{\rho}^f$. Błąd parametru tłumienia dany jest przez:

$$(\Delta \mathbf{\Delta}_{ii})^2 = \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{\partial \Delta_{ii}}{\partial \rho_n^i}\right)^2 \delta \rho_n^{i2} + \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{\partial \Delta_{ii}}{\partial \rho_n^f}\right)^2 \delta \rho_n^{f2}.$$
 (3.60)

 $^{^1}$ Wyjątkiem jest tu numeryczne prognozowanie pogody, jednakże, ponieważ w tym przypadku macierze poddawane rozkładowi na wartości osobliwe są ogromnych rozmiarów, stosowana jest metoda Monte Carlo, której użycie do macierzy 3×3 nie miałoby większego sensu.

Ponownie wszystkie pochodne cząstkowe zostały wyznaczone numerycznie.

Przedstawiona metoda została zastosowana do wszystkich zmierzonych macierzy gęstości, dając za każdym razem rozsądne wartości błędów (np. w przypadku stanów zdepolaryzowanych jednowymiarowo parametry tłumienia niosą tę samą informację co współbieżność; oszacowany powyższą metodą błąd parametrów tłumienia był porównywalny z błędem współbieżności, obliczonym za pomocą rachunku zaburzeń dla macierzy niehermitowskich). Pozwala to sądzić, że pomimo zastosowania numerycznego obliczania pochodnych, metodą tą otrzymuje się miarodajne oszacowanie błędu pomiarowego.

3.5 Zmierzone macierze gęstości

Po stwierdzeniu, że skonstruowane źródło dostarcza par fotonów splątanych w dużym stopniu, zmierzona została macierz gęstości generowanych par. Zmierzono 16 liczb koincydencji, dla każdej z nich czas zliczania wynosił 70 s. Monitorowano stabilność natężenia wiązki pompującej w czasie pomiaru. Liczba przypadkowych koincydencji została oszacowana na 3 w ciągu 70 s i została odjęta od otrzymanych liczb koincydencji.

Oszacowanie to opiera się na następującym rozumowaniu. W ciągu sekundy oscylator wytwarza R impulsów; w tym czasie rejestrowanych jest p_1 i p_2 pojedynczych zliczeń odpowiednio w ramieniu 1 i 2. Prawdopodobieństwo, że dany impuls oscylatora wygeneruje foton fluorescencji parametrycznej zarejestrowany w ramieniu *i* wynosi $\frac{p_i}{R}$. Gdyby wytwarzanie fotonów w każdym ramieniu było statystycznie niezależne, prawdopodobieństwo zarejestrowania koincydencji P_K byłoby iloczynem: $P_K = \frac{p_1}{R} \frac{p_2}{R}$. Liczba przypadkowych koincydencji w ciągu sekundy P jest zatem dana przez: $P = P_K R$. Dla danych z eksperymentu: $R = 8 \cdot 10^7$, $p_1 = p_2 = 1900$, co daje $P = \frac{1900^2}{8\cdot10^7} = 0.045$. Po pomnożeniu tej wielkości przez czas zliczania otrzymuje się oszacowaną liczbę 3 przypadkowych koincydencji.

Zmierzone liczby ko
incydencji przedstawiono poniżej w kolejności od n_1 d
o n_{16} :

4691, 31, 4624, 41, 2315, 2260, 2211, 2564,2092, 4689, 2031, 2480, 2398, 2366, 2561, 4592.

Macierz gęstości otrzymana metodą liniowej rekonstrukcji ma postać:



Rys. 3.3: Graficzna reprezentacja części rzeczywistej i urojonej macierzy gęstości $\hat{\rho}_P$ (3.62) obliczonej metodą największej wiarygodności.

$\hat{\rho}_{lin} = \tag{3.6}$						
	(0,500	-0,013 + 0,021i	-0,021 + 0,005i	0,469 - 0,056i)	
	-0,013 - 0,021i	0,003	0,002 - 0,018i	0,012 + 0,007i		
	-0,021 - 0,005i	0,002 + 0,018i	0,004	-0,007 + 0,004i	·	
	0,469 + 0,056i	0,012 - 0,007i	-0,007 - 0,004i	0,493)	

Łatwo sprawdzić, że macierz ta nie jest dodatnio określona. Jej wartości własne wynoszą: $\lambda_1 = 0.970, \lambda_2 = 0.047, \lambda_3 = 0.011, \lambda_4 = -0.027$. Natomiast macierz otrzymana metodą największej wiarygodności:

$$\hat{\rho}_{P} =
\begin{pmatrix}
0,508 & -0,004 + 0,010i & -0,018 + 0,009i & 0,464 - 0,063i \\
-0,004 - 0,010i & 0,003 & 0,003 - 0,000i & 0,003 - 0,000i \\
-0,018 - 0,009i & 0,003 + 0,000i & 0,004 & -0,011 + 0,005i \\
0,464 + 0,063i & 0,003 + 0,000i & -0,011 - 0,005i & 0,485
\end{pmatrix}$$
(3.62)

jest macierzą dodatnio określoną, gdyż posiada nieujemne wartości własne: $\lambda_1 = 0.966, \lambda_2 = 0.034, \lambda_3 = 0.000, \lambda_4 = 0.000$. Łatwo zauważyć, że macierze wyznaczone obydwoma sposobami tylko nieznacznie się od siebie różnią. Poniżej przedstawiono różnicę macierzy $\hat{\rho}_{lin}$ i $\hat{\rho}_P$:

$$\hat{\rho}_{lin} - \hat{\rho}_P = (3.63)$$

$$\begin{pmatrix}
-0,008 & -0,009 + 0,011i & -0,003 - 0,004i & 0,005 + 0,007i \\
-0,009 - 0,011i & -0,000 & -0,001 - 0,018i & 0,009 + 0,007i \\
-0,003 + 0,004i & -0,001 + 0,018i & -0,000 & 0,004 - 0,001i \\
0,005 - 0,007i & 0,009 - 0,007i & 0,004 + 0,001i & 0,008
\end{pmatrix}.$$



Rys. 3.4: Graficzna reprezentacja części rzeczywistej i urojonej macierzy gęstości $\hat{\rho}_{P}^{(2)}$ (3.67) obliczonej metodą największej wiarygodności.

Porównajmy tę różnicę z macierzą oszacowanych błędów $\Delta \hat{\rho}$:

$$\begin{split} \Delta \hat{\rho}_P &= (3.64) \\ \begin{pmatrix} 0,010 & 0,024 + 0,007i & 0,026 + 0,002i & 0,025 + 0,028i \\ 0,024 - 0,007i & 0,024 & 0,004 + 0,028i & 0,009 + 0,027i \\ 0,026 - 0,002i & 0,004 - 0,028i & 0,012 & 0,026 + 0,005i \\ 0,025 - 0,028i & 0,009 - 0,027i & 0,026 - 0,005i & 0,020 \end{pmatrix} \end{split}$$

(błędy zostały obliczone na podstawie macierzy gęstości $\hat{\rho}_P$, ale, jak już wspomniano, różnice pomiędzy oszacowaniem błędów dla macierzy zrekonstruowanych liniowo i metodą największej wiarygodności są nieistotne). Różnice pomiędzy elementami macierzy $\hat{\rho}_{lin}$ i $\hat{\rho}_P$ są mniejsze, bądź (w nielicznych przypadkach) porównywalne z oszacowanym błędem doświadczalnym.

Zmierzona macierz gęstości jest bliska macierzy gęstości stanu Bella $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle):$

$$\hat{\rho}_{Bell} = \frac{1}{2} (|00\rangle + |11\rangle) (\langle 00| + \langle 11|) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$
(3.65)

Entropia liniowa dla macierzy $\hat{\rho}_P$ wynosi: $S_L(\hat{\rho}_P) = 0.09 \pm 0.10$. Entropia jest niewielka, a więc $\hat{\rho}_P$ jest stanem w znacznym stopniu czystym. Współbieżność obliczona dla macierzy $\hat{\rho}_P$ daje: $C(\hat{\rho}_P) = 0.94 \pm 0.08$. Wartość C bliska jedności potwierdza, że mamy do czynienia ze stanem w dużym stopniu splątanym.

Macierz gęstości $\hat{\rho}_P$ przedstawiona została graficznie na rys. 3.3.

Jako kolejny przykład przedstawiona zostanie macierz gęstości stanu odbiegającego nieco bardziej od stanu $|\Phi^+\rangle$ ze względu na niedokładną optymalizację źródła. Czas zliczania wynosił 80 s, średnia liczba przypadkowych koincydencji w tym czasie wynosiła 4. Poniżej zamieszczone zostały zmierzone liczby zliczeń:

5837, 41, 6424, 48, 2435, 3094, 3198, 2833, 3498, 5697, 3458, 2608, 3183, 3038, 2692, 5390.

oraz macierz gęstości obliczona na ich podstawie metodą liniową:

 $\hat{\rho}_{lin}^{(2)} = (3.66)$ $\begin{pmatrix} 0,473 & 0,027 - 0,020i & 0,009 + 0,041i & 0,464 + 0,093i \\ 0,027 + 0,020i & 0,003 & 0,002 + 0,051i & 0,003 + 0,011i \\ 0,009 - 0,041i & 0,002 - 0,051i & 0,003 & 0,004 - 0,016i \\ 0,464 - 0,093i & 0,003 - 0,011i & 0,004 + 0,016i & 0,521 \end{pmatrix},$

a także macierz obliczona metodą największej wiarygodności:

$\hat{\rho}_P^{(2)} =$ (3.67)						
($0,\!467$	0,018 - 0,013i	0,007 + 0,028i	0,447 + 0,086i)	
	0,018 + 0,013i	0,003	-0,001 + 0,003i	0,009 + 0,007i		
	0,007 - 0,028i	-0,001 - 0,003i	0,004	0,002 - 0,018i	·	
	$0,\!447 - 0,\!086i$	0,009 - 0,007i	0,002 + 0,018i	0,526)	

Macier
z $\hat{\rho}_P^{(2)}$ została przedstawiona graficznie na rys. 3.4.

Podobnie jak poprzednio, macier
z $\hat{\rho}_{lin}^{(2)}$ jest ujemnie określona; jednocześnie różnice pomiędzy oby
dwiema macierzami są niewielkie:

$$\hat{\rho}_{lin}^{(2)} - \hat{\rho}_{P}^{(2)} =$$

$$\begin{pmatrix} 0,006 & 0,009 - 0,007i & 0,002 + 0,013i & 0,017 + 0,007i \\ 0,009 + 0,007i & -0,000 & 0,003 + 0,048i & -0,006 + 0,004i \\ 0,002 - 0,013i & 0,003 - 0,048i & -0,000 & 0,002 + 0,002i \\ 0,017 - 0,007i & -0,006 - 0,004i & 0,002 - 0,002i & -0,006 \end{pmatrix}.$$

$$(3.68)$$

Porównajmy te różnice z błędami oszacowanymi dla macierzy $\hat{\rho}_P^2$:

$$\begin{split} \Delta \hat{\rho}_P^2 = & (3.69) \\ \begin{pmatrix} 0,012 & 0,024 + 0,007i & 0,026 + 0,003i & 0,025 + 0,029i \\ 0,024 - 0,007i & 0,022 & 0,003 + 0,029i & 0,009 + 0,027i \\ 0,026 - 0,003i & 0,003 - 0,029i & 0,012 & 0,028 + 0,005i \\ 0,025 - 0,029i & 0,009 - 0,027i & 0,028 - 0,005i & 0,022 \end{split} \end{split}$$

Ponownie różnice pomiędzy macierzami są mniejsze, bądź porównywalne z oszacowanymi błędami.

Entropia liniowa stanu opisanego macierzą $\hat{\rho}_P^{(2)}$ wynosi $S_L(\hat{\rho}_P^{(2)}) = 0.10 \pm 0.12$, a współbieżność $C(\hat{\rho}_P^{(2)}) = 0.92 \pm 0.09$. Stan $\hat{\rho}_P^{(2)}$ ma entropię bliską entropii stanu $\hat{\rho}_P$, natomiast jego współbieżność jest mniejsza. Dzieje się tak, ponieważ stan $\hat{\rho}_P^{(2)}$ odbiega od stanu o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach. Ślady częściowe macierzy $\hat{\rho}_P^{(2)}$ wynoszą:

$$\operatorname{Tr}_{A}\hat{\rho}_{P}^{2} = \begin{pmatrix} 0.47 \pm 0.02 & 0.02 \pm 0.04 - (0.03 \pm 0.01)i \\ 0.02 \pm 0.04 + (0.03 \mp 0.01)i & 0.53 \mp 0.02 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr}_{B}\hat{\rho}_{P}^{2} = \begin{pmatrix} 0.47 \pm 0.025 & 0.02 \pm 0.03 + (0.04 \pm 0.03)i \\ 0.02 \pm 0.03 - (0.04 \mp 0.03)i & 0.53 \mp 0.025 \end{pmatrix}$$

Elementy diagonalne tych macierzy są od siebie istotnie różne, co oznacza, że pojedyncze fotony pary nie są całkowicie zdepolaryzowane. Stan całkowicie splątany musi być stanem o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach – odstępstwo od tego warunku powoduje spadek stopnia splątania, którego miarą jest współbieżność.

Podsumowując, pomiar macierzy gęstości zbliżonych do macierzy stanu Bella $|\Phi^+\rangle$ potwierdza poprawność działania skonstruowanego źródła splątanych par fotonów oraz poprawność zastosowanej metody rekonstrukcji macierzy gęstości. Wyjaśnienia wymaga wyraźnie różny od zera wkład części urojonych elementów macierzy gęstości $\hat{\rho}_{41}$ i $\hat{\rho}_{14}$. Zgodnie z równaniem (2.3), źródło par splątanych w ogólności generuje pary w stanie:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + e^{i\varphi}|11\rangle). \tag{3.70}$$

Stanowi temu odpowiada macierz gęstości:

$$\begin{split} |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{2} (|00\rangle\langle00| + |11\rangle\langle11| + e^{i\varphi}|11\rangle\langle00| + e^{-i\varphi}|00\rangle\langle11|) = \qquad (3.71) \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5(\cos\varphi - i\sin\varphi) & 0 & 0 & 0,5 \\ \end{pmatrix}. \end{split}$$

Obecność różnych od zera części urojonych elementów $\hat{\rho}_{41}$ i $\hat{\rho}_{14}$ jest skutkiem niepełnej kompensacji przesunięcia fazowego φ i nie powoduje redukcji jakości splątania pary fotonów. Mniejsza od jedności wartość współbieżności jest spowodowana natomiast mniejszą od jedności wartością modułu tych elementów.

Rozdział 4

Depolaryzacja

W części pierwszej tego rozdziału omówiona zostanie budowa pełnego układu doświadczalnego wykorzystanego do pomiarów depolaryzacji splątanych par fotonów. Depolaryzowane one były za pomocą światłowodowego kontrolera polaryzacji, który zostanie opisany w części drugiej.

4.1 Pełny układ doświadczalny

Pełny wykorzystany układ doświadczalny składał się z 4 części: źródła splątanych par fotonów (rozdział 2), elementów do pomiaru macierzy gęstości (rozdział 3), układu depolaryzującego i liczników pojedynczych fotonów wraz z elektronicznym układem koincydencyjnym. Schemat układu przedstawiony został na rys. 4.1

Jak łatwo zauważyć, ramię 1 układu nie zostało zmienione w stosunku do opisu w rozdziale 3. Zmiany, w tym dodatkowe elementy, pojawiły się w ramieniu 2. Podstawową modyfikacją jest przeniesienie elementów służących do pomiaru macierzy gęstości, tzn. płytki półfalowej H2 i ćwierćfalowej Q2 oraz kostki polaryzującej PBS2, za światłowodowe kontrolery polaryzacji. Pozostałe elementy dodane w ramieniu 2 służyły do kontroli polaryzacji oraz do depolaryzacji.

Na światłowodzie w ramieniu 2 umieszczone zostały dwa kontrolery polaryzacji. Pierwszy z nich, ręczny (FPC), służył do skompensowania zmian polaryzacji wprowadzanych przez światłowód tak, by na wyjściu (za soczewką AL3) stan polaryzacji światła był taki jak na wejściu do światłowodu. Skompensowanie tych zmian było konieczne, by możliwa była optymalizacja stanu splątanego generowanego przez źródło według procedury opisanej w części 2.3. Drugim kontrolerem był sterowany elektrycznie kontroler polaryzacji typu EPC-400 firmy OZ-Optics (Kanada). Kontroler składał się z



Rys. 4.1: Układ doświadczalny. DL – laser diodowy 780 nm; P – układ polarymetryczny; SPC – (nieświatłowodowy) licznik pojedynczych fotonów; FPC – ręczny światłowodowy kontroler polaryzacji; EPC – elektryczny światłowodowy kontroler polaryzacji; A – wzmacniacz prądu. Pozostałe oznaczenia jak na rys. 2.2 i 3.1.

4 siłowników sterowanych przykładanym do nich napięciem, których działanie można przybliżyć działaniem 4 liniowych płytek falowych o regulowanym przesunięciu fazowym. Dla dużych przesunięć fazowych (przekraczających $\pm \pi$) występowały znaczne odstępstwa od tego przybliżenia. Dodatkowo, ze względu na to, że siłowniki były sterowane magnetycznie, urządzenie wykazywało istotną histerezę. Więcej szczegółów na temat kontrolera znajduje się w części 4.2.

Ze względu na histerezę, a w konsekwencji brak możliwości przewidzenia, jak konkretna sekwencja napięć przykładanych do kontrolera przełoży się na przekształcenia stanu polaryzacji, konieczna była możliwość kontroli efektów działania urządzenia. W tym celu do światłowodu w ramieniu 2, za pomocą uchylnego zwierciadła M3 wprowadzana była wiązka lasera diodowego DL o długości fali 780 nm i mocy 5 mW. Polaryzacja wiązki mogła być zmieniana poprzez obracanie kostki polaryzującej PBS3 oraz płytki ćwierćfalowej Q3. Aby wprowadzić wiązkę do światłowodu, należało odpowiednio ją ukształtować. Służyła do tego para soczewek L5 i L6, przy czym soczewka L5 była zamocowana na stoliku przesuwnym w kierunku z, aby umożliwić precyzyjną regulację położenia ogniska.

Po przejściu przez kontroler polaryzacji wiązka, skolimowana przez soczewkę asferyczną AL3, kierowana była za pomocą uchylnego zwierciadła M4 do układu polarymetrycznego własnej konstrukcji, dokonującego jednoczesnego pomiaru 4 parametrów Stokesa i wyznaczającego stan polaryzacji z dokładnością do 5° na sferze Poincarégo. Przed właściwym pomiarem działanie określonej sekwencji napięć było badane za pomocą układu polarymetrycznego i dokonywane były ewentualne korekty napięć przykładanych do siłowników kontrolera. Po uzyskaniu zadowalającej sekwencji zmian stanu polaryzacji światła zwierciadła M3 i M4 były usuwane z drogi wiązki i wykonywane były właściwe pomiary macierzy gęstości.

Zliczanie fotonów w ramieniu 1 odbywało się za pomocą światłowodowego licznika fotonów, zgodnie z opisem w rozdziale 2. W ramieniu 2 wiązka trafiała do detektora (SPC) bezpośrednio, tzn. bez ponownego wprowadzania wiązki do światłowodu. Jako detektor używany był licznik pojedynczych fotonów SPCM-AQ-131 (Perkin Elmer). Powierzchnia światłoczuła detektora miała średnicę 150 μ m, w związku z tym wiązka była ogniskowana na powierzchni detektora za pomocą soczewek L3 i L4 o ogniskowych 400 mm i 75 mm do promienia $w_0 = 70 \ \mu$ m. Zwierciadło dielektryczne M5 użyte zostało do trafienia wiązką w światłoczułą powierzchnię licznika fotonów; do wstępnego pozycjonowania wiązki użyto wiązki z lasera DL. Aby zminimalizować liczbę ciemnych zliczeń detektor SPC umieszczony został w szczelnym pudełku o czarnych ściankach.

Ponieważ droga optyczna w ramieniu drugim stała się znacząco dłuższa od

drogi w ramieniu pierwszym, sygnał z ramienia pierwszego przed trafieniem do układu koincydencyjnego był opóźniany o 6 ns.

Po umieszczeniu wszystkich dodatkowych elementów w ramieniu drugim, liczba rejestrowanych ko
incydencji spadła o połowę, do ok. 280 $\rm s^{-1}.$

W celu sprawdzenia poprawności działania detektorów zmierzona została macierz gęstości stanu dwufotonowego po przejściu fotonów w ramieniu 2 przez kontroler polaryzacji (ustawiony w położeniu zerowym). Zmierzony stan był nadal stanem w dużym stopniu splątanym, o współbieżności równej 0.92 ± 0.08 .

4.2 Kontroler polaryzacji

Najważniejszym elementem części układu doświadczalnego odpowiedzialnej za kontrolę polaryzacji był światłowodowy kontroler polaryzacji EPC-400. Kontroler ten składał się z 4 aktywnych elementów – siłowników ściskających światłowód siłą proporcjonalną do przyłożonego do nich napięcia. Ściskanie światłowodu wprowadzało w nim dwójłomność liniową. Pojedynczy siłownik działał więc jak liniowa płytka falowa o zmiennym przesunięciu fazowym, zależnym od przyłożonego napięcia. Według producenta, kierunki ściskania poszczególnych siłowników powinny były być obrócone o 45° względem siebie. Oznacza to, że działanie siłowników na stan polaryzacji powinno odpowiadać obrotom na sferze Poincarégo wokół osi leżacych w jednej płaszczyźnie i skierowanych pod kątem 90° względem siebie [34]. Jednakże, na podstawie zmierzonych przekształceń stanów polaryzacji stwierdzono, że osie obrotów odpowiadających działaniu siłowników nie są do siebie prostopadłe (rozbieżności były dość znaczne, dochodzące do 45°). Dla znaczniejszych przesunięć fazowych (przekraczających $\pm \pi$) działanie kontrolera zaczynało odbiegać od przedstawionego wyżej opisu, głównie ze względu na odstępstwa od modelu liniowej płytki falowej oraz sprzężenia pomiędzy poszczególnymi siłownikami.

Dodatkowo, ze względu na fakt, że siłowniki wykorzystywały pole magnetyczne do ściskania światłowodu, w działaniu urządzenia pojawiała się istotna histereza: różnica we wprowadzanym przesunięciu fazowym przy przebiegu w górę i w dół dochodziła do 0.7π .

Kontroler polaryzacji był sterowany napięciami z zakresu $-5 \text{ V} \div +5 \text{ V}$ za pomocą karty PCI-6723 (National Instruments, USA). Urządzenie pobierało prąd o stosunkowo dużym natężeniu (do 100 mA na kanał), gdyż światłowód ściskany był za pomocą pola magnetycznego. Konieczne było zatem prądowe wzmocnienie sygnału z karty – służył do tego czterokanałowy wtórnik napięciowy A.

Ze względu na histerezę urządzenia konieczne było jednoznaczne ustalenie
punktu zerowego. Jako punkt zerowy przyjęty został stan kontrolera, gdy do każdego siłownika przyłożone było zerowe napięcie i napięcie to zostało osiągnięte od dołu (tzn. od napięcia -5 V do 0).

Depolaryzacja za pomocą kontrolera EPC polegała na szybkim przełączaniu pomiędzy kilkoma zestawami napięć określającymi odpowiednie przekształcenia na sferze Poincarégo (por. 1.4). Czas trwania cyklu przełączeń musiał być dużo krótszy niż czas pomiaru jednej liczby koincydencji w trakcie wyznaczania macierzy gęstości. Typowo czas zliczania wynosił 80 – 100 s, a czas wykonania całego cyklu ustawień kontrolera nie przekraczał 2 s.

Ustalenia, jakiemu przekształceniu stanu polaryzacji odpowiada dany zestaw napięć, dokonywano używając wiązki z lasera diodowego DL. Ponieważ światło było doprowadzane i wyprowadzane z kontrolera za pomocą światłowodów, jego stan polaryzacji był modyfikowany, zarówno w światłowodzie doprowadzającym, jak i wyprowadzającym. Działanie każdego z tych światłowodów na stan polaryzacji można opisać pewnym dowolnym obrotem na sferze Poincarégo. Stan polaryzacji opisany na wejściu do światłowodu wektorem **s** na sferze Poincarégo, na wyjściu będzie opisany wektorem:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{R}(V_1, V_2, V_3, V_4) \mathbf{s} = \mathbf{O}_2 \mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4) \mathbf{O}_1 \mathbf{s},$$
(4.1)

gdzie: macierz $\mathbf{R}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ jest macierzą opisującą przekształcenie dokonywane przez kontroler wraz z doprowadzeniami; macierze \mathbf{O}_1 i \mathbf{O}_2 są ustalonymi macierzami obrotu odpowiadającymi przekształceniom stanu polaryzacji przez światłowody doprowadzające; macierz $\mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ jest zależną od czterech napięć macierzą obrotu opisującą działanie kontrolera polaryzacji. Ponieważ macierze O_1 i O_2 nie są znane, nie jest możliwe wyznaczenie macierzy $\mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ w znanym układzie odniesienia. Nie jest to problemem, gdyż informacja taka nie jest potrzebna do przeprowadzenia kontrolowanej depolaryzacji. Zgodnie ze wstępem teoretycznym w rozdziale 1, efekty depolaryzacyjne nie zależą od ustalonych obrotów układu odniesienia postaci 4.1. Aby zrealizować depolaryzację odpowiadającą dowolnemu dozwolonemu ściśnieciu sfery Poincarégo, wystarczy dysponować 3 obrotami o 180° wokół osi prostopadłych względem siebie (obroty te odpowiadają macierzom Pauliego) oraz identycznością. Ponieważ ustalony obrót \mathbf{O}_i jest przekształceniem zachowującym długości wektorów i katy między nimi, jest jasne, że jeśli 3 ustawienia kontrolera będą odpowiadały trzem obrotom spełniającym powyższy warunek, to działanie całego kontrolera wraz doprowadzeniami również będzie odpowiadało 3 obrotom o 180° wokół osi wzajemnie prostopadłych.

Istotny aspekt przekształceń dokonywanych przez kontroler EPC – wzajemne ustawienie osi obrotu i wartość kątów, o jaki dokonywane są obroty – można więc badać, mierząc macierze $\mathbf{R}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ zamiast $\mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4)$. Pomiar macierzy $\mathbf{R}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ polegał na określeniu działania kontrolera (wraz z doprowadzeniami) na 3 bazowe stany polaryzacji na sferze Poincarégo: polaryzację poziomą (oznaczmy ją wektorem $\hat{\mathbf{e}}_x$), ukośną pod kątem 45° ($\hat{\mathbf{e}}_y$) i kołową lewoskrętną ($\hat{\mathbf{e}}_z$). Zbiór 3 wektorów bazowych był przekształcany na zbiór 3 wektorów opisujących stany polaryzacji po obrocie opisanym macierzą $\mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4)$:

$$\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\} \longrightarrow \{\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z\}, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{U}\hat{\mathbf{e}}_i$$

$$(4.2)$$

Gdy macierz U wyrażona jest w bazie $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ zachodzi:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{U}\hat{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ U_{3i} \end{pmatrix}$$
(4.3)

Wektory \mathbf{f}_i są więc kolumnami macierzy obrotu U:

$$\mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4) = [\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z]$$

$$(4.4)$$

Znając macierz $\mathbf{U}(V_1, V_2, V_3, V_4)$, łatwo można wyznaczyć kierunek osi obrotu oraz kąt obrotu [35]. W tym celu obliczane były wektory własne i wartości własne macierzy \mathbf{U} . Jedna z wartości własnych macierzy obrotu jest zawsze równa jedności ($\lambda_1 = 1$), natomiast pozostałe dwie są postaci $\lambda_2 = e^{i\phi}, \lambda_3 = e^{-i\phi}$, gdzie ϕ jest kątem obrotu. Wyznaczenie kąta obrotu sprowadza się zatem do obliczenia argumentu wartości własnej nie będącej jedynką. Kierunek osi obrotu określa wektor własny odpowiadający wartości własnej równej 1.

Ze względu na histerezę oraz na nieprostopadłość osi obrotu odpowiadających kolejnym siłownikom kontrolera, poszukiwanie zestawu napięć odpowiadającego żądanemu zbiorowi przekształceń (obrotów) odbywało się przez skanowanie wszystkich 4 stopni swobody siłownika, a następnie przeszukiwanie uzyskanego w ten sposób zbioru macierzy obrotów.

Konkretne przekształcenia stanu polaryzacji wykorzystane podczas pomiarów przedstawione zostaną w następnym rozdziale, wraz z omówieniem wyników. W tym miejscu warto tylko nadmienić, że z dużą dokładnością udało się zrealizować pojedynczy obrót o 180°. Udało się również, w pewnym przybliżeniu, zrealizować dwa obroty o 180° o osiach prostopadłych. Nie powiodły się natomiast próby uzyskania zbioru 3 obrotów o osiach wzajemnie prostopadłych. Przyczynami niemożności uzyskania takiego zbioru były najprawdopodbniej:

- 1. nieprostopadłość osi obrotów odpowiadających działaniu siłowników;
- histereza, powodująca, że w cyklu stan zerowy obrót stan zerowy, układ w rzeczywistości nie wracał do punktu zerowego; oczywiście próbowano skompensować efekt histerezy, przykładając odpowiednie napięcia również w stanie zerowym, ale trudno było w pełni skompensować pozostałość histerezy w ten sposób;
- szumy zasilania kontrolera polaryzacji szumy te nie powodowały niestabilności działania kontrolera, gdyż ich częstości była znacznie wyższa niż pasmo kontrolera; mogły one jednak wpływać na sprzężenia pomiędzy kanałami.

Rozdział 5 Wyniki pomiarów i wnioski

Zanim przejdziemy do prezentacji wyników doświadczalnych, przypomnijmy jeszcze raz istotę pomiarów. Źródło par splątanych wytwarzało pary fotonów w stanie bliskim stanowi Bella $|\Phi^+\rangle$. Jeden z fotonów przed dotarciem do elementów służących do pomiaru macierzy gęstości (a więc do szerzej pojętego detektora) nie był poddawany żadnym przekształceniom (oprócz zaniedbywalnie małego przesunięcia fazowego wprowadzanego przez zwierciadło M1). Drugi foton przechodził przez dwa kontrolery polaryzacji: ręczny FPC i elektrycznie sterowany EPC. Kontroler FPC był ustawiony tak, że w przypadku, gdy kontroler EPC znajdował się w położeniu zerowym, stan polaryzacji fotonu po przejściu przez oba kontrolery (czyli za soczewką AL3) pozostawał niezmieniony, z dokładnością do 5° na sferze Poincarégo.

Jako pierwszy wykonywany był pomiar macierzy gęstości stanu przy EPC w położeniu zerowym, czyli stanu nie poddanemu żadnym przekształceniom (stan nie poddany żadnym przekształceniom będzie od tego momentu nazywany stanem wyjściowym). Następnie poprzez przykładanie do kontrolera EPC odpowiednich napięć realizowane były przekształcenia stanu polaryzacji fotonu odpowiadające określonym odwzorowaniom (ang. *quantum channels*). Jako odwzorowanie traktowane będzie złożenie przekształceń stanu polaryzacji dokonywanych przez światłowody doprowadzające i wyprowadzające oraz oba kontrolery polaryzacji: obszar, na którym stan fotonu podlega odwzorowaniu, rozpoczyna się więc za soczewką AL2, a kończy przed soczewką AL3.

Stany poddane przekształceniom charakteryzowane były poprzez pomiar ich macierzy gęstości. Na podstawie macierzy gęstości obliczane były wszystkie istotne parametry wyjściowego stanu dwufotonowego oraz rekonstruowana była postać zastosowanego odwzorowania. Rekonstrukcja odwzorowania oznacza realizację tomografii procesu kwantowego (QPT).

5.1 Pomiary wstępne

Zanim wykonano właściwe serie pomiarów, przeprowadzono kilka pomiarów wstępnych, mających na celu m. in. sprawdzenie stabilności działania źródła par splątanych. W tym celu w pewnych odstępach czasowych (ok. 1 godziny) zmierzono macierze gęstości stanu wyjściowego i porównano je ze sobą. Różnica była mniejsza niż wartość błędu pomiarowego, co pozwala przyjąć, że działanie źródła było stabilne w czasie, a co za tym idzie, stan wyjściowy nie ulegał istotnym zmianom w trakcie wykonywania serii pomiarów.

Kolejnym pomiarem wstępnym było sprawdzenie, jak odwzorowanie unitarne zastosowane do jednego z fotonów pary wpływa na zmianę parametrów tłumienia D_{ii} stanu dwufotonowego. Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi zastosowanie odwzorowania unitarnego nie powinno spowodować żadnej zmiany parametrów tłumienia (z dokładnością do znaku i kolejności, por. 1.3).

Wektor parametrów tłumienia stanu wyjściowego został wyznaczony jako:

$$\vec{D}_1 = [0.98 \pm 0.06; -0.94 \pm 0.05; \ 0.93 \pm 0.06]$$

$$(5.1)$$

(znaki parametrów tłumienia wybrano arbitralnie, ze względu na ich niejednoznaczność, por. 1.3).

Następnie zastosowane zostało odwzorowanie unitarne – do jednego z siłowników kontrolera polaryzacji przyłożono napięcie odpowiadające przesunięciu fazowemu o ok. $\frac{\pi}{2}$. Parametry tłumienia przekształconego stanu są określone przez:

$$\hat{D}_2 = [0.98 \pm 0.06; -0.97 \pm 0.03; 0.96 \pm 0.06].$$
 (5.2)

Zgodnie z oczekiwaniami, parametry tłumienia nie uległy istotnym zmianom. Potwierdza to, że zastosowanie odwzorowania unitarnego nie powoduje depolaryzacji stanu.

5.2 Depolaryzacja jednowymiarowa

Przedstawione zostaną teraz wyniki serii pomiarów dla odwzorowań nieunitarnych, tzn. powodujących depolaryzację. Odwzorowanie realizowane było, zgodnie z opisem podanym w podrozdziale 1.4, poprzez statystyczną mieszaninę dwóch odwzorowań unitarnych: identyczności oraz obrotu o π . Należy tu nadmienić, że zmiany odwzorowań unitarnych realizowane były w sposób deterministyczny, poprzez wielokrotne powtarzanie ustalonego przebiegu tych odwzorowań. Z tego powodu uzyskane stany nie są rzeczywiście stanami zdepolaryzowanymi – eksperymentator dysponujący informacją o zastosowanym przebiegu odwzorowań byłby w stanie bez strat odtworzyć niezdepolaryzowany stan wyjściowy. Stan rzeczywiście zdepolaryzowany można zrealizować dokonując losowego wyboru odwzorowań, z zadanym rozkładem prawdopodobieństwa (korzystając na przykład z generatora liczb losowych). Nie zrealizowano takiej depolaryzacji, ze względu na histerezę kontrolera polaryzacji.

Stosując metodę opisaną w części 4.2 stwierdzono, że kontroler rzeczywiście powoduje obrót stanu polaryzacji o 180°. W trakcie pomiaru co 150 μ s zmieniany był stan kontrolera polaryzacji pomiędzy dwoma wyżej wymienionymi położeniami. W zależności od stopnia depolaryzacji, udział jednego lub drugiego przekształcenia był odpowiednio zmniejszany lub zwiększany.

Dla każdej macierzy sprawdzano, czy obydwa ślady częściowe dają macierz stanu całkowicie zdepolaryzowanego.

W tabeli 5.1 oraz na wykresie 5.2a zamieszczone są zmierzone parametry tłumienia stanów poddanych w różnym stopniu depolaryzacji. Parametry te zostały porównane z parametrami, które obliczono teoretycznie w następujący sposób: na macierz gęstości stanu wyjściowego $\hat{\rho}_0$ podziałano odwzorowaniem $\hat{S} = a\hat{\sigma}_1 \otimes \mathbb{1} + (1-a)\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$, zgodnie z opisem w części 1.4:

$$\hat{\rho}_a = \hat{S}\hat{\rho}_0 \hat{S}^{\dagger} = a\hat{\rho}_{\pi} + (1-a)\hat{\rho}, \qquad (5.3)$$

gdzie przez $\hat{\rho}_{\pi}$ oznaczono stan "obrócony" o π : $\hat{\rho}_{\pi} = (\hat{\sigma}_1 \otimes \mathbb{1})\hat{\rho}_0(\hat{\sigma}_1 \otimes \mathbb{1})$. Dla macierzy $\hat{\rho}_a$ obliczano odpowiadające jej parametry tłumienia. Jako reprezentację obrotu przyjęto $\hat{\sigma}_1$, czyli obrót wokół osi x, gdyż parametry tłumienia są niezmiennicze ze względu na odwzorowania unitarne; w praktyce, ze względu na nieznaną dwójłomność wprowadzaną przez światłowody doprowadzające, kierunek osi obrotu nie był znany.

Ponieważ wiadomo było, że stan wyjściowy jest bliski stanowi Bella $|\Phi^+\rangle$, przyjęte na tej podstawie zostały odpowiednie znaki parametrów tłumienia. Depolaryzacja pomiędzy dwoma stanami odpowiada punktom na czworościanie (rys. 5.1) leżącym na jednej z trzech krawędzi rozpoczynających się w punkcie (1, -1, 1). Wybór krawędzi został dokonany arbitralnie: wybór krawędzi odpowiada przepermutowaniu, wraz z odpowiednimi zmianami znaków, elementów wektora parametrów tłumienia, czyli operacjom, względem których rozkład na wartości osobliwe jest niejednoznaczny.

Na podstawie tab. 5.1 oraz rys. 5.1 łatwo stwierdzić, że zmierzone parametry tłumienia wykazują dobrą zgodność z obliczonymi teoretycznie. Warto zwrócić uwagę na fakt, że stany poddane depolaryzacji bardzo długo pozostają stanami splątanymi. Jest to zgodne z przewidywaniami – dopiero stany o dwóch parametrach tłumienia bliskich zeru znajdują się wewnątrz ośmiościanu stanów separowalnych. Stany zdepolaryzowane w ten sposób zachowują znaczny stopień uporządkowania. Świadczy o tym wartość entropii liniowej, która dla stanu $|\Phi^+\rangle$ poddanemu działaniu odwzorowania $0.51 + 0.5\mathbf{R}$ wynosić powinna $\frac{2}{3}$. Dla zrealizowanych stanów entropia osiągnęła maksymalną wartość 0.70 ± 0.06 , por. wykres 5.2b. O nieklasyczności tych stanów świadczą wartości własne ich macierzy gęstości: wraz ze wzrostem stopnia depolaryzacji, dwie wartości własne wyrównują swoje wartości, natomiast dwie pozostałe pozostają bliskie zeru. Taką własność macierzy gęstości można łatwo uzasadnić. Zgodnie ze wstępem teoretycznym 1.1.2, każdy stan dwufotonowy można przedstawić, z dokładnością do odwzorowań unitarnych, jako mieszaninę 4 stanów Bella (odpowiadających wierzchołkom czworościanu \mathcal{F}). Macierze gęstości stanów Bella mają jedną wartość własną różną od zera. Ponieważ stany Bella są wzajemnie ortogonalne, macierz gęstości wyrażająca się jako suma tych stanów będzie miała tyle niezerowych wartości własnych, przez ile stanów Bella będzie się wyrażać.

Charakterystyczne dla stanów zdepolaryzowanych jednowymiarowo są ponadto korelacje pomiędzy polaryzacjami: dla 16 pomiarów korelacji używanych do wyznaczenia macierzy gęstości, liczby zliczeń zbliżały się wraz ze wzrostem stopnia depolaryzacji do liczb zliczeń dla stanu całkowicie nieuporządkowanego. Wyjątkiem były zliczenia w bazie $|D_-D_-\rangle$ – liczba koincydencji w tej bazie pozostawała niezmiennie na maksymalnym poziomie.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia i przeanalizowania parametrów odw
zorowań, które zostały zastosowane do stanu wyjściowego, czyli do omówienia rezultatów tomografii procesów kwantowych (QPT). Macier
z \mathcal{T} odw
zorowania została wyznaczona, zgodnie z opisem w części 1.6.2, ze wz
oru: $\mathcal{T} = \mathbf{T}'\mathbf{T}^{-1}$, gdzie \mathbf{T} jest macierzą stanu wyjściowego,
a \mathbf{T}' – stanu poddanego przekształ-ceniu.

Następnie macierz \mathcal{T} była poddana zmodyfikowanemu rozkładowi na wartości osobliwe. Parametry tłumienia zastosowanych odwzorowań wraz z błędami zamieszczone są w tabeli 5.2. Zmierzone parametry wykazują dużą zgodność z przewidywaniami teoretycznymi. W tabeli 5.2 podano także rozkład zrealizowanych odwzorowań na podstawowe odwzorowania unitarne – tożsamość oraz obroty o 180° wokół osi wzajemnie prostopadłych:

$$\boldsymbol{\Delta} = a_{e1} \mathbf{1} + a_{e2} \mathbf{R}_x + a_{e3} \mathbf{R}_y + a_{e4} \mathbf{R}_z, \tag{5.4}$$

gdzie Δ jest diagonalną macierzą parametrów tłumienia. W tabeli zamieszczono wektor \vec{a}_e współczynników powyższego rozkładu. Dla każdego z odwzorowań jedynie dwa elementy \vec{a}_e są istotnie różne od zera, co potwierdza, że zrealizowane zostały odwzorowania depolaryzujące jednowymiarowo.

Na podstawie rozkładu na wartości osobliwe: $\mathcal{T} = \mathbf{U} \Delta \mathbf{V}^T$ można również wyznaczyć elipsoidę, w którą odwzorowanie przekształca sferę Blocha.

ROZDZIAŁ 5. WYNIKI POMIARÓW I WNIOSKI

a	$\vec{D_e}$	\vec{D}_t	C_e	C_t
	$0,\!99\pm0,\!06$			
0	$-0,\!93\pm0,\!06$		$0,\!92\pm0,\!07$	
	$0{,}93 \pm 0{,}08$			
	$0{,}94 \pm 0{,}07$	0,95		
0,1	$-0,\!77\pm0,\!04$	-0,78	$0,\!71\pm0,\!07$	0,73
	$0{,}71\pm0{,}07$	0,74		
	$0,\!93\pm0,\!07$	0,94		
0,2	$-0,\!57\pm0,\!04$	-0,58	$0,55 \pm 0,06$	$0,\!54$
	$0,\!55\pm0,\!06$	0,56		
	$0{,}91\pm0{,}06$	0,94		
0,3	$-0,\!41\pm0,\!04$	-0,39	$0,\!35\pm0,\!05$	$0,\!35$
	$0,\!36\pm0,\!05$	0,37		
	$0,\!92\pm0,\!06$	0,94		
0,4	$-0,22 \pm 0,04$	-0,19	$0,16 \pm 0,07$	0,16
	$0,\!17 \pm 0,\!05$	0,19		
_	$0,94\pm0,06$	0,94		
$\frac{7}{15}$	$-0,\!08\pm0,\!03$	-0,07	$0,04 \pm 0,07$	0,04
	$0,\!05\pm0,\!05$	0,06		
	$0,\!95\pm0,\!05$	0,94		
0,5	$0{,}00\pm0{,}03$	0	$0,00 \pm 0,07$	0
	$-0,04 \pm 0,06$	0		
	$0{,}96\pm0{,}05$	0,94		
0,8	$0,\!55\pm0,\!04$	0,56	$0,55 \pm 0,09$	$0,\!54$
	$-0,\!57\pm0,\!04$	-0,58		

Tab. 5.1: Zmierzone parametry tłumienia stanów zdepolaryzowanych jednowymiarowo w porównaniu z wyznaczonymi teoretycznie. Parametr *a* określa zastosowane odwzorowanie: $(1-a)\mathbb{1} + a\mathbf{R}$, \vec{D}_e – wektor parametrów tłumienia wyznaczonych doświadczalnie i \vec{D}_t – przewidywanych teoretycznie, C_e – zmierzona i C_t – przewidywana współbieżność.

W tym celu sfera została najpierw obrócona, a następnie poddana ściśnięciu. Powstała w ten sposób elipsoida została ponownie obrócona. Elipsoidy odpowiadające kolejnym odwzorowaniom zamieszczono na rys. 5.3.

Zasadniczym przedmiotem tej pracy jest analiza efektów związanych z depolaryzacją, a więc analiza parametrów tłumienia. Omówmy jednak krótko również obroty opisane macierzami \mathbf{U} i \mathbf{V}^T . W układzie doświadczalnym obrót \mathbf{V}^T jest realizowany przez ręczny kontroler polaryzacji FPC oraz światłowód doprowadzający do kontrolera EPC. Był on taki sam dla wszystkich



Rys. 5.1: Punkty reprezentujące zmierzone stany w czworościanie \mathcal{F} . • – seria stanów zdepolaryzowanych jednowymiarowo, \blacksquare – seria stanów zdepolaryzowanych dwuwymiarowo, \bigstar – stan zdepolaryzowany trójwymiarowo, \bigstar – pozostałe stany (poza głównymi seriami pomiarów).

pomiarów, gdyż ani ustawienie kontrolera FPC, ani położenie światłowodu nie było zmieniane. Obrót \mathbf{U} jest realizowany przez światłowód wyprowadzający i również pozostawał niezmieniony dla każdego z odwzorowań.

Obrót \mathbf{V}^T obraca sferę Blocha przed ściśnięciem. Obrót U obraca już ściśniętą elipsoidę. Ponieważ ściskanie zawsze zachodziło wzdłuż tych samych kierunków, orientacja osi głównych elipsoidy (na rys. 5.3 jedna z osi głównych zaznaczona jest linią, a o położeniu dwóch pozostałych można wnioskować na podstawie linii siatki) powinna być taka sama dla wszystkich elipsoid. Orientacja osi leżącej wzdłuż kierunku, w którym elipsoida nie została ściśnięta jest bliska sobie dla kolejnych elipsoid (rys. 5.3c–h): kąt pomiędzy osią każdej z elipsoid c–h a uśrednionym kierunkiem tych osi nie przekraczał 3°. Orientacja pozostałych dwóch osi zmienia się dość dowolnie. Jest to związane z tym, że elipsoidy te mają prawie zdegenerowane wartości osobliwe (dwa z trzech parametrów tłumienia są sobie równe z dokładnością do błędu), a co za tym idzie rozkład na wartości osobliwe nie jest jednoznacznie określony (por. 1.3), w związku z czym osie w płaszczyźnie, w której zachodziło ściskanie mogą



Rys. 5.2: a) Zależność parametrów tłumienia od udziału obrotu **R** w zastosowanym przekształceniu *a* (punkty) oraz obliczone wartości tych parametrów (linie ciągłe). b) Analogiczna zależność współbieżności *C*, entropii liniowej *S*_L i wartości własnych macierzy gęstości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

a	$\vec{\Delta}_e$	$\vec{\Delta}_t$	\vec{a}_e
0,1	$\begin{array}{c} 0,97 \pm 0,09 \\ 0,81 \pm 0,07 \\ 0,77 \pm 0,11 \end{array}$	$\begin{array}{c}1\\0,8\\0,8\end{array}$	$\begin{array}{c} 0,89 \pm 0,04 \\ 0,10 \pm 0,04 \\ 0,02 \pm 0,04 \\ 0,00 \pm 0,04 \end{array}$
0,2	$\begin{array}{c} 0,99 \pm 0,09 \\ 0,60 \pm 0,07 \\ 0,59 \pm 0,09 \end{array}$	$\begin{array}{c}1\\0,6\\0,6\end{array}$	$\begin{array}{c} 0,80\pm 0,04\\ 0,20\pm 0,04\\ 0,00\pm 0,04\\ 0,00\pm 0,04 \end{array}$
0,3	$0,94 \pm 0,08 \\ 0,44 \pm 0,07 \\ 0,38 \pm 0,09$	$\begin{array}{c}1\\0,4\\0,4\end{array}$	$\begin{array}{c} 0,69 \pm 0,04 \\ 0,28 \pm 0,04 \\ 0,03 \pm 0,04 \\ 0,00 \pm 0,04 \end{array}$
0,4	$0,95 \pm 0,08 \\ 0,24 \pm 0,07 \\ 0,18 \pm 0,09$	$1 \\ 0,2 \\ 0,2$	$\begin{array}{c} 0,59\pm 0,04\\ 0,38\pm 0,04\\ 0,03\pm 0,04\\ 0,00\pm 0,04 \end{array}$
$\frac{7}{15}$	$\begin{array}{c} 0,96 \pm 0,08 \\ 0,09 \pm 0,07 \\ 0,06 \pm 0,09 \end{array}$	$ 1 \\ 0,067 \\ 0,067 $	$\begin{array}{c} 0,53 \pm 0,04 \\ 0,45 \pm 0,04 \\ 0,02 \pm 0,04 \\ 0,00 \pm 0,04 \end{array}$
0,5	$\begin{array}{c} 0,98 \pm 0,08 \\ 0,04 \pm 0,08 \\ 0,00 \pm 0,08 \end{array}$	1 0 0	$\begin{array}{c} 0,50\pm 0,04\\ 0,48\pm 0,04\\ 0,02\pm 0,04\\ 0,00\pm 0,04 \end{array}$
0,8	$0,99 \pm 0,08 \\ -0,61 \pm 0,08 \\ -0,58 \pm 0,09$	$1 \\ -0,6 \\ -0,6$	$\begin{array}{c} 0,\!20\pm 0,\!04\\ 0,\!79\pm 0,\!04\\ 0,\!01\pm 0,\!04\\ 0,\!00\pm 0,\!04 \end{array}$

Tab. 5.2: Zmierzone parametry tłumienia odwzorowań w porównaniu z obliczonymi. *a* określa zastosowane odwzorowanie: $(1-a)\mathbb{1} + a\mathbf{R}$, $\vec{\Delta}_e$ – wektor parametrów tłumienia wyznaczonych doświadczalnie i $\vec{\Delta}_t$ – obliczonych, \vec{a}_e – rozkład odwzorowania na odwzorowania unitarne: $\mathbb{1}$, \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z .

być wybrane dowolnie. Dla elipsoidy 5.3b orientacja osi wzdłużnej różni się od orientacji tej osi dla pozostałych elipsoid (kąt pomiędzy tą osią a uśrednionym kierunkiem osi pozostałych elipsoid wynosi 12,5°), gdyż elipsoida ta jest, z dokładnością do błędu pomiarowego, zbliżona do kuli.



Rys. 5.3: (a) – (h) elipsoidy odwzorowań w kolejności rosnącego a; (a) – odwzorowanie tożsamościowe. Niebieskie i czerwone linie są przekształconymi równoleżnikami sfery Blocha: niebieskie to równoleżniki półkuli północnej, czerwone – południowej. Czarne linie siatki określają orientację elipsoidy (wskazują kierunek jednej z osi głównych). Warto zwrócić uwagę na fakt, że elipsoida (h) jest odwrócona "do góry nogami". Jest to zgodne z oczekiwaniami, gdyż odwzorowanie jej odpowiadające posiada większy udział obrotu niż odwzorowania tożsamościowego.

5.3 Depolaryzacja dwuwymiarowa

W poprzedniej części opisany został najprostszy sposób depolaryzacji – depolaryzacja jednowymiarowa. W tej części omówione zostaną odwzorowa-

nia realizowane jako statystyczna mieszanina trzech odwzorowań: odwzorowania tożsamościowego 1 oraz dwóch obrotów o 180° wokół osi wzajemnie prostopadłych, \mathbf{R}_x i \mathbf{R}_y . Ze względu na histerezę magnetyczną w kontrolerze polaryzacji EPC, nie udało się zrealizować obrotów o dokładnie 180° i o osiach dokładnie prostopadłych. Rozbieżności sięgały 15° w obydwu przypadkach. Z tego powodu nie udało się zrealizować symetrycznej depolaryzacji dwuwymiarowej – o jednakowym udziale dwóch obrotów.

Zmierzone parametry tłumienia oraz współbieżność stanów poddanych przekształceniom postaci $(1 - a)\mathbb{1} + \frac{a}{2}(\mathbb{R}_x + \mathbb{R}_y)$ zamieszczono w tabeli 5.3. Punkty w czworościanie odpowiadające tym stanom zaznaczono kwadratami na rys. 5.1. Gdyby użyte obroty były obrotami o dokładnie 180° i miały osie wzajemnie prostopadłe, uzyskane stany powinny znajdować się w płaszczyźnie jednej ze ścian czworościanu i być położone na środkowej tej ściany. Punkty odpowiadające zmierzonym stanom faktycznie leżą na jednej ze ścian (por. rys. 5.1 i 5.5), nie leżą natomiast na środkowej.

Zrealizowane zatem zostały stany zdepolaryzowane w dwóch kierunkach, natomiast nie zrealizowano najbardziej symetrycznych stanów z tej klasy. O tym, że są to stany zdepolaryzowane w dwóch kierunkach świadczą też zmiany parametrów tłumienia wraz ze wzrostem depolaryzacji: wartość jednego z parametrów maleje znacznie szybciej niż dwóch pozostałych aż do uzyskania w pewnym momencie stanu "naleśnikowego", o jednym z parametrów tłumienia równym zeru, a dwóch pozostałych istotnie różnych od zera. Stan "naleśnikowy" znajduje się na granicy ośmiościanu stanów separowalnych – potwierdza to wyznaczona dla tego stanu zerowa współbieżność.

Kolejnym potwierdzeniem, że mamy do czynienia ze stanami zdepolaryzowanymi w dwóch kierunkach jest fakt, że jedna z wartości własnych macierzy gęstości pozostaje dla każdego z tych stanów bliska zeru (nie większa niż 0,02), podczas gdy pozostałe są istotnie różne od zera.

Przejdźmy do omówienia zrealizowanych odwzorowań. Parametry tłumienia odwzorowań zamieszczone są w tabeli 5.3. Zrealizowane odwzorowania są bliższe odwzorowaniom symetrycznym niż zrealizowane stany. Jest tak, ponieważ symetrię stanów zaburzał dodatkowo w pewnym stopniu asymetryczny stan wyjściowy. Zamieszczone w tabeli parametry rozkładu na podstawowe odwzorowania unitarne (5.4) potwierdzają, że zrealizowane zostały odwzorowania depolaryzujące dwuwymiarowo.

Elipsoidy odpowiadające odwzorowaniom przedstawiono na rys. 5.4. Jak widać, kolejne elipsoidy przybierają coraz bardziej płaski kształt. W szczególności, zrealizowano odwzorowanie bliskie całkowicie spłaszczonej elipsoidzie. Odwzorowanie takie zeruje jedną ze składowych wektora Blocha, pozostawiając pozostałe dwie składowe różne od zera.

Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do odwzorowań depolaryzujących

a	$\vec{D_e}$	C	$ec{\Delta_e}$	$\vec{a_e}$
0	$\begin{array}{c} 1,00 \pm 0,04 \\ -0,90 \pm 0,05 \\ 0,90 \pm 0,04 \end{array}$	$0,90 \pm 0.12$	1 1 1	1 0 0 0
$\frac{1}{9}$	$\begin{array}{c} 0,89 \pm 0,05 \\ -0,81 \pm 0,05 \\ 0,74 \pm 0,04 \end{array}$	$0,73 \pm 0,07$	$0,92 \pm 0,07 \\ 0,88 \pm 0,09 \\ 0,81 \pm 0,08$	$0,90 \pm 0,04 \\ 0,06 \pm 0,04 \\ 0,04 \pm 0,04 \\ 0,00 \pm 0,04$
0,4	$\begin{array}{c} 0,69 \pm 0,05 \\ -0,57 \pm 0,05 \\ 0,31 \pm 0,04 \end{array}$	0.29 ± 0.07	$0,70 \pm 0,07$ $0,63 \pm 0,09$ $0,35 \pm 0,08$	$0,67 \pm 0,04 \\ 0,18 \pm 0,04 \\ 0,15 \pm 0,04 \\ 0,00 \pm 0,04$
$\frac{4}{9}$	$\begin{array}{c} 0,64 \pm 0,04 \\ -0,56 \pm 0,05 \\ 0,24 \pm 0,04 \end{array}$	$0,22 \pm 0,05$	$0,66 \pm 0,07$ $0,61 \pm 0,09$ $0,26 \pm 0,09$	$0,63 \pm 0,04 \\ 0,20 \pm 0,04 \\ 0,17 \pm 0,04 \\ 0,00 \pm 0,04$
$\frac{2}{3}$	$\begin{array}{c} 0,57 \pm 0,04 \\ -0,38 \pm 0,06 \\ -0,02 \pm 0,04 \end{array}$	0 ± 0.05	$\begin{array}{c} 0,59 \pm 0,07 \\ 0,42 \pm 0,09 \\ -0,02 \pm 0,08 \end{array}$	$0,51 \pm 0,04$ $0,29 \pm 0,04$ $0,20 \pm 0,04$ $0,00 \pm 0,04$
$\frac{15}{16}$	$\begin{array}{c} 0,29 \pm 0,04 \\ 0,11 \pm 0,05 \\ -0,78 \pm 0,04 \end{array}$	$0,09 \pm 0,05$	$\begin{array}{c} 0,31\pm 0,07\\ -0,11\pm 0,09\\ -0,86\pm 0,08\end{array}$	$\begin{array}{c} 0,08\pm 0,04\\ 0,57\pm 0,04\\ 0,35\pm 0,04\\ 0,00\pm 0,04 \end{array}$

Tab. 5.3: Zmierzone parametry tłumienia oraz współbieżność stanów powstałych w wyniku działania odwzorowania $(1 - a)\mathbb{1} + \frac{a}{2}(\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y)$, \vec{D}_e – wektor parametrów tłumienia wyznaczonych doświadczalnie, C – współbieżność, $\vec{\Delta}_e$ – wektor parametrów tłumienia odwzorowania, \vec{a}_e – rozkład odwzorowania na odwzorowania unitarne: $\mathbb{1}$, \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y , \mathbf{R}_z .

jednowymiarowo, żadna z osi głównych elipsoid na rys. 5.4 nie ma stałego kierunku. W przypadku niektórych elipsoid (a/d, b/g, c/f) kierunek dwóch osi nie jest dobrze określony, ze względu na to, że z dokładnością do błędu, dwie wartości osobliwe odpowiadające tym elipsoidom są sobie równe. Wyjaśnijmy teraz, dlaczego również trzecia oś główna zmienia kierunek. W przypadku, gdy depolaryzacja dwuwymiarowa realizowana jest jako mieszanina odwzorowania tożsamościowego i dwóch obrotów o 180° wokół osi wzajemnie pro-



Rys. 5.4: Elipsoidy odwzorowań depolaryzujących w dwóch kierunkach. Każdą elipsoidę przedstawiono na dwóch rysunkach – jeden pod drugim. Drugi rysunek jet obrócony o ok. 90° względem pierwszego. Odwzorowania podano w kolejności rosnącego parametru a.

stopadłych ($\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y$), macierz depolaryzacji $\boldsymbol{\Delta} = (1-a_1-a_2)\mathbf{1}+a_1\mathbf{R}_x+a_2\mathbf{R}_y$ jest diagonalna w układzie odniesienia związanym z osiami obrotu (gdyż \mathbf{R}_x i \mathbf{R}_y są diagonalne w tym układzie). W eksperymentalnej realizacji depolaryzacji dwuwymiarowej uśrednianie odbywało się pomiędzy obrotami innymi niż \mathbf{R}_x i \mathbf{R}_y – w związku z tym macierz depolaryzacji $\boldsymbol{\Delta}$ była niediagonalna i mogła zostać poddana nietrywialnemu rozkładowi na wartości osobliwe:

$$\boldsymbol{\Delta} = \tilde{\mathbf{U}}(a_1, a_2) \tilde{\boldsymbol{\Delta}} \tilde{\mathbf{V}}^T(a_1, a_2), \tag{5.5}$$

gdzie $\hat{\Delta}$ jest diagonalna, a $\hat{\mathbf{U}}$ i $\hat{\mathbf{V}}$ zależą od a_1 i a_2 . W praktyce rozkład (5.5) oznacza, że depolaryzacja pomiędzy takimi "niedoskonałymi" stanami oprócz ściskania sfery Blocha powoduje także jej jednoczesny obrót, w ogólności przed, jak i po ściśnięciu.

Oprócz depolaryzacji stan polaryzacji fotonu jest poddawany jeszcze dwóm obrotom \mathbf{U}_F i \mathbf{V}_F^T (powodowanym przez dwójłomność światłowodu). W połączeniu z 5.5 daje to macierz \mathcal{T} odwzorowania określoną przez:

$$\mathcal{T} = \mathbf{U}_F \tilde{\mathbf{U}}(a_1, a_2) \tilde{\mathbf{\Delta}} \tilde{\mathbf{V}}^T(a_1, a_2) \mathbf{V}_F^T = \mathbf{U}(a_1, a_2) \tilde{\mathbf{\Delta}} \mathbf{V}^T(a_1, a_2).$$
(5.6)

Jak widać, w przypadku depolaryzacji pomiędzy "niedoskonałymi" odwzorowaniami, orientacja osi głównych elipsoidy odwzorowania zależy od parametrów a_1, a_2 określających stopień depolaryzacji. Fakt ten tłumaczy różnice w orientacji osi elipsoid na rys. 5.4.

Po zrealizowaniu odwzorowań depolaryzujących w dwóch kierunkach podjęto próby zrealizowania odwzorowań depolaryzujących trójwymiarowo, będących mieszaninami 4 odwzorowań: tożsamości i 3 obrotów o 180° o osiach wzajemnie prostopadłych. W szczególności możliwe byłoby zrealizowanie serii odwzorowań depolaryzujących symetrycznie, leżących na linii łączącej jeden z wierzchołków czworościanu \mathcal{G} z jego środkiem – odwzorowania takie przeprowadzałyby stany w pełni splątane w stany Wernera [36]: $\hat{\rho}_W =$ $(1-a)\hat{\rho}_{ent} + a\hat{\rho}_{dep}$, gdzie $\hat{\rho}_{ent}$ oznacza stan w pełni splątany, a $\hat{\rho}_{dep}$ – stan w pełni zdepolaryzowany. Ze względu na niedoskonałość kontrolera polaryzacji nie było możliwe zrealizowanie dowolnych stanów zdepolaryzowanych trójwymiarowo, w tym stanów Wernera.

Poniżej przedstawione zostaną parametry zmierzonego stanu (nie będącego stanem Wernera) i odwzorowania, zdepolaryzowanych w trzech kierunkach. Wektor parametrów tłumienia tego stanu to:

$$\vec{D} = [0,49 \pm 0,06; -0,28 \pm 0,04; 0,08 \pm 0,06].$$
 (5.7)

Punkt odpowiadający temu wektorowi został zaznaczony gwiazdką na rys. 5.1. Aby uwidocznić, że punkt ten leży wewnątrz czworościanu, a nie na jednej ze ścian, na rys. 5.5 czworościan przedstawiony został z innej perspektywy.

Stan ten jest stanem separowalnym – jego współbieżność jest równa 0. Entropia liniowa wynosi 0.89 ± 0.04 .

O tym, że jest to stan zdepolaryzowany trójwymiarowo świadczą również wszystkie wartości własne macierzy gęstości istotnie różne od zera: $0,07 \pm$ 0,02; $0,18 \pm 0,02$; $0,28 \pm 0,02$; $0,47 \pm 0,02$.



Rys. 5.5: Czworościan z rys. 5.1 obrócony tak, by uwidocznić, że stan oznaczony \bigstar leży wewnątrz czworościanu, a więc jest zdepolaryzowany trójwymiarowo.

Odwzorowanie prowadzące do powyższego stanu jest scharakteryzowane następującymi parametrami tłumienia:

$$\Delta = [0,52 \pm 0,09; \ 0,30 \pm 0,07; \ 0,08 \pm 0,09].$$
(5.8)

Punkt reprezentujący to odwzorowanie w czworościanie \mathcal{G} nie leży (z uwzględnieniem błędów) na ścianie czworościanu – jest więc to odwzorowanie realizujące depolaryzację trójwymiarową. Rzeczywiście, macierz depolaryzacji Δ tego odwzorowania można rozłożyć na sumę czterech odwzorowań unitarnych:

$$\Delta = 0.47 \,\mathbbm{1} + 0.29 \mathbf{R}_x + 0.17 \mathbf{R}_y + 0.07 \mathbf{R}_z \tag{5.9}$$

(błąd każdego ze współczynników wynosi $\pm 0,04$). W
kład od każdego z odwzorowań jest istotnie różny od zera.

5.4 Przedstawienie stanów na płaszczyźnie splątanie-entropia

Na zakończenie zmierzone stany dwufotonowe zostaną przedstawione na płaszczyźnie splątanie – entropia liniowa $(T - S_L)$, w analogii do pracy [37].

Zmierzone stany zostały zaznaczone na wykresie 5.6. Dodatkowo zaznaczone zostały wyznaczone numerycznie granice obszaru, na którym mogą



Rys. 5.6: Zmierzone stany zaznaczone na płaszczyźnie splątanie–entropia. Linia czarna (przerywana) – stany zdepolaryzowane jednowymiarowo; linia zielona (cią-gła) – stany Wernera; linia pomarańczowa (pogrubiona) – stany MEMS; punkty obszaru powyżej linii MEMS nie odpowiadają fizycznym stanom. Punkty wyznaczone doświadczalnie: \blacksquare – seria stanów zdepolaryzowane jednowymiarowo; \blacktriangle – seria stanów zdepolaryzowane jednowymiarowo; \bigstar – seria stanów zdepolaryzowane intervence stany.

znajdować się stany uzyskiwane ze stanu maksymalnie splątanego za pomocą odwzorowań unitalnych. Dolna granica wyznaczona jest przez stany uzyskane w wyniku depolaryzacji w jednym kierunku, górna granica – przez stany Wernera, a więc stany zdepolaryzowane symetrycznie w trzech kierunkach.

Według [37] nad stanami Wernera znajduje się jeszcze obszar stanów o większym stopniu splątania przy danej entropii – ograniczony od góry przez tzw. maksymalnie splątane stany mieszane (ang. *Maximally Entangled Mixed States, MEMS*). Stany z tego obszaru zostały zrealizowane eksperymentalnie przez Petersa i in. [38] oraz przez Barbieriego i in. [39]. Osiągnięcie obszaru stanów MEMS w ramach tej pracy nie było możliwe, gdyż nie są to stany o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach. Nie ma możliwości uzyskania ich poprzez zastosowanie odwzorowań unitalnych do stanów wyjściowych bliskich stanom Bella. Granicą pozostają w tym przypadku stany Wernera.

Na podstawie wykresu 5.6 widać, że stany osiągalne przez zastosowanie odwzorowań unitalnych do stanów o maksymalnie nieuporządkowanych podukładach pokrywają niewielki obszar płaszczyzny splątanie–entropia. Jednak w ramach tego obszaru zrealizowane zostały eksperymentalnie bardzo różnorodne stany, leżące zarówno w pobliżu jego dolnej, jak i górnej granicy.

Podsumowanie

Skonstruowane zostało źródło polaryzacyjnie splątanych par fotonów wytwarzające stany dwufotonowe o dużym stopniu czystości oraz dużym stopniu splątania. Możliwe jest dalsze poprawienie parametrów źródła (jakości splątania i jasności), poprzez kompensację dryfu za pomocą dodatkowych kryształów BBO.

Metodą tomografii kwantowej przeprowadzono pomiary macierzy gęstości, osiągając dobre rezultaty. Dalsze zwiększenie dokładności można osiągnąć, korzystając z dokładniejszych uchwytów obrotowych (należy przypomnieć, że najbardziej znaczący wkład do błędu dają niepewności kątowe) oraz zwiększając jasność źródła, co łączy się ze wspomnianą powyżej kompensacją dryfu.

Zrealizowano i scharakteryzowano odwzorowania depolaryzujące należące do każdej z 3 klas przewidywanych przez teorię. W szczególności zrealizowano stany i odwzorowania w pełni ściśnięte w jednym i dwóch kierunkach. Dla jednowymiarowej depolaryzacji uzyskano pełną ilościową zgodność z obliczeniami teoretycznymi. Zrealizowano serię odwzorowań depolaryzujących dwuwymiarowo, również uzyskując wyniki zgodne z teorią. Zrealizowano także przykładowe odwzorowanie depolaryzujące trójwymiarowo. Ze względu na ograniczenia techniczne ze strony kontrolera polaryzacji, nie powiodła się próba realizacji pełnego zakresu odwzorowań trójwymiarowych, w tym odwzorowań prowadzących do stanów Wernera. Realizacja tych odwzorowań za pomocą statystycznej depolaryzacji pozostaje problemem otwartym. Kolejnym udoskonaleniem powinna być wspomniana we wstępie realizacja odwzorowań podlegających uśrednieniu.

Pomimo tego należy stwierdzić, że w ramach zrealizowanych odwzorowań uzyskano bardzo dużą kontrolę nad procesami dekoherencji polaryzacyjnie splątanych par fotonów.

Bibliografia

- E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. Proc. Cambridge Philos. Soc., 35:555, 1935.
- [2] C. Gerry, P. Knight. Introductory Quantum Optics. Cambridge Univ. Press, 2005.
- [3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [4] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilnger, A. V. Sergienko, Y. Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75(24):4337, 1995.
- [5] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail, J. Smolin. Experimental quantum cryptography. *Journal of Cryptology*, 5(1):3, 1992.
- [6] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph, D. Branning. Demonstration of an all-optical quantum controled-NOT gate. *Nature*, 426:264, 2003.
- [7] P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger. Experimental one-way quantum computing. *Nature*, 434(169), 2005.
- [8] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum, P. H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60(2):R773–R776, 1999.
- [9] Y. Nambu, K. Usami, Y. Tsuda, K. Matsumoto, K. Nakamura. Generation of polarization-entangled photon pairs in a cascade of two type-I crystals pumped by femtosecond pulses. *Phys. Rev. A*, 66:033816, 2002.
- [10] A. Dragan. Efficient fiber coupling of down-conversion photon pairs. *Phys. Rev. A*, 70:053814, 2004.

- [11] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, A. G. White. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, 64:052312, 2001.
- [12] F. De Martini, A. Mazzei, M. Ricci, G. M. D'Ariano. Exploiting quantum parallelism of entanglement for a complete experimental quantum charcterization of a single qubit device. *Phys. Rev. A*, 67:062307, 2003.
- [13] F. De Martini, G. M. D'Ariano, A. Mazzei, M. Ricci. Pauli tomography: complete characterization of a single qubit device. *Fortschritte der Physik*, 51(4):342, 2003.
- [14] A. M. Childs, I. L. Chuang, D. W. Leung. Realization of quantum process tomography in NMR. *Phys. Rev. A*, 64:012314, 2001.
- [15] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. Gilchrist, D. F. V. James, N. K. Langford, T. C. Ralph, A. G. White. Quantum process tomography of a controlled-NOT gate. *Phys. Rev. Lett.*, 93:080502, 2004.
- [16] E. Altewischer, Y. C. Oei, M. P. van Exter, J. P. Woerdman. Quantum decoherence versus classical depolarization in nanohole arrays. *Phys. Rev. A*, 72:013817, 2005.
- [17] J. B. Altepeter, D. Branning, E. Jeffrey, T. C. Wei, P. G. Kwiat, R. T. Thew, J. L. O'Brien, M. A. Nielsen, A. G. White. Ancilla assisted quantum process tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 90(19):193601, 2003.
- [18] N. Peters, J. Altepeter, E. Jefferey, D. Branning, P. Kwiat. Precise creation, characterization, and manipulation of single optical qubits. arXiv:quant-ph/0502177, 2003.
- [19] M. Ricci, F. De Martini, N. J. Cerf, R. Filip, J. Fiurášek, C. Macchiavello. Experimental purification of single qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 93:170501, 2004.
- [20] M. Horodecki, R. Horodecki. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Phys. Rev. A*, 54(3):1838, 1996.
- [21] D. K. L. Oi. The geometry of single-qubit maps. arXiv:quantph/0106035, 2001.
- [22] A. Jamiołkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Rep. Math. Phys.*, 3(4):275–278, 1972.

- [23] R. M. A. Azzam, N. M. Bashara. Ellipsometry and Polarized Light. North Holland, 1977.
- [24] R. L. Liboff. Wstep do mechaniki kwantowej. PWN Warszawa, 1987.
- [25] A. Fujiwara, P. Algoet. One to one parametrization of quantum channels. Phys. Rev. A, 59(5):3290, 1999.
- [26] C. King, M. B. Ruskai. Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels. *IEEE Trans. Inform. Theory.*, 47(1):192, 2001.
- [27] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical Recipes in C. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [28] K. Życzkowski, I. Bengtsson. On duality between quantum maps and quantum states. Open Syst. Inf. Dyn., 11:3, 2004.
- [29] K. Kraus. States, effects, and operations: fundamental notions of quantum theory. Berlin: Springer, 1983.
- [30] S. Hill, W. K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. Phys. Rev. Lett., 78(26):5022, 1997.
- [31] A. Yariv. *Quantum Electronics*. John Wiley & Sons, 1989.
- [32] F. Ratajczyk. Optyka ośrodków anizotropowych. Wyd. Naukowe PWN, 1994.
- [33] A. V. Smith. SNLO nonlinear optics code. http://www.sandia.gov/ imrl/X1118/xxtal.htm.
- [34] W.A. Shurcliff, S.S. Ballard. Światło spolaryzowane. PWN, 1968.
- [35] E. W. Weisstein. *Rotation Matrix*. MathWorld A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html.
- [36] R. F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8):4277, 1989.
- [37] A. G. White, D. F. V. James, W. J. Munro, P. G. Kwiat. Exploring Hilbert Space: accurate characterisation of quantum information. *Phys. Rev. A*, 65:012301, 2002.

- [38] N. A. Peters, J. B. Altepeter, D. A. Branning, E. R. Jeffrey, T. Ch. Wei, P. G. Kwiat. Maximally entangled mixed states: Creation and concentration. *Phys. Rev. Lett.*, 92:133601, 2004.
- [39] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, P. Mataloni. Generation and characterization of Werner States and Maximally Entangled Mixed States by a universal source of entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 92(17):177901, 2004.