ANALIZA I
Zadania domowe z ciągów liczbowych

Szanowni Państwo, w poniższych zadaniach numeracja podpunktów jest nieco dziwna. Skopiowałam je ze starych serii domowych usuwając niektóre fragmenty, żeby nie było za dużo. Numeracji nie uporządkowałam, żeby zachować zgodność ze wskazówkami i rozwiązaniami. Zadań jest i tak dużo - może przyda się praca zespołowa?

Zadanie 1. Wykazać, że:
(a) \( \lim_{n \to \infty} \left( \frac{100}{n^{100}} + n^{99} - n \right) = \frac{1}{100}; \)
(b) \( \lim_{n \to \infty} \left( n + 4 \sqrt{n^2 + n} - 2 \sqrt{n^2 - n} - 3 \sqrt{n^2 - 2n} \right) = \frac{5}{4}; \)
(c) \( \lim_{n \to \infty} \left( \sqrt{n^2 + \sqrt{n^5}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^3}} \right) = \frac{1}{4}; \)
(d) \( \lim_{n \to \infty} \left( \sqrt{n + \sqrt{n} - \sqrt{n - \sqrt{n}}} \right) = 1; \)
(e) \( \lim_{n \to \infty} \left( \frac{\sqrt{5a^{2n}} + 4a^n + 3}{a} \right) \) dla \( a \in \mathbb{R}; \)
(f) \( \lim_{n \to \infty} \left( n^7 + 7 \right)^{-\frac{7}{2}} \left( (n + 2)^{100} - n^{100} - 200n^{99} \right) = 30 \sqrt{22}; \)
(g) \( \lim_{n \to \infty} \left( 3 + x \right)^n + (1 - x)^n = 2 + |1 + x| \) dla \( x \in \mathbb{R}; \)
(h) \( \lim_{n \to \infty} \left( \frac{p_1 a_1^{n+1} + \ldots + p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n + \ldots + p_r a_r^n} \right) = \max\{a_1, \ldots, a_r\} \) oraz \( \lim_{n \to \infty} \sqrt{p_1 a_1^n + \ldots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\} \),
jeśli \( r \in \mathbb{N} \) i liczby \( p_i, a_i \) są dodatnie;
(i) \( \lim_{n \to \infty} \left( \sqrt{2^n} - \frac{2}{\sqrt{2^n}} \right) = \frac{1}{2}; \)
(j) \( \lim_{n \to \infty} 2^{-n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \ldots \left( 1 + \frac{n}{n} \right) = 0; \)
(k) \( \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \ldots \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right) = +\infty; \)
(l) \( \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n+1} n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \ln n} = +\infty; \)
(m) \( \lim_{n \to \infty} \frac{3^n - 1}{3^n + \frac{1}{3}} \ldots \frac{2^n - 1}{2^n + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}; \)
(n) \( \lim_{n \to \infty} \sqrt[4]{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4} = 1; \)

Wskazówki: (h),(j),(k),(t) Wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach; (m),(n) Obliczyć \( \lim_{n \to \infty} x^{n+1} / x^n \); (s) Uprościć wzór na \( x^n \).

Zadanie 2. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbiorów:
\( \{ x^{2x+1} : x \in \mathbb{R} \}; \quad \{ 2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R} \}; \)
\( \{ n^2 : n \in \mathbb{N} \}; \quad \{ \frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N} \}. \)

Zadanie 3. Zbadać zbieżność ciągu \( (x_n) \), ewentualnie obliczyć granicę:
(d) \( x_n = \cos \frac{2\pi n^2}{2n+1}; \)
(e) \( x_n = \cos \frac{2\pi n}{n+3}; \)
(f) \( x_n = \sin \pi \sqrt{n^2 + n + 1}; \)
(g) \( x_n = \tg\left( \frac{\pi}{2} \sqrt{n(n+1)} \right); \)
(i) \( x_n = \frac{\lfloor 2n \rfloor!!}{(2n+1)!!}; \)

(j) \( x_n = (2 - \sqrt{10})^n \).

**Zadanie 4.** Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

(a) \( x_0 > 0 \) dane, \( x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \);
(b) \( x_0 > 2 \) dane, \( x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n} \);
(c) \( x_0 = 0 \), \( x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n} \);
(d) \( x_0 \in [1, 2] \) dane, \( x_{n+1} = x_n(x_n - 1) \);
(e) \( x_0 \in [-1, 1] \) dane, \( x_{n+1} = \frac{10}{1 + x_n^2} \).

**Wskazówki:** (a),(b),(d) osc.; (b) \( |x_{n+2} - 1| \leq \frac{1}{2}|x_n - 1| \); (c) monotoniczny; (e),(j) rosnący; (f) osc.; zacząć od \( x_0 \in [0, 1] \); zauważyć, że \( g([0, 1]) \subset [0, 1] \) i \( g(x) \leq x \) na \([0, 1]\); (g),(k) malejący; (h) obliczyć \( g := f \circ f \); (i) \( \forall n : |x_n| \leq 1 \) lub \( x_n \geq 5 \).

**Rozwiązania:** (a),(g) \( l = \sqrt{2} \); (b),(j),(d) \( l = 1 \); (c) \( l = 3 \); (e) \( l = 2 \); (f) \( l = 0 \); (h) zbieżny \iff \( x_0 = \frac{1}{2} \) lub \( x_0 = 1 \); (i) rozbieżny; (k) \( l = \sqrt{3} \).

**Zadanie 5.** Wykazać, że jeśli \( \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+N} = x_n \), tzn. ciąg \( (x_n) \) jest okresowy, to
\[
\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}.
\]

Sprawdzić, że ciąg \( (x_1 + \ldots + x_n - ns) \), gdzie \( s := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \), jest okresowy, a więc ograniczony.