Egzamin pisemny z mechaniki klasycznej 2010/2011

(1 lutego 2011 r.)

Zadanie 1 (5 pkt.)

Wyznaczyć ruch samochodu o masie m wzdłuż prostej poziomej przy założeniu, że działa na niego siła oporu $-\alpha\vec{v}$, $\alpha > 0$ i silnik pracuje ze stałą mocą P. Obliczyć prędkość maksymalną samochodu oraz czas i drogę potrzebne na uzyskanie **połowy** tej prędkości.

Warunki początkowe w $t = 0:\ x = 0,\ \dot{x} = 0$.

Wskazówka: Na pewnym etapie przy całkowaniu użyć podstawienia typu $u = \sqrt{1 - e^{\beta t}}$.

Zadanie 2 (5 pkt.)

Krążek o masie m i promieniu R, na którego obwodzie przymocowano punkt materialny o masie m, toczy się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia α w jednorodnym polu grawitacyjnym Ziemi (przyspieszenie grawitacyjne g). Krążek toczy się przez cały czas w płaszczyźnie pionowej po linii największego spadku (rys.). Znaleźć lagranżjan układu, położenia równowagi i częstość małych drgań wokół położenia równowagi trwałej.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Cząstka o masie m porusza się w w polu siły $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie $\alpha > 0$. Przy użyciu równania Hamiltona-Jacobiego sprowadzić problem wyznaczenia ruchu do kwadratur i wyznaczyć tor ruchu.

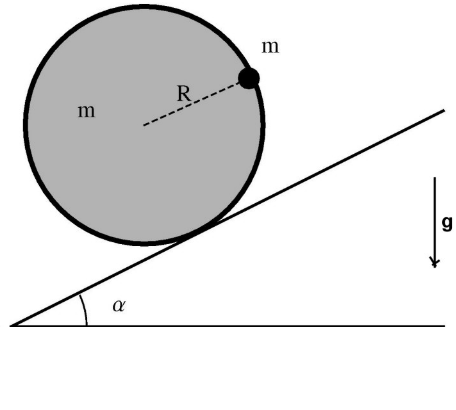
Wskazówka: Wykorzystać fakt, że w polu siły centralnej ruch jest płaski i użyć współrzędnych biegunowych.

Przydatne wzory:

$$P = \vec{F}\vec{v}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\left(\frac{b}{a}x\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$



Powodzenia!