

MECHANIKA KLASYCZNA R

Wykład prof. K. Pachuckiego

- 17 listopada 2025 o 9.00, sala 1.03 & B.014 - pierwsze kolokwium
- 12 stycznia 2026 o 9.00, sale w cyklotronie - drugie kolokwium
- 29 stycznia 2026 o 9.00, sala 0.06 - pierwszy egzamin pisemny
- termin pisemnego egzaminu poprawkowego zostanie uzgodniony później z osobami nim (z konieczności) zainteresowanymi

ZADANIA Z MECHANIKI¹

¹Tu zamieszczam wszystkie zadania, także te, które są przerabiane na zajęciach (rozwiązania tych zadań są zamieszczone w dalszej części tego pliku). Symbol ^R nie oznacza, że jest to zadanie “radzieckie” (choć niektóre z nich takie są) tylko coś innego.

1 KINEMATYKA

Zadanie 1.1^R

Dane są cztery wektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$. Wyrazić wielkość

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

przez same iloczyny skalarne tych wektorów. Przedstawić wektor

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

w postaci kombinacji liniowej wyrażeń, z których występuje tylko po jednym iloczynie wektorowym dwu wektorów.

Zadanie 1.2^R

Dany jest tor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda)$, gdzie λ jest jakimś parametrem. Wiadomo, że przy dowolnej wartości λ

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \mathbf{0}.$$

Pokazać, że tor taki jest po prostu punktem (tzn. że $\mathbf{r}(\lambda)$ jest stałym wektorem).

Zadanie 1.3^R

Dany jest układ współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie oraz okrąg o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$. Dana jest też prosta p styczna do okręgu, która toczy się po nim bez poślizgu. (Bez poślizgu to znaczy, że jeśli w dwu różnych chwilach czasu zaznaczymy i na okręgu i na prostej punkty styczności, to odległość między tymi punktami na prostej będzie równa długości łuku pomiędzy punktami styczności na okręgu). Biegunowy kąt α wyznaczający punkt styczności prostej p z okręgiem zmienia się z czasem: $\alpha = \alpha(t)$. W chwili $t = 0$ prosta ta przechodzi przez punkt $(R, 0)$, tj. $\alpha(0) = 0$. Punkt A prostej ma w chwili $t = 0$ współrzędne (R, y_A) . Znaleźć jego współrzędne w dowolnej chwili czasu.

Zadanie 1.4^R

Wyprowadzić wzory na składowe wektorów prędkości i przyspieszania we współrzędnych biegunowych (r, φ) na płaszczyźnie i we współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) w przestrzeni trójwymiarowej.

Zadanie 1.5^R

Podać (tj. wyprowadzić) wzory na wszystkie trzy kartezjańskie składowe L^i wektora (orbitalnego) momentu pędu cząstki o masie m wyrażone przez: a) zmienne (i ich pochodne po czasie) ρ, ϕ, z cylindrycznego układu współrzędnych, b) zmienne (i ich pochodne) r, θ, ϕ sferycznego układu współrzędnych. W obu przypadkach podać także wzory na $\mathbf{L}^2$. Podać także składowe wektora $\mathbf{L}$ w bazach wersorów $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ oraz $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ związanych z tymi układami współrzędnych wyrażone przez zmienne tychże układów.

Zadanie 1.6^R

W układzie kartezjańskim tensor elastycznych odkształceń ciała ma składowe

$$U_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right),$$

gdzie $u_i(\mathbf{x})$ to składowe wektora przemieszczeń. Rozpatrując ciało płaskie mogące odkształcać się tylko w płaszczyźnie $xy \equiv x_1x_2$ wyprowadzić składowe tensora odkształceń w układzie cylindrycznym wyrażając je oczywiście przez pochodne po zmiennych r i φ składowych wektora przemieszczeń w tymże układzie.²

Zadanie 1.7^R

Wyprowadzić wzory wyrażające współczynniki rozkładu wektora prędkości $\mathbf{v}$, wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$ oraz pochodnej po czasie $\dot{\mathbf{a}}$ wektora przyspieszenia na trzy ortonormalne wektory

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dl}, \quad \mathbf{n} \equiv \rho \frac{d\mathbf{t}}{dl}, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$

($dl \ v = |\mathbf{v}|$, jest tu różniczką długości toru), przez szybkość $v = |\mathbf{v}|$, promień ρ (lokalnej) krzywizny toru, ich pochodne po czasie oraz skręcenie (torsję) τ . Promień ρ krzywizny i skręcenie τ są zdefiniowane związkami

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dl} = \alpha \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Współczynnik γ w drugim związku nie jest niezależny od ρ i τ i trzeba go wyznaczyć.³

Zadanie 1.8^R

Płaska kolistą tarcza obraca się wokół prostopadłej do niej osi ze stałą prędkością kątową ω . Od środka tarczy rusza żuczek⁴ i podąża ku jej brzegowi ze stałą prędkością v_0 skierowaną wzdłuż promienia tarczy. Jak wygląda ruch żuczka w nieruchomym kartezjańskim

²Wystarczy zająć się przypadkiem dwuwymiarowym, żeby zobaczyć, jak to robić. Rachunki są dość żmudne, a przypadek trzech wymiarów nic od strony koncepcyjnej by nie wniósł; wzory w trzech wymiarach w układach cylindrycznym i sferycznym można znaleźć w *Teorii sprężystości* Landaua i Lifszycy (tom VII ich sławetnego *Kursu fizyki teoretycznej*). Zauważmy jeszcze, że tensor jest obiektem geometrycznym. Jeśli ograniczamy się do ortogonalnych układów krzywoliniowych i posługujemy unormowanymi wektorami bazowymi związanymi z takim układem, można tensor odkształceń $\mathbf{U}$ traktować jak “biwektor”

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \vec{\nabla}).$$

$\vec{\nabla}$ jest tu “wektorem” gradientu, a strzałka nad nim pokazuje, w którą stronę działa związane z nim różniczkowanie.

³Parametryzacja krzywej jej długością l jest dla matematyków “kanoniczna”. Ich naogół interesuje następujące zagadnienie: mając zadane ρ i τ jako funkcje długości, zrekonstruować samą krzywą (oczywiście ρ i τ wyznaczają krzywą tylko dokładnością do jej dowolnego przesunięcia i dowolnego obrotu jako całości).

⁴Żuczek gnojarek z muszką plujką na grzbiecie, zgodnie z posenką “Muszka plujka i żuczek gnojarek// stanowili dość dobraną parę...”

układzie (którego początek pokrywa się ze środkiem tarczy)? Znaleźć następnie w tym nieruchomym układzie:

- wzory zadające ruch we współrzędnych biegunowych (r, φ) ,
- równanie toru, po którym porusza się punkt (zarówno we współrzędnych biegunowych jak i kartezjańskich),
- składowe radialną i transwersalną wektorów prędkości ($\mathbf{v}$) i przyspieszenia ($\mathbf{a}$), tzn. rzuty tych wektorów na wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ układu biegunowego,
- $|\mathbf{v}|$ oraz $|\mathbf{a}|$,
- wektory styczny $\mathbf{t}$ i normalny $\mathbf{n}$ do toru ruchu w każdym jego punkcie (zob. Zadanie 1.1), oraz składowe $a_t \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}$ i $a_n \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$,
- zależność promienia krzywizny toru ρ od czasu (i sprawdzić tym samym związek $a_n = v^2/\rho$),
- długość toru zakreślanego przez żuczkę w nieruchomym układzie w funkcji czasu t .

Zadanie 1.9^R

Wiedząc, że podczas płaskiego ruchu cząstki kąt pomiędzy kierunkiem jej wektora wodzącego $\mathbf{r}$ i wektorem jej prędkości $\mathbf{v}$ jest stały (i równy α) znaleźć we współrzędnych biegunowych:

- wzór na tor cząstki,
- długość toru w funkcji położenia cząstki.

Przyjąć jako warunki początkowe $\varphi(0) = 0$ i $r(0) = r_0$. Zależność szybkości $|\mathbf{v}(t)|$ od czasu może być dowolna.

Zadanie 1.10^R

Wyznaczyć tor, po jakim powinien z prędkością większą od prędkości dźwięku lecieć samolot, by do obserwatora stojącego na ziemi dźwięk silnika samolotu dochodził z całego toru w tej samej chwili.

Zadanie 1.11^R

Znaleźć i przedyskutować tor i ruch psa, który goni zająca uciekającego z prędkością v po prostej. Pies biegnie z prędkością c taką, że jest ona stale skierowana w stronę zająca. Zbadać kiedy pies zająca dogoni i podać punkt i chwilę złapania szaraka.

Wskazówka: Wybrać układ współrzędnych kartezjańskich xy tak, by w chwili początkowej $t = 0$ pies był w początku układu, a zając w punkcie $(a, 0)$; prosta po której ucieka zając jest wtedy prostą $x = a$. Wykazać, że zachodzi związek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a-x} \left\{ -y + \frac{v}{c} \int_0^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right\},$$

i stąd, różniczkując, uzyskać różniczkowe równanie wyznaczające tor.

Zadanie 1.12^R

Lustro wody w studni obniża się ze stałą prędkością w . W chwili $t = 0$, gdy lustro wody znajdowało się na pewnej nieznannej głębokości, do studni upuszczono (tzn. puszczone z zerową prędkością początkową) kamień. Odgłos pluśnięcia tego kamienia o lustro wody

dotarło spuszczonego kamień w chwili t_1 . Po czasie T od upuszczenia pierwszego kamienia upuszczono drugi kamień, odgłos pluśnięcia którego dotarło spuszczonego go w chwili $T + t_2$. Przyjmując, że (stała) prędkość dźwięku w powietrzu jest równa v_s (i znana) obliczyć na podstawie podanych danych prędkość w opadania lustra wody.

Zadanie 1.13

Nad punktem P na ziemi z samolotu lecącego na stałej wysokości H z prędkością $\mathbf{v}$ wyskoczył spadochroniarz i otworzył spadochron po czasie t_1 , na ziemi zaś wylądował po czasie t_2 (od opuszczenia samolotu). Zakładając, że od otwarcia spadochronu spadał on ze stałą prędkością $\mathbf{u}$ znaleźć:

- 1) prędkość samolotu względem skoczka w funkcji czasu
- 2) odległość samolot-skoczek w funkcji czasu
- 3) ruch skoczka względem punktu P .

(Wszystkie te wielkości wygodnie jest przedstawić graficznie).

Zadanie 1.14^R

Ustawione na ziemi działo może wystrzeliwać pociski o początkowej szybkości v w dowolnym kącie w stosunku do płaszczyzny horyzontu i w dowolnym kierunku azymutalnym. Pomijając wpływ siły Coriolisa wyznaczyć równanie powierzchni ograniczającej obszar, do każdego punktu którego pocisk może dotrzeć.

Zadanie 1.15^R

Punkt porusza się ze stałą szybkością v po leżącej w płaszczyźnie (x, y) krzywej o równaniu $y(x) = (2/3)ax^{3/2}$ ($a > 0$). Podać zależność od czasu współrzędnych x i y jego położenia przyjmując, że $x(0) = 0$. Podać kartezjańskie składowe wektora $\mathbf{v}$ prędkości i wektora $\mathbf{a}$ przyspieszenia punktu oraz składowe przyspieszenia styczną i normalną do toru. Wyznaczyć także promień ρ krzywizny toru punktu jako funkcji jej długości l .

Zadanie 1.16^R

Turysta wchodzi na górkę, której zbocze wznosi się zgodnie ze wzorem $z(x) = \sqrt{ax}$, gdzie $a > 0$, przy czym składowa jego prędkości w kierunku pionowym jest stała i równa u . Oblicz czas, po którym turysta rozpoczynając z punktu o $x = 0$ dotrze do schroniska znajdującego się na zboczu na wysokości h . Podaj współrzędne (x, z) położenia turysty w każdej chwili czasu a także jego prędkość i przyspieszenie. Jaką drogę pokona docierając do schroniska? Wyznacz także krzywiznę zbocza jako funkcję wysokości z .

2 CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU

Zadanie 2.1^R

Punkt materialny o masie m porusza się ruchem jednostajnym, tj. ze stałą wartością prędkości $|\mathbf{v}|$, po okręgu o promieniu R_0 (okrąg położony jest horyzontalnie). Na punkt ten działa siła oporu $\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa\mathbf{v}$ oraz inna zewnętrzna siła $\mathbf{F}$ pozwalająca punktowi utrzymywać stałą prędkość. Znaleźć pracę jaką wykonuje siła oporu $\mathbf{F}_{\text{op}}$ podczas jednego obiegu punktu wokół okręgu. Jaką pracę wykonuje wtedy siła zewnętrzna $\mathbf{F}$? Przyjmując

następnie, że siła oporu znika, obliczyć pracę, jaką wykonać musi zewnętrzna siła $\mathbf{F}$, by spowodować zmianę z R_0 na R_1 promienia okręgu, po którym krąży masa m .

Zadanie 2.2^R

Ciału o masie m nadano prędkość $\mathbf{u}$ skierowaną pod kątem α do powierzchni ziemi. Przyjmując, że istotna jest tylko pozioma składowa siły oporu, która jest proporcjonalna do poziomej składowej prędkości ciała, znaleźć zasięg takiego rzutu ukośnego w funkcji kąta α . Pokazać, że odległość w kierunku poziomym przebyta przez ciało do momentu osiągnięcia przez nie maksymalnej wysokości jest większa od połowy zasięgu.

Zadanie 2.3^R

Po równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu równym α zsuwa się klocek o masie m , na który działa siła oporu $\mathbf{F} = -m\kappa\mathbf{v}$. Znaleźć położenia klocka w funkcji czasu jeśli w chwili $t = 0$ znajdował się on na wysokości h . Sprawdzić, że w granicy $\kappa \rightarrow 0$ dostaje się “szkolne” rozwiązanie. Obliczyć stratę energii mechanicznej (kinetycznej plus potencjalnej) w funkcji czasu i porównać ją z pracą wykonaną przez siłę oporu.

Zadanie 2.4^R

Pocisk o masie m i skierowanej horyzontalnie (w stosunku do pola grawitacji $\mathbf{g}$) prędkości $\mathbf{v}_0$ wpada do akwarium wypełnionego gęstą cieczą, w której działa nań siła oporu $\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa\mathbf{v}$ ($\kappa > 0$). Znaleźć położenie punktu (głębokość, na jakiej się on znajduje), w którym pocisk uderzy w przeciwległą ściankę akwarium odległą od punktu wlotu o d .

Zadanie 2.5^R

Na ciało o masie m i prędkości początkowej $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ działa tylko siła oporu

$$\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa|\mathbf{v}|^\alpha \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \kappa, \alpha > 0.$$

Zbadać, jak czas trwania takiego ruchu i jego zasięg zależą od wykładnika α .

Zadanie 2.6^R

Zbadać możliwe ruchy jednowymiarowego oscylatora harmonicznego z tłumieniem będące rozwiązaniami równania

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = 0,$$

gdzie $\gamma > 0$, $k > 0$ (czynniki 2 w drugim wyrazie został wprowadzony dla rachunkowej wygody). Rozpatrzeć wszystkie możliwe przypadki.

Zadanie 2.7^R

Pokazać, że tor ruchu dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego, czyli leżący na płaszczyźnie tor ruchu cząstki o masie m poddanej działaniu siły sprężystej $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}$ jest elipsą. Jaki warunek muszą spełniać częstości ω_1 i ω_2 nieizotropowego trójwymiarowego oscylatora o sile $\mathbf{F} = -m(\omega_1^2 x\mathbf{e}_x + \omega_2^2 y\mathbf{e}_y + \omega_3^2 z\mathbf{e}_z)$, by tor jego ruchu był krzywą zamkniętą?

Zadanie 2.8^R

Znaleźć ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m , stałej sprężystości $k = m\omega_0^2$ i współczynniku siły tłumiącej $2\gamma = 2m\lambda$ pobudzanego siłą zewnętrzną o harmonicznym zależności od czasu

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \delta).$$

Przedyskutować zależność amplitudy wychyleń oscylatora od częstości Ω siły wymuszającej oraz korelację maksimów wychyleń oscylatora z maksimami siły. Zakładając, że $\lambda \neq 0$ i że ruch trwa już dostatecznie długo, by zależność ruchu od warunków początkowych stała się nieistotna (tj. że $t \gg 1/\lambda$), obliczyć uśrednioną po okresie siły wymuszającej moc przekazywaną przez nią oscylatorowi i zbadać jej zależność od częstości Ω . Co się dzieje z tą pobieraną przez oscylator energią?

Zadanie 2.9^R

Dokonując odpowiednich przybliżeń w ścisłym wzorze na zależność od czasu położenia rozpatrywanego w zadaniu 2.8 oscylatora (i przyjmując, że faza δ siły wymuszającej jest równa zero) przedyskutować jakościowo charakter jego ruchu w różnych reżimach (tj. dla różnych stosunków wielkości ω_0 , Ω i λ), jeśli w chwili $t = 0$ oscylator spoczywał w swoim położeniu równowagi ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$). W szczególności rozpatrzyć przypadek bez tłumienia ($\lambda = 0$), oraz przypadki $0 < \lambda \ll |\omega_0 - \Omega|$ i $|\omega_0 - \Omega| \ll \lambda$.

Zadanie 2.10^R

Podać zależność od czasu wychylenia oscylatora harmonicznego o współczynniku tłumienia λ równym dokładnie jego częstości własnej ω_0 (tzn. o sile oporu $F_{\text{op}} = -2m\omega_0\dot{x}$) pobudzanego siłą harmoniczną $F(t) = F_0 \cos \Omega t$, który w chwili $t = 0$ spoczywał w położeniu $x = 0$. Jak wygląda ruch w granicy $r \equiv \Omega/\omega_0 = 0$? Uzasadnić, że gdy $r \gg 1$ (częstość siły wymuszającej bardzo duża w porównaniu z częstością własną) największe wychylenie oscylatora jest proporcjonalne do $2/r^2$. Jak początkowo, tj. dla $\omega_0 t \ll 1$, narasta wychylenie oscylatora, gdy $r = 1$?

Zadanie 2.11^R

Podać rozwiązanie równania ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m , częstości ω_0 i współczynniku tłumienia $2\gamma = 2m\lambda$ pobudzanego siłą $F(t)$ o dowolnej zależności od czasu.

Zadanie 2.12^R

Znaleźć i przedyskutować ruch jednowymiarowego niethumionego oscylatora harmonicznego o masie m , częstości ω_0 pobudzanego siłą $F(t)$ postaci

- a) $F(t) = F_0 \exp(-\kappa t)$ z $\kappa > 0$,
- b) $F(t) = (t/T)F_0$ dla $0 \leq t \leq T$ i $F(t) = 0$ dla $t > T$,

jeśli w chwili $t = 0$ oscylator znajdował się w spoczynku w położeniu równowagi. W szczególności, powiedzieć, jak wychylenie oscylatora zmienia się z czasem początkowo, tj. gdy, w przypadku pierwszej siły, $\kappa t \ll 1$ i $\omega_0 t \ll 1$ i $\omega_0 t \ll 1$, w przypadku drugiej. Jaka jest amplituda wychyleń po dostatecznie długim czasie w zależności od wartości stosunku

κ/ω_0 w przypadku pierwszej siły? Napisać wychylenie jako funkcję czasu dla $t > T$ w przypadku drugiej siły.

Zadanie 2.13^R

Obliczyć pracę W jaką nad nietłumionym jednowymiarowym oscylatorem harmonicznym o częstości ω_0 wykona w ciągu całego czasu swego nań działania siła postaci

$$F(t) = F_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Rozpatrzeć przypadki: a) gdy w $t \rightarrow -\infty$ (tj. przed włączeniem się siły) oscylator był w całkowitym spoczynku, oraz b) gdy w $t \rightarrow -\infty$ ruch oscylatora był dany wzorem $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Jaka w przypadku oscylatora początkowo spoczywającego jest praca W , gdy $\omega_0 \tau \ll 1$, a jaka, gdy $\omega_0 \tau \gg 1$? Czy można to intuicyjnie zrozumieć? Jak można w drugim przypadku zrozumieć to, że praca W może być ujemna?

Wskazówka: Wykorzystując metody całkowania funkcji zmiennej zespolonej można uzasadnić, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left(-\frac{(t + ia)^2}{\tau^2}\right) = \tau \sqrt{\pi},$$

innymi słowy, przesunięcie w funkcji $\exp(-t^2/\tau^2)$ zmiennej całkowania o liczbę urojoną nie zmienia wartości całki.

Zadanie 2.14^R

Rozwiązując równanie Newtona z siłą Lorentza $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, przedyskutować ruch cząstki o ładunku elektrycznym q i masie m w stałych i jednorodnych, wzajemnie prostopadłych polach: elektrycznym $\mathbf{E}$ i magnetycznym $\mathbf{B}$, w zależności od prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$ cząstki. Sprawdzić otrzymane rozwiązanie $\mathbf{r}(t)$ w przypadku zanikania pola magnetycznego lub elektrycznego. Przedyskutować także wszystkie możliwe typy rzutów toru cząstki na płaszczyznę prostopadłą do pola magnetycznego w zależności od rzutu prędkości cząstki na tę płaszczyznę w chwili wybranej za początkową.

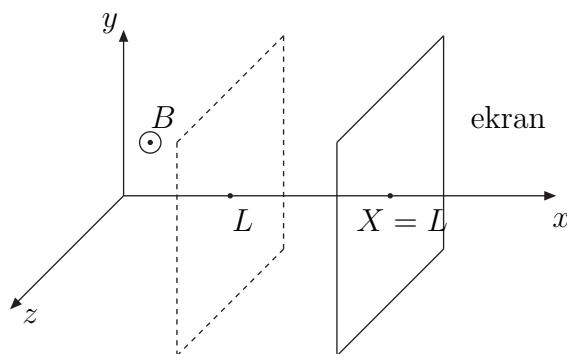
Zadanie 2.15^R

Znaleźć tor cząstki o ładunku q i masie m poruszającej się w stałym i jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ w ośrodku, w którym działa na nią siła oporu $\mathbf{F} = -m \kappa \mathbf{v}$. Pokazać, że rzut na płaszczyznę prostopadłą do kierunku pola magnetycznego krzywej zakreślonej przez cząstkę w trakcie ruchu jest spiralą, tj. okręgiem, którego promień R maleje z czasem. Otrzymać także (z dokładnością do stałej proporcjonalności) zależność $R(t)$ rozpatrując straty energii cząstki powodowane występowaniem siły oporu.

Wskazówka: Równania ruchu w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego najłatwiej rozwiązać wprowadzając zmienną zespoloną $\xi = x + iy$.

Zadanie 2.16^R

Cząstka o masie m i ładunku elektrycznym q znajduje się w jednorodnych polach: magnetycznym $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ ($B > 0$) i elektrycznym, którego wektor $\mathbf{E}$ o stałej długości obraca się



Rysunek 1: Ekran ustawiony za obszarem pola magnetycznego.

ze stałą prędkością kątową Ω równą co do wartości częstości cyklotronowej $\omega_B \equiv qB/m$ w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego: $\mathbf{E} = E(\mathbf{e}_x \cos \Omega t + \mathbf{e}_y \sin \Omega t)$. Znaleźć ruch tej cząstki, jeśli w chwili $t = 0$ pozostawała ona w spoczynku ($\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$). Rozpatrzeć przypadki $\Omega = \omega_B$ oraz $\Omega = -\omega_B$. Sprawdzić, że w granicy $B \rightarrow 0$ ($\omega_B \rightarrow 0$) otrzymane rozwiązania mają właściwą (czyli jaką?) granicę. W obu przypadkach naszkicować tor ruchu cząstki i podać jakościowe wytłumaczenie.

Wskazówka: Bez straty ogólności można przyjąć, że $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$.

Zadanie 2.17^R

Stałe jednorodne pole magnetyczne $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ rozciąga się tylko w obszarze, w którym $0 \leq x \leq L$. W pole to w punkcie $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ wpada bardzo szybka cząstka o ładunku elektrycznym q i prędkości $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x v_0$, $v_0 > 0$. Jakie są współrzędne punktu, w którym cząstka ta uderzy w ekran ustawiony prostopadłe do osi x i przecinający ją w $x = X > L$ (zob. rysunek 1)?

Zadanie 2.18^R

Nadlatujące z różnymi (ale dość dużymi) prędkościami $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_x v_0$ ($v_0 > 0$) cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q wpadają w punkcie $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ w obszar działania stałych i jednorodnych pól magnetycznego $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_z B$ i elektrycznego $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E$ ($B > 0$, $E > 0$). Szerokość obszaru, w którym występują pola wynosi L (wzdłuż osi x ; w kierunkach y i z pola rozciągają się nieograniczenie). Zakładając, iż cząstki są dostatecznie szybkie, pokazać, że punkty, w których uderzą one w prostopadły do osi x ekran ustawiony w odległości $d+L$ od początku układu współrzędnych utworzą parabolę o kształcie zależącym od stosunku q/m . (W ten sposób w roku 1913 J.J. Thomson wykazał istnienie izotopów neonu o liczbach masowych $A = 20$ i $A = 22$).

Zadanie 2.19^R

Łódź podwodna o całkowitej masie m jest napędzana silnikiem o stałej mocy P . Opór stawiany przez wodę można w przybliżeniu wyrazić siłą $F = -\kappa v$, gdzie v jest prędkością łodzi. Zakładając, że prędkość łodzi w chwili $t = 0$ była równa zero znaleźć jej prędkość i położenie w dowolnej chwili t . Znaleźć też czas, po którym osiągnie ona prędkość równą połowie maksymalnie możliwej (tj. połowie prędkości granicznej). Jaka będzie prędkość

łodzi po długim czasie, jeśli wystartowała ona z prędkością większą od prędkości granicznej? Jak przebyta droga s przyrasta z czasem dla dużych czasów t ?

Zadanie 2.20^R (Autorstwa A. Szymachy)

W cylindrycznym naczyniu (o przekroju poprzecznym A) zamkniętym mogącym poruszać się bez tarcia tłoczkiem o masie m , znajduje się N cząstek jednoatomowego gazu doskonałego (o równaniu stanu $pV = Nk_B T$ i stałym cieple właściwym c_V). Początkowa objętość gazu wynosi V_0 . Znaleźć zależność od czasu położenia tłoczka przy adiabatycznym rozprężaniu się gazu.

Uwaga: Zadanie to daje się rozwiązać ściśle do końca!

Zadanie 2.21^R

Punktowa masa m porusza się pionowo w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$. Siła oporu działająca na nią jest dana wzorem $\mathbf{F} = -\lambda|\mathbf{v}|\mathbf{v}$. Znaleźć zależność prędkości i położenia masy m od czasu w przypadku, gdy jej ruch rozpoczął się z zerową prędkością na pewnej wysokości. Podać jak zmieniają się te wielkości na samym początku ruchu i po dostatecznie długim czasie. Przedyskutować jakościowo także przypadki niezerowej prędkości początkowej i jej dwu możliwych kierunków (w górę i w dół).

Zadanie 2.22^R

Udowodnić, że gdy punktowa cząstka o masie m porusza się w polu siły o potencjale

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa}{r} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r},$$

gdzie $\mathbf{F}$ jest stałym wektorem, stałymi ruchu są wielkości: całkowita energia E cząstki, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}$ oraz

$$A = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) - \frac{\kappa}{r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2} (\mathbf{F} \times \mathbf{r})^2.$$

Zadanie 2.23^R

Cząstka o masie m i ładunku elektrycznym q porusza się w stałym i jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B}$. Różniczkując po czasie wielkość $\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$, gdzie $\mathbf{L}$ jest momentem pędu cząstki, znaleźć wielkość, która pozostaje stała w takim ruchu. Zapisać tę wielkość we współrzędnych cylindrycznych o osi z równoległej do pola magnetycznego $\mathbf{B}$. Wyrazić ją jawnie przez warunki początkowe ruchu (tj. przez $\mathbf{r}(0)$ i $\mathbf{v}(0)$). Wykorzystując jej stałość oraz jeszcze jedną zachowaną wielkość znaleźć ruch.

Zadanie 2.24^R

Cząstka o ładunku elektrycznym q i masie m porusza się w polu magnetycznym

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{g}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

wytwarzanym przez monopol magnetyczny. Pokazać, że wektor

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} - qg \frac{\mathbf{r}}{r},$$

jest podczas jej ruchu stały. Wybierając oś z układu kartezjańskiego w kierunku wektora $\mathbf{Q}$ i obliczając iloczyny skalarne $\mathbf{Q}$ z wersorami $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ i $\mathbf{e}_\varphi$ związanymi z układem współrzędnych sferycznych, pokazać, że w polu monopola magnetycznego cząstka porusza się po stożku scharakteryzowanym przez stały kąt $\theta = \theta_0$. Wykorzystując to, że pole magnetyczne nie wykonuje pracy, znaleźć równanie $r = r(\varphi)$ toru cząstki oraz zależność jej położenia od czasu.

Zadanie 2.25^R

Posługując się Feynmanowskim modelem atomu jako naładowanego elektronu o masie m uwiązanego sprężynką (o współczynniku sprężystości $m\omega_0^2$) do nieruchomego jądra, wyjaśnić jakościowo, dlaczego po umieszczeniu atomu w stałym i jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B}$ w kierunku równoległym do tego pola obserwuje się promieniowanie o dwóch różnych częstościach (jakich), a w kierunku doń prostopadłym - promieniowanie o trzech różnych częstościach.

Wskazówka: Pamiętać, że przyspieszany ładunek elektryczny promieniuje; rejestrowany w chwili t wektor pola elektrycznego takiego promieniowania jest dany wzorem (w tym kretyńskim układzie SI)

$$\mathbf{E}(t, r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{a}_\perp(t - r/c)}{c^2 r},$$

gdzie r jest odległością od przyspieszającego ładunku, $\mathbf{a}_\perp$ zaś jest rzutem jego chwilowego przyspieszenia, obliczonym w chwili wcześniejszej, $t - r/c$, niż chwila obserwacji t , na kierunek prostopadły do kierunku, z którego ładunek jest obserwowany.

3 RUCH JEDNOWYMIAROWY - WYKORZYSTANIE ZACHOWANIA ENERGII

Zadanie 3.1^R

Znaleźć jednowymiarowy ruch cząstki o masie m w potencjale Morse'a

$$V(x) = V_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad V_0, \alpha > 0.$$

W przypadku ruchu z ujemną całkowitą energią E wyznaczyć jego okres. Pokazać, że gdy $\varepsilon \equiv V_0 - |E| \ll V_0$, ruch jest w przybliżeniu harmoniczny i sprawdzić, że częstość tego ruchu harmonicznego (czyli także okres) można znaleźć rozwijając potencjał wokół minimum. W przypadku $E > 0$, pokazać, że dla $t \rightarrow \pm\infty$ ruch jest niemal ruchem jednostajnym. Podać odpowiadającą tej granicy asymptotyczną postać $x(t)$.

Zadanie 3.2^R

Znaleźć jednowymiarowy ruch cząstki o masie m w potencjale

$$V(x) = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(x/a)}.$$

W przypadku ruchu z ujemną całkowitą energią E wyznaczyć jego okres. Pokazać, że gdy $\varepsilon \equiv V_0 - |E| \ll V_0$, ruch jest w przybliżeniu harmoniczny i sprawdzić że częstość tego ruchu harmonicznego (czyli także okres) można znaleźć rozwijając potencjał wokół minimum. W przypadku $E > 0$ pokazać, że dla $t \rightarrow \infty$ ruch jest niemal ruchem jednostajnym. Podać asymptotyczną postać $x(t)$, jeśli $x(0) = 0$ i $v(0) = v_0 > 0$. Czy ruch o $E > 0$ od $x = -b$ do $x = b$ (np., gdy $b \gg a$, czyli gdy “przestrzelujemy” cząstkę przez obszar działania potencjału) trwa dłużej, czy krócej niż ruch (z tą samą prędkością w punkcie $x = -b$) przy braku potencjału?

Zadanie 3.3^R

Znaleźć jednowymiarowy ruch w potencjale $V(x) = -V_0 x^4$ cząstki o masie m i zerowej całkowitej energii. Przyjąć, że $x(0) = x_0 > 0$ i rozpatrzeć przypadki $\dot{x}(0) \equiv v_0 > 0$ i < 0 .

Zadanie 3.4^R

Zbadać, jak wygląda jednowymiarowy ruch cząstki o masie m i całkowitej energii E w potencjale $V(x)$ w pobliżu punktu zwrotnego.

Zadanie 3.5^R

Zbadać, jak czas dochodzenia masy m o całkowitej energii E poruszającej się w jednym wymiarze w potencjale $V(x)$ do punktu zwrotnego x_0 położonego blisko punktu x_e (po przeciwnej stronie x_0 , niż ta, po której porusza się masa m), w okolicy którego potencjał można przybliżyć wzorem $V(x) = V(x_e) - G_n(x - x_e)^n + \dots$, z $G_n > 0$ zależy od różnicy $V(x_e) - E \equiv \varepsilon$. Rozpatrzeć przypadki $n = 2$ i $n > 2$.

Zadanie 3.6^R

Znaleźć w pierwszym przybliżeniu zmianę δT okresu T jednowymiarowego ruchu cząstki o masie m spowodowaną małą zmianą $\delta V(x)$ wiążącego tę cząstkę w ograniczonym obszarze potencjału $V(x)$, przy niezmięnionej całkowitej energii E ruchu. Zakładamy tu, że zmiana $\delta V(x)$ potencjału nie zmienia jakościowo charakteru ruchu (cząstka nadal pozostaje uwięziona w ograniczonym obszarze). Obliczyć w tym przybliżeniu δT , gdy $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, a $\delta V(x) = \frac{1}{4}m\beta x^4$, gdzie $\beta > 0$. Sprawdzić ten wynik na przykładzie potencjału z Zadania 3.2

Zadanie 3.7^R

Znaleźć zmianę δT okresu T jednowymiarowego ruchu cząstki o masie m spowodowaną małą zmianą $\delta V(x) = \frac{1}{3}m\gamma x^3$ potencjału $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ wiążącego cząstkę w ograniczonym obszarze przy niezmięnionej całkowitej energii mechanicznej E ruchu. Wykorzystując ten wynik znaleźć pierwszą poprawkę (tj. poprawkę proporcjonalną do energii E ruchu), o którą różni się okres ruchu w potencjale Morse’a (Zadanie 3.1) od okresu ruchu w potencjale oscylatora harmonicznego o odpowiedniej częstości i porównać wynik z poprawką otrzymaną z odpowiedniego rozwinięcia okresu wyznaczonego ze ścisłego rozwiązania. Wyrazić także zmianę δT okresu, gdy potencjał jest dokładnie równy $V(x) + \delta V(x)$ w postaci nieskończonego szeregu i przypadku potencjału ściśle równego $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{3}m\gamma x^3$ powiedzieć, kiedy ten szereg jest zbieżny.

Zadanie 3.8^R

Wykorzystując zachowanie energii mechanicznej znaleźć wzór wyrażający w sposób przybliżony zależność od czasu położenia cząstki o masie m poruszającej się w potencjale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{3}m\gamma x^3$ z energią całkowitą E i znajdujące się w $t = 0$ w $x = 0$. Ograniczyć się do przybliżenia pierwszego rzędu w małym (z założenia) parametrze γ . Sprawdzić otrzymane przybliżone rozwiązanie wstawiając je do odpowiedniego równania ruchu.

Zadanie 3.9^R

Stosując zwykły rachunek zaburzeń, tj. podstawiając do równania Newtona rozwiązanie w postaci szeregu $x(t) = x_0(t) + \delta x(t) + \mathcal{O}(\gamma^2)$ z $\delta x(t)$ proporcjonalnym do γ i przyrównując do siebie wyrazy z tymi samymi potęgami γ po obu stronach równości, znaleźć z dokładnością do pierwszego rzędu w γ przybliżony wzór wyrażający zależność od czasu położenia cząstki o masie m poruszającej się w potencjale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{3}m\gamma x^3$ z energią całkowitą E i znajdujące się w $t = 0$ w $x = 0$. Porównać wynik z otrzymanym metodą z Zadania 3.8.

Zadanie 3.10^R

Znaleźć ruch płaskiego wahadła sferycznego, tj. masy m zawieszanej w polu $\mathbf{g}$ na nieważkim sztywnym pręcie o długości l , mogącym obracać się w ustalonej płaszczyźnie pionowej, jeśli wiadomo, że w najniższym położeniu jego energia kinetyczna T_{kin} jest równa $2mgl$. Jaki jest okres T ruchu, gdy w najniższym położeniu $T_{\text{kin}} \gg 2mgl$?

Zadanie 3.11

Korzystając z całki pierwszej energii otrzymać ogólny wzór wyrażający okres jednowymiarowego ruchu masy m w potencjale $V(x) = \frac{1}{2}kx^{2n}$, gdzie $k > 0$, a $n = 1, 2, \dots$, przez funkcję $\Gamma(x)$.

Wskazówka:

$$\int_0^1 d\xi \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Zadanie 3.12^R

Cząstka o masie m nadlatuje z nieskończoności, gdzie ma prędkość v , i zderza się centralnie (tzn. cały ruch odbywa się wzdłuż jednej prostej) ze spoczywającą początkowo drugą cząstką o takiej samej masie. Cząstki odpychają się za pośrednictwem siły o potencjale

$$V(x_1, x_2) = V(|x_1 - x_2|) = \frac{|\kappa|}{|x_1 - x_2|^n}.$$

Jaka będzie minimalna odległość między cząstkami? Wyznaczyć położenie punktu do którego dotrze nadlatująca cząstka.

Wskazówka: Rozpatrzyć nadlatywanie cząstki ze skończonej odległości R i dopiero potem zbadać istnienie granicy $R = \infty$.

Zadanie 3.13^R

Odwołując się do zachowania energii ruchu względnego i innych zasad dynamiki, w przedyskutować jakościowo, co się dzieje gdy w sytuacji takiej jak w poprzednim Zadaniu cząstka będąca początkowo w spoczynku ma masę M różną od masy m cząstki nadlatującej z nieskończoności (gdzie miała prędkość v). Obliczyć na jaką minimalną odległość cząstki zbliżą się do siebie?

Zadanie 3.14

Punktowa masa m porusza się w jednowymiarowym potencjale danym wzorem

$$V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2(x/a),$$

w którym $V_0 > 0$. Znaleźć zależność jej położenia od czasu i pokazać, że ruch przy małych wychyleniach z (oczywistego) położenia równowagi ma charakter drgań harmoniczných, których częstość można także wyznaczyć bez znajomości rozwiązywania ścisłego równania ruchu.

4 RUCH UKŁADÓW O ZMIENNEJ MASIE

Zadanie 4.1^R

Na odkrytą płaską kolejową platformę o masie M_0 poruszającą się poziomo po prostym torze z prędkością V_0 zaczyna w chwili $t = 0$ walić śnieg (pada on prostopadłe do powierzchni platformy) w tempie μ kilogramów na sekundę. Jak z czasem będzie się teraz zmieniać prędkość platformy, jeśli:

- kolejarz (jego masa jest wliczona w M_0) zmiata cały osiadający śnieg w bok (nadając mu jakąś prędkość prostopadłą względem platformy)?
- zmiata cały osiadający śnieg, ale do tyłu, nadając mu prędkość w względem platformy?
- śnieg osiada, a kolejarz smacznie śpi?

Zadanie 4.2^R

Rakieta wznosi się pionowo z Ziemi wyrzucając gaz ze stałą prędkością w do tyłu względem siebie samej. Masa rakiety zmienia się wskutek tego zgodnie ze wzorem $m(t) = m_0 - \kappa t$, gdzie κ jest stałą. Znaleźć zależność położenia rakiety od czasu, jeśli jej prędkość początkowa, w chwili $t = 0$, była równa v_0 .

Zadanie 4.3^R (pomysłu A. Szymachy)

Wyprowadzić wzór Ciołkowskiego $v(t) = -w \ln(M(t)/M(0))$ wyrażający zależność prędkości rakiety rozpędzającej się w próżni (z dala od wszelkich sił zewnętrznych) wskutek odrzutu gazu od stanu spoczynku od jej (zmieniającej się z czasem) masy, przyjmując, że gazy są wyrzucane impulsami, a z każdym impulsem rakietę traci $1/(n+1)$ część swojej aktualnej masy. Przyjąć, że gaz jest odrzucany z prędkością w względem rakiety skierowaną przeciwnie do prędkości rakiety.

Zadanie 4.4^R

Na stole leży sznur o całkowitej długości l . Początkowo $1/4$ jego długości zwisa z krawędzi stołu pionowo w dół. Współczynnik tarcia (dynamicznego) sznura o stół wynosi f . Po jakim czasie sznur zsunie się całkowicie ze stołu?

Uwaga: Choć nie jest to konieczne, w celach szkoleniowych dobrze jest tu potraktować ruch sznura jak ruch dwu podukładów (zwisający kawałek sznura i kawałek pozostający na stole) o zmiennych masach i wypisać równania ruchu obu tych podukładów.

Zadanie 4.5^R (z Białkowskiego)

Wyprowadzić i przedyskutować wzór na zależność od czasu prędkości kropli spadającej w ziemskim polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$. Kropla spadając albo paruje (jeśli spada w próżni) albo para wodna z otoczenia kondensuje na niej. Przyjąć, że szybkość zmiany z czasem masy kropli jest proporcjonalna do jej aktualnego promienia⁵ (traktujemy kroplę jak kulę i zakładamy stałość gęstości wody ją tworzącej), a także iż działa na nią siła oporu (gdy spada w powietrzu) proporcjonalna do jej szybkości i do aktualnego promienia. Przyjąć

⁵W istocie, gdy kropla spada w próżni, szybkość zmiany jej masy jest proporcjonalna do pola jej powierzchni, czyli do r^2 ; gdy zaś para z otoczenia kondensuje na niej, szybkość zmiany masy jest mniej więcej $\propto r^{3/2}$, gdy prędkość kropli jest niewielka i mniej więcej $\propto r^{1/2}$ przy większych prędkościach.

też, że tracona lub zyskiwana przez kroplę woda ma zerową prędkość względem ośrodka, w którym kropla spada.

Zadanie 4.6^R

W stojący początkowo samochód o masie M uderzają poruszające się poziomo względem ziemi z prędkością u piłki, które od samochodu odbijają się całkowicie sprężysto również w kierunku poziomym. Piłki mają masę m i są wyrzucane w kierunku samochodu na tyle często, że można przyjąć iż w układzie związanym z ziemią tworzą one strumień masy σ (kg/s). Znaleźć prędkość i położenie samochodu w funkcji czasu. Jakie będą prędkość i położenie samochodu w funkcji czasu, jeśli piłki zamiast odbijać się od niego będą do niego wpadać i pozostawać w nim?

Zadanie 4.7^R (autor: K. Meissner)

Wyprowadzić relatywistyczny analog wzoru Ciołkowskiego (Zadania 4.2 i 4.3) wyrażający zależność prędkości rakiety (względem układu odniesienia, w którym ona początkowo spoczywała) rozpędzającej się w próżni (z dala od wszelkich sił zewnętrznych) wskutek odrzutu gazu od stanu spoczynku od jej (zmieniającej się z czasem) masy, przyjmując, że gazy są wyrzucane z rakiety z prędkością w względem rakiety (tj. w układzie z nią związanym) skierowaną przeciwnie do prędkości rakiety. Pokazać, że relatywistyczny wzór przechodzi we wzór Ciołkowskiego. Jaką ma on postać, gdy wyrzucanym gazem jest gaz fotonów (silnik fotonowy)?

5 RÓWNIANIA NEWTONA W UKŁADACH NIEINERCJALNYCH

Zadanie 5.1^R

Dany jest zmieniający się z czasem wektor $\mathbf{b}(t)$. Powiązać jego pochodne obliczone w dwu różnych układach odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Układy te mają wspólny początek i obracają się względem siebie wokół wspólnej osi $z = z'$. Kąt jaki tworzy oś x' układu $\mathcal{O}'$ z osią x układu $\mathcal{O}$ jest pewną funkcją czasu $\varphi(t)$.

Uwaga: Żaden z tych układów nie jest wyróżniony. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercyjnym.

Zadanie 5.2^R

Znaleźć całkę pierwszą równania “Newtona” (tj. równania z siłami bezwładności) wyznaczającego ruch masy m w układzie nieinercyjnym $\mathcal{O}'$ obracającym się względem układu inercyjnego $\mathcal{O}$ ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ tak, że wektor łączący środek układu inercyjnego ze środkiem układu nieinercyjnego pozostaje stały, gdy siły niebezwładnościowe w układzie nieinercyjnym są potencjalne, a ewentualne więzy, jakim poddana jest masa m , są w tymże układzie niezależne od czasu. Znaleźć związek tej całki pierwszej z energią mechaniczną masy m mierzoną w układzie inercyjnym.

Zadanie 5.3^R

Przedyskutować jakościowo wpływ sił odśrodkowej i Coriolisa na ruch (w pobliżu powierzchni Ziemi) masy m względem nieinercyjnego układu odniesienia mającego początek w punkcie o szerokości geograficznej φ na powierzchni obracającej się Ziemi.

Zadanie 5.4^R

Z wieży o wysokości $h = 125$ m stojącej na równiku spuszczone swobodnie kamień o masie m . Jak daleko upadnie on od podstawy wieży? Pominąć wszystkie możliwe siły oporu. Rozwiązać ten problem w układzie związanym z Ziemią oraz w układzie inercyjnym, którym Ziemia (wraz z wieżą) się obraca.

Zadanie 5.5^R

Stosując rachunek zaburzeń (albo inaczej, zasadę Banacha) podać rozwinięcie ogólnego rozwiązania $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ równania Newtona wyznaczającego ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z powierzchnią Ziemi słuszne w przypadku ruchów krótkotrwałych, w trakcie których małym pozostaje bezwymiarowy czynnik ωt (ω jest tu prędkością kątową obrotu Ziemi).

Zadanie 5.6^R

Korzystając z wyprowadzonego w Zadaniu 5.5 rozwinięcia

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 - \boldsymbol{\omega} t \times \left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3} \mathbf{g} t^2 \right) + \mathcal{O}(\omega^2 t^2),$$

w którym $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}_0$ są odpowiednio początkowym położeniem i początkową prędkością, $\boldsymbol{\omega}$ wektorem prędkości kątowej obrotu Ziemi, a $\mathbf{g}$ polem ciężenia, zbadać spadek swobodny

kamienia z wieży o wysokości h stojącej na szerokości geograficznej⁶ φ i znaleźć odchylenie kamienia od podstawy wieży.

Zadanie 5.7^R

Korzystając z przybliżonego wzoru wyprowadzonego w Zadaniu 5.5 napisać *explicite* wzory na zależność od czasu składowych wektora położenia w przypadku rzutu ukośnego pod kątem α do poziomu w kierunku na Wschód (tj. w sytuacji, gdy równoległa do Ziemi składowa prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$ skierowana jest dokładnie wzdłuż równoleżnika) w punkcie o szerokości geograficznej φ na obracającej się Ziemi. Znaleźć różnicę zasięgów (tj. odległości punktu upadku od punktu wyrzucenia) takiego rzutu na obracającej się i nieobracającej się Ziemi (tj. poprawkę do zasięgu spowodowaną siłą Coriolisa). Objąć jakościowo pochodzenie poszczególnych przyczynków tej poprawki. Czy można tak dobrać kąt α , by siła Coriolisa nie spowodowała zmiany zasięgu?

Uwaga: We wszystkich wyrażeniach uwzględniać tylko wyrazy liniowe w prędkości kątowej obrotu Ziemi.

Zadanie 5.8^R

Rakiety V2, którymi w czasie II Wojny Światowej ostrzeliwany był Londyn, przebywały drogę $s = 300$ km i na skutek działania siły Coriolisa doznawały odchylenia $d = 3700$ m (w którą stronę?). Zakładając, że wystrzeliwane były one z równoległą do ziemi prędkością v_0 skierowaną wzdłuż południka (najpewniej południka 0) i pomijając wpływ różnych sił oporu działających na nie, znaleźć czas ich lotu. Przyjąć, że szerokość geograficzna miejsca wystrzelenia i Londynu był a mniej więcej ta sama i wynosiła 52° .

Zadanie 5.9^R (Wahadło Foucault, takie jak u U. Eco)

Znaleźć w przybliżeniu małych wychyleń od położenia równowagi ruch wahadła Foucault (tj. ciężarka) o masie m zawieszonego na (w przybliżeniu) nieważkiej i nierozciągliwej lince o długości ℓ nad punktem na powierzchni Ziemi (nad posadzką paryskiego Panteonu) znajdującym się na szerokości geograficznej φ .

Zadanie 5.10 (Twierdzenie Larmora)^R

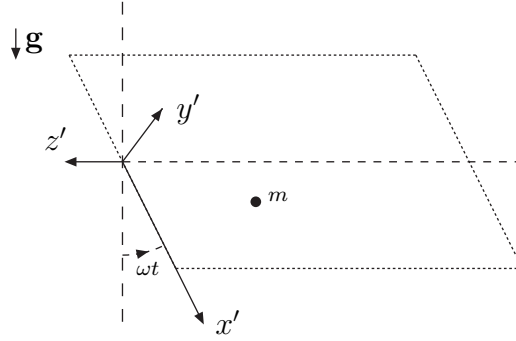
Pokazać, że jeśli cząstka o masie m wykonuje ruch $\mathbf{r}(t)$ pod wpływem jakiejś zadanej siły zewnętrznej $\mathbf{F}$, to po zmianie siły

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} + \varepsilon m \mathbf{v} \times \mathbf{k},$$

gdzie $\mathbf{k}$ jest stałym wektorem, a $|\varepsilon| \ll 1$, tor ruchu $\mathbf{r}(t)$ w pierwszym przybliżeniu (tj. z dokładnością, w której uwzględnia się tylko efekty rzędu ε) zacznie się obracać. Jak zmieni się wtedy energia kinetyczna (a więc i energia całkowita) cząstki?

W przypadku, gdy $\varepsilon m \mathbf{k} = q \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{B}$ jest stałym i jednorodnym polem magnetycznym, stwierdzenie będące przedmiotem tego zadania jest treścią tzw. twierdzenia Larmora.

⁶Korzystającym z podręcznika G. Białkowskiego przypominam, że przyjęło się liczyć szerokość geograficzną od równika (a nie od bieguna północnego).



Rysunek 2: Masa na wirującej płaszczyźnie.

Zadanie 5.11^R

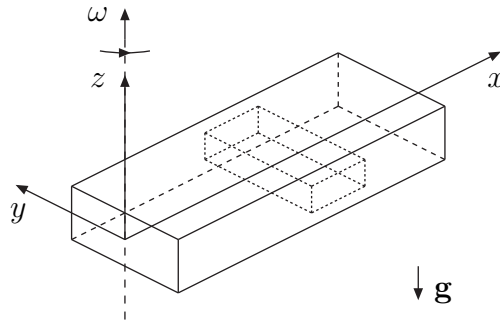
Znaleźć ruch cząstki o masie m po znajdującej się na obracającej się Ziemi, na szerokości geograficznej φ płaszczyźnie prostopadłej do (lokalnego) kierunku pionu. Na cząstkę działa siła oporu $\mathbf{F}_{\text{op}} = -m\kappa\mathbf{v}$, siła przyciągania Ziemskiego oraz siła reakcji podłoża. Zakładając, że w chwili $t = 0$ cząstka znajduje się w $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ i ma prędkość $\mathbf{v}_0$ skierowaną na południe, znaleźć jej położenie w kierunku równoleżnikowym w chwili, gdy jej prędkość wskutek działania siły oporu spadła do połowy swej początkowej wartości. Uwzględnić tylko wyrazy liniowe w prędkości kątowej ω Ziemi. Odtworzyć rozwiązanie uzyskane przez bezpośrednie całkowanie równań ruchu (i rozwinięcie wyników do wyrazów liniowych względem ω) stosując rozwinięcie wokół rozwiązania z zerową prędkością kątową obrotu Ziemi.

Zadanie 5.12^R

Mała kulka o masie m , wykonana z materiału o gęstości ρ_{kulki} opada na dno naczynia wypełnionego cieczą o gęstości ρ_{cieczy} ($\rho_{\text{cieczy}} < \rho_{\text{kulki}}$). W naczyniu działa na kulkę siła oporu $\mathbf{F} = -m\kappa\mathbf{v}$. Znaleźć ruch tej kulki uwzględniając siłę Coriolisa i siłę wyporu, jeśli $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$. Ograniczyć się w rozwiązaniu do wyrazów liniowych w prędkości kątowej ω Ziemi. W którą stronę spadając kulka odchyli się od pionu? Znaleźć wielkość tego odchylenia w chwili, gdy prędkość kulki osiągnęła połowę swej wartości granicznej (jakiej?). Zbadać granicę $\kappa \rightarrow 0$ rozwiązania.

Zadanie 5.13^R

Punkt materialny o masie m może się przemieszczać po gładkiej płaszczyźnie, która wiruje w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$ wokół przechodzącej przez nią poziomej (w stosunku do $\mathbf{g}$) osi z prędkością kątową ω (zob. Rysunek 2). Pomijając wpływ obrotu Ziemi podać równania Lagrange'a pierwszego rodzaju wyznaczające ruch masy m w układzie współrzędnych związanych z płaszczyzną, rozwiązać je i opisać jakościowo charakter ruchu rozpatrując zarówno przypadek więzów jednostronnych jak i dwustronnych. Znaleźć siłę reakcji i podać przykład warunków początkowych prowadzących (jeśli więzy są jednostronne) do oderwania się masy m od płaszczyzny. Czy możliwy jest ruch masy m w ograniczonym obszarze płaszczyzny?



Rysunek 3: Kłócek (zaznaczony linią kropkowaną) mogący przemieszczać się w wydrążeniu (o prostokątnym przekroju) wirującej belki.

Zadanie 5.14^R

Belka ma wzdłuż całej swojej długości prostokątne wydrążenie. Belka ta wiruje z prędkością kątową ω wokół osi prostopadłej do wewnętrznego wydrążenia i przechodzącej przez jej koniec. W wydrążeniu znajduje się prostokątny kłócek o masie m , który może się przemieszczać wzdłuż wydrążenia (zob. rysunek 3). Znaleźć ruch kłocka wzdłuż osi x , uwzględniając siły Coriolisa i odśrodkową (w układzie obracającym się wraz z belką) i współczynnik μ (μ_0) dynamicznego (statycznego) tarcia kłocka o ścianki wydrążenia. Jak duża może być prędkość kątowa, by kłócek spoczywający w $x_0 \neq 0$ nie został wprawiony w ruch? Przedyskutować jakościowo możliwe rodzaje ruchu. Sprawdzić granicę $\omega \rightarrow 0$ uzyskanego rozwiązania.

Zadanie 5.15

Wewnątrz rurki o prostokątnym przekroju (wymiarów $2R \times 2R$) obracającej się wokół osi z (równoległej do kierunku pola grawitacyjnego) z prędkością kątową ω znajduje się kulisty koralik o masie m i promieniu R zaczepiony do osi obrotu sprężynką. Sprężynka ma zerową długość swobodną, tj. siła przyciągająca koralik do osi obrotu dana jest wzorem $F_r = -kr$, gdzie r jest odległością od osi. Wskutek chropowatości ścianek rurki na koralik działa dodatkowo siła tarcia dynamicznego $\mathbf{F}_{\text{tarcie}} = -\mu|\mathbf{F}_{\text{nac}}|\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, gdzie $\mathbf{F}_{\text{nac}}$ jest siłą z jaką koralik naciska na ściankę rurki. Znaleźć ruch koralika wzdłuż osi rurki uwzględniając także siłę odśrodkową i siłę Coriolisa.

6 ZASADA d'ALEMBERTA

I RÓWNANIA LAGRANGE'A I-go RODZAJU

Zadanie 6.1^R (Raz zobaczyć więzy nieholonomiczne)

Znaleźć więzy, którym poddany jest układ składający się z dwóch kół o takich samych promieniach a połączonych osią o ustalonej długości b i toczących się bez poślizgu po będącym płaską powierzchnią podłożu. Każde z kół może obracać się na osi niezależnie od drugiego.

Zadanie 6.2^R

Klocek o masie m traktowany jak punkt materialny zsuwa się po szorstkiej powierzchni równi pochyłej w ziemskim polu $\mathbf{g}$. Współczynniki statycznego i dynamicznego tarcia klocka o równię są równe odpowiednio μ_0 i μ . Zakładając, że w chwili $t = 0$ klocek spoczywał na równi znaleźć jego ruch w zależności od kąta α nachylenia równi.

Zadanie 6.3^R

Na płaskiej powierzchni stołu leży klin o masie M , kącie nachylenia α i wysokości górnej krawędzi h . Po klinie, wskutek działania skierowanego pionowo w dół pola grawitacyjnego g , może zsuwać się klocek o masie m . Pomiedzy klockiem a klinem występuje siła tarcia dynamicznego równa co do wartości sile nacisku klocka na na klin razy współczynnik μ_1 . Podobna siła tarcia, o współczynniku μ_2 występuje pomiedzy klinem a stołem. Posługując się równaniami Newtona z więzami (czyli równaniami Lagrange'a I-go rodzaju) znaleźć siły reakcji pomiedzy klinem a klockiem oraz pomiedzy klinem a stołem w sytuacji, gdy klocek zaczyna zsuwać się z klina. Znaleźć jawne wzory na siły reakcji i przyspieszenia, gdy $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

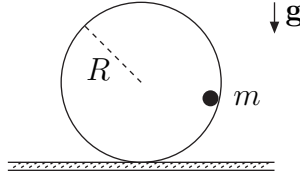
Zadanie 6.4^R

Punkt materialny o masie m może poruszać się po wewnętrznej stronie ustawionej pionowo (tj. tak, że jedna z jej średnic jest równoległa do ziemskiego pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$) nieruchomej obręczy o promieniu R (zob. rysunek 4). Pomijając tarcie napisać równania ruchu uwzględniające siłę reakcji więzów. Traktując te więzy jak jednostronne, znaleźć zależność siły ich reakcji od położenia punktu na obręczy, jeśli w najniższym położeniu punkt miał liniową prędkość v_0 . Jaka musi być minimalna prędkość v_0 aby punkt nigdy nie oderwał się od obręczy? Znaleźć ruch i jego częstość w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi. W przypadku, gdy całkowita energia jest akurat wystarczająca do osiągnięcia przez masę m najwyższego punktu toru, znaleźć zależność jej położenia na obręczy od czasu. (Czy jednostronne więzy pozwolą mu osiągnąć ten punkt?) Rozpatrzyć także przypadek, gdy masa m porusza się bez tarcia po zewnętrznej stronie obręczy i znaleźć punkt, w którym puszczone swobodnie (z zerową prędkością) z najwyższego punktu obręczy oderwie się ona od niej.

Wskazówka: Najwygodniej jest użyć układu biegunowego.

Zadanie 6.5^R

Jaką prędkość należy w najniższym punkcie obręczy nadać masie m z Zadania 6.4, aby



Rysunek 4: Masa m ślizgająca się po wewnętrznej powierzchni gładkiej obręczy.

mogła ona, nie odrywając się od obręczy, osiągnąć jej punkt najwyższy, jeśli współczynnik tarcia dynamicznego masy m o obręcz jest równy μ ?

Wskazówka: Napisać równanie wyrażające straty energii *kinetycznej* masy m przy jej przemieszczaniu się po obręczy od φ do $\varphi + d\varphi$ na skutek wykonywania nad nią (ujemnej) pracy przez siłę grawitacji i siłę tarcia.

Zadanie 6.6^R

Punkt materialny o masie m porusza się w płaszczyźnie xz w polu siły ciężkości $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$ po gładkiej cykloidzie zadanej (parametrycznie) równaniami

$$\begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin \varphi), \\ z &= a(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

gdzie $0 < \varphi < 2\pi$. Znaleźć ruch tego punktu posługując się równaniem Lagrange'a pierwszego rodzaju (ograniczyć się do ruchów, w trakcie których punkt nie opuszcza cykloidy albo przyjąć, że więzy są dwustronne). Wyznaczyć siłę reakcji jako funkcję parametru φ . Rozwiązać także problem korzystając z zachowania energii. Wyprowadzić równanie wyznaczające ten sam ruch korzystając z równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

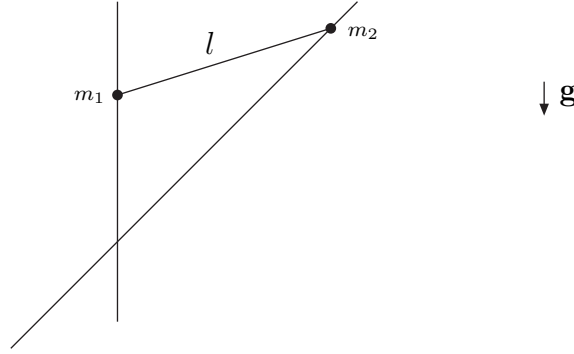
Zadanie 6.7^R

Punkt materialny o masie m zsuwa się w polu grawitacyjnym mającym kierunek osi z ($\mathbf{g} = -\mathbf{e}_z g$) po górnej części paraboli zadanej wzorem $z^2 = ax$ (ruch jest płaski). Przyjmując, że ruch rozpoczął się z wysokości $z = h$, na której prędkość punktu była równa zero, sprowadzić problem znalezienia ruchu (tj. położenia masy m na paraboli w funkcji czasu) do kwadratury, znaleźć siłę reakcji w funkcji położenia i równanie wyznaczające miejsce, w którym punkt oderwie się od paraboli. Podać współrzędną z punktu oderwania się, gdy $h = \frac{7}{2}a$.

Wskazówka: Pamiętać, że siła reakcji nie wykonuje (jeśli więzy są, tak jak tu, niezależne od czasu) pracy, w związku z czym energia mechaniczna jest podczas ruchu stała.

Zadanie 6.8^R

Punktowa masa m poruszająca się w polu siły ciężkości $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ jest zmuszona do pozostawania na linii śrubowej zadanej wzorami $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = a\varphi$. Napisać równania Lagrange'a I-go rodzaju wyznaczające jej ruch oraz siły reakcji. Znaleźć położenie masy m w przestrzeni w funkcji czasu korzystając z odpowiedniego równania Lagrange'a II-go rodzaju i wykorzystać tę informację do wyznaczenia sił reakcji. Następnie



Rysunek 5: Dwie masy na prętach połączone poprzeczką.

otrzymać te same rezultaty posługując się wzorami Freneta (Zadanie 1.7), wyznaczając “przy okazji” promień ρ krzywizny i skręcenie τ linii śrubowej. Zakładamy, że siły oporu (tarcia) nie występują.

Zadanie 6.9^R

Tor skateboardowy ma kształt paraboli o równaniu $z = x^2/a$ ($a > 0$). Zawodnik zjeżdża po nim w dół (w polu siły ciężkości ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$), rozpoczynając zjazd z zerową prędkością w punkcie $(-a, a)$. Traktując skateboardzystę jak punkt materialny sprowadzić do kwadratury problem wyznaczenia zależności jego położenia od czasu oraz obliczyć jaką siłą reakcji będzie nań działać w najniższym punkcie toru.

Zadanie 6.10^R

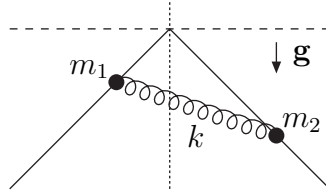
W polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$ na nitce zaczepionej do sufitu wisi masa m_1 . Do masy m_1 przyczepiona jest nieważka sprężynka o długości swobodnej l_0 i współczynniku sprężystości k . Na drugim końcu sprężynki wisi masa m_2 . W chwili $t = 0$ nitkę, na której wisiała masa m_1 przecięto. Znaleźć późniejszy ruch tego układu.

Zadanie 6.11^R

Posługując się zasadą Lagrange’a prac wirtualnych znaleźć położenie równowagi w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$ łańcucha składającego się z n segmentów w kształcie odcinków połączonych jedno z drugim przegubowo. Każdy z segmentów ma masę m i długość $2a$. Jeden koniec łańcucha jest zaczepiony na stałe, a na drugi działa skierowana poziomo siła F . Jak zmieni się rozwiązanie, gdy wektor siły działającej na koniec łańcucha będzie tworzył z kierunkiem horyzontalnym kąt β ? W otrzymanych rozwiązaniach przejść do granicy, w której liczba segmentów łańcucha staje się nieskończona przy ustalonej jego długości L .

Zadanie 6.12^R

Dwie masy, m_1 i m_2 , mogą przemieszczać się po paraboli o równaniu $z = \frac{1}{2}ax^2$ w polu siły ciężkości $\mathbf{g} = \mathbf{e}_z g$ (oś z jest skierowana w dół). Masy połączone są nierozciągliwą nicią o długości l , która układa się na paraboli (inaczej mówiąc, odległość między masami liczona po paraboli wynosi zawsze l). Korzystając z zasady prac wirtualnych Lagrange’a znaleźć położenie równowagi układu tych dwóch mas.



Rysunek 6: Dwie masy ślizgające się po prętach w polu $\mathbf{g}$ połączone sprężynką.

Zadanie 6.13^R

Masa m_1 może ślizgać się (bez tarcia) po prostej równoległej do kierunku pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$, a masa m_2 po przecinającej się z tamtą drugą prostą nachyloną do pionu pod kątem 45° . Obie masy są połączone nieważkim sztywnym prętem długości l (rys. 5). Napisać równania Lagrange'a wyznaczające ruch tych mas i znaleźć wynikające z nich położenia równowagi. Znaleźć także te same położenia równowagi stosując zasadę prac wirtualnych Lagrange'a. Zbadać skrajne przypadki $m_2 \gg m_1$ i $m_2 \ll m_1$.

Zadanie 6.14

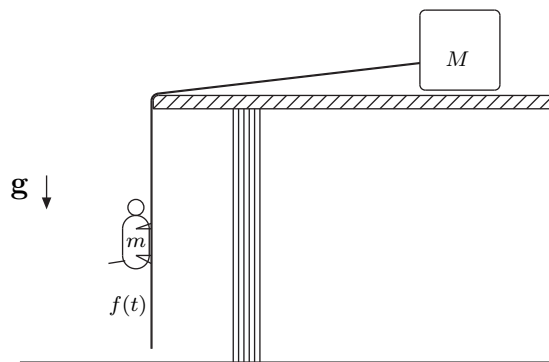
Podać równania Lagrange'a pierwszego rodzaju wyznaczające ruch układu dwu mas, m_1 i m_2 , ślizgających się bez tarcia w polu $\mathbf{g}$ po dwu prostokątnych do siebie prętach (każdy z nich jest skierowany w dół pod kątem 45° w stosunku do pionu) i połączonych nieważką sprężynką o współczynniku sprężystości k i pomijalnie małej długości swobodnej (zob. rysunek 6). Wyznaczyć położenia równowagi tego układu i siły reakcji. Rozwiązać równania ruchu. Rozwiązać także to samo zadanie, gdy pręty, po których ślizgają się masy wirują z prędkością kątową ω wokół pionowej osi zaznaczonej na rysunku 6 linią kropkowaną.

Zadanie 6.15^R

Punkt materialny o masie m zsuwa się bez tarcia po zewnętrznej powierzchni sfery o promieniu R znajdującej się w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$. Sprowadzić problem rozwiązania równań wyznaczających ruch masy po sferze do kwadratur (tj. do wykonania całki). Znaleźć zależność siły reakcji więzów od położenia masy na sferze (dla dowolnych warunków początkowych) i punkt w którym oderwie się ona od sfery (jeśli więzy są jednostronne). Wyznaczyć jawnie ten punkt, gdy masa m zsuwa się bez prędkości początkowej z samego wierzchołka sfery.

Zadanie 6.16^R

Punkt materialny o masie m porusza się po stożku o kącie rozwarcia 2α i osi równoległej do pola $\mathbf{g}$. Wypisać uwzględniające siły reakcji równania ruchu wyznaczające ruch masy m i sprowadzić ich rozwiązanie do kwadratur. Przedyskutować jakościowo charakter ruchu w zależności od kąta α . Jakie warunki muszą być spełnione, by masa m oderwała się od stożka? Jeśli w jakimś przypadku możliwy jest ruch o charakterze okresowych zmian odległości masy od wierzchołka stożka, wyznaczyć częstość takich oscylacji, gdy ich amplituda jest niewielka.



Rysunek 7: Małpka Fiki-Miki wspinająca się po linie.

Zadanie 6.17^R

Punkt materialny o masie m może poruszać się po powierzchni nieskończonego walca o promieniu R , który jest nachylony pod kątem α do pionu wyznaczanego przez pole $\mathbf{g}$. Napisać równania Lagrange'a I-go rodzaju i znaleźć siłę reakcji więzów działającą na ten punkt.

Zadanie 6.18^R

Punktowa masa m porusza się po paraboloidzie obrotowej zadanej (w zmiennych cylindrycznych) równaniem $z = r^2/2a$ ($a > 0$) w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$. Zbadać możliwy jej ruch korzystając z równań Lagrange'a I-go rodzaju, tj. przedyskutować jakościowo charakter ruchu w zależności od jego globalnych charakterystyk (tj. wielkości zachowanych, których wartości są wyznaczone przez konkretne warunki początkowe). Jaki jest zakres zmienności współrzędnej z (albo r) punktu? Czy możliwy jest ruch o charakterze ściśle oscylacyjnym? Czy możliwy jest ruch po okręgu (na ustalonej wysokości z)? Jeśli tak, to jaki jest okres obiegu paraboloidy dookoła? Wyznaczyć siłę reakcji w funkcji globalnych charakterystyk ruchu oraz położenia punktu na stożku. Czy gdy paraboloida jest skierowana w dół, tj. gdy $a < 0$, punkt zaczynający spadek z jej wierzchołka bez prędkości początkowej oderwie się od niej?

Zadanie 6.19

Punkt materialny o masie m porusza się po przecięciu gładkiej sfery o promieniu a z gładką poziomą płaszczyzną poruszającą się w górę i w dół zgodnie z zależnością $z = a \sin \omega t$ w jednorodnym polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$. Napisać równania Lagrange'a I-go rodzaju tego układu i rozwiązać je. Znaleźć siłę reakcji więzów.

Zadanie 6.20^R

Masa m zsuwa się w polu $\mathbf{g}$ po płaszczyźnie równi nachylonej do poziomu pod kątem α . Prędkość masy m może być skierowana dowolnie w stosunku kierunku najszybszego spadku. Współczynnik tarcia dynamicznego (statycznego) masy m o równię wynosi μ (μ_0). Napisać równania wyznaczające ruch masy m , gdy początkowa prędkość ma nieznikającą poprzeczną (w stosunku do równi) składową i sprowadzić je do kwadratur. Sprawdzić granicę $\mu = 0$ rozwiązania.

Zadanie 6.21^R

Na stole (oczywiście w ziemskim polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$) stoi klocek o masie M , do którego przyczepiona jest lina. Jeden koniec liny zwisa w dół przez krawędź stołu. Po zwisającym kawałku liny wspina się małpka Fiki-Miki o masie m . Porusza się ona tak, iż jej odległość od ustalonego punktu na linie (np. jej swobodnego końca) jest zadana funkcją $f(t)$ (zob. rys. 7). Między klockiem a stołem występuje siła tarcia o współczynnikach μ_{stat} (tarcie statyczne) i μ_{dyn} (tarcie dynamiczne). jaki warunek musi być spełniony, by podczas wspinania się małpki klocek pozostawał w spoczynku? Obliczyć przyspieszenie, z jakim klocek będzie się przybliżał do krawędzi stołu oraz przyspieszenie małpki względem ziemi w sytuacji, gdy znaleziony warunek bezruchu klocka nie jest spełniony.

Otrzymać to samo przyspieszenie posługując się formalizmem równań Lagrange’a drugiego rodzaju w sytuacji, gdy tarcie nie występuje.

Zadanie 6.22^R

Rozpatrzmy oscylator utworzony z masy m zawieszanej na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości l w polu $\mathbf{g}$. Pokazać bezpośrednim rachunkiem, rozpatrując małe wychylenia z położenia równowagi, że jeśli nic będzie nieskończenie powoli ściągana w punkcie jej zaczepienia przez zewnętrzną siłę, to wielkość E/ω , tj. stosunek całkowitej energii ruchu do częstości nie ulega zmianie (jest tzw. niezmiennikiem adiabatycznym).

7 ZAGADNIENIA WARIACYJNE

Zadanie 7.1^R

Znaleźć leżący całkowicie w płaszczyźnie xy tor promienia światła wpadającego (od strony ujemnych x -ów) w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ pod kątem α_0 w stosunku do osi x do ośrodka, w którym współczynnik załamania zależy od głębokości x jak $n(x) = \sqrt{1 + ax}$. Oprzeć się raz na prawie Snella, a drugi raz na zasadzie Fermata mówiącej, że promień światła między dwoma punktami biegnie po takiej drodze, że czas przelotu jest minimalny.⁷

Przypomnienie: W ośrodku o współczynniku załamania n prędkość światła (lokalna) jest równa c/n .

Zadanie 7.2^R

Znaleźć płaski tor promienia świetlnego w ośrodku o współczynniku załamania $n(x, y) = p/x$ biegnącego pomiędzy dwoma punktami A i B położonymi w półprzestrzeni $x > 0$. Podać pełne równanie toru, gdy $A = (1, 0)$, $B = (2, 1)$. Przedyskutować także jakościowo istnienie rozwiązania dla dowolnych dwóch punktów $A \neq B$ leżących w półpłaszczyźnie $x > 0$. Co się dzieje, gdy oba punkty leżą na tej samej wysokości nad osią x (tzn. mają takie same współrzędne y -owe)?

Zadanie 7.3^R

Wysokość zasy py śnieżnej zalegającej na półpłaszczyźnie $x > 0$ jest proporcjonalna do $\sqrt{x}$. Wzdłuż jakiej krzywej $y(x)$ powinien iść przekop o ustalonej (pomijalnie małej szerokości) łączący dwa ustalone punkty A i B (leżące w tej półpłaszczyźnie), by ilość śniegu, jaką trzeba odgarnąć była jak najmniejsza?

Zadanie 7.4

Wysokość zasy py śnieżnej jest proporcjonalna do $\sqrt{y}$. Wzdłuż jakiej krzywej należy prowadzić przekop łączący punkty (x_A, y_A) i (x_B, y_B) (położone w pierwszej ćwiartce układu) by ilość śniegu jaką należy odgarnąć był a minimalna? (Zakładamy, że szerokość przekopu jest nieskończenie mała.)

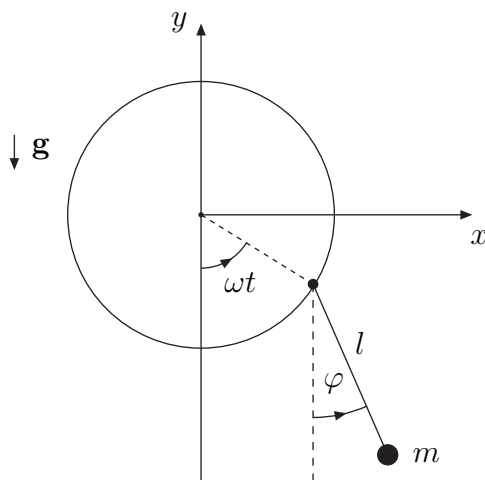
Zadanie 7.5^R

Jaki jest kształt mającej minimalne pole powierzchni obrotowej rozpiętej na dwóch równoległych do siebie nawzajem kołach o promieniach R_1 i R_2 , których środki leżą na tej samej prostej i są oddalone od siebie o $2L$?

Zadanie 7.6

Dwa pierścienie o promieniach R_1 i R_2 , odległe od siebie o L i ustawione tak, że płaszczyzny ograniczanych przez nie okręgów są do siebie równoległe, połączone są błoną mydlaną. Znaleźć kształt powierzchni błony wiedząc, że odpowiada ona minimum energii potencjalnej, która jest proporcjonalna do pola powierzchni błony.

⁷Naprawdę światło biegnie to takim torze, że czas przelotu jest ekstremalny.



Rysunek 8: Wahadło zaczeplone do obracającej się obręczy.

Zadanie 7.7^R (Problem brahistochrony)

Po jakiej krzywej leżącej w płaszczyźnie xz powinna w polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ zsuwać się (mającą zerową prędkość początkową) masa m zaczynająca ruch w punkcie $A = (0, h)$, by w jak najkrótszym czasie dotrzeć do

- punktu $B = (b, 0)$,
- pionowej prostej o równaniu $x = b > 0$?

Zadanie 7.8^R

Korzystając z rachunku wariacyjnego znaleźć najkrótszą drogę łączącą na płaszczyźnie xy dwa ustalone punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. Rozwiązać problem w zmiennych kartezjańskich i biegunowych. Rozwiązać ten sam problem (w zmiennych kartezjańskich) w przestrzeni o d wymiarach.

Zadanie 7.9^R

Dwa punkty A i B leżą w półprzestrzeni $y > 0$. Wykorzystując zasadę Fermata wyznaczyć tor po jakim biegnie pomiędzy punktami A i B promień świetlny, jeśli współczynnik załamania $n = c/py$ (tj. $v = py$, $p > 0$). Wyznaczyć i narysować tor w przypadku, gdy oba punkty, A i B , mają taką samą współrzędną y -ową: $y_A = y_B = d$, a odległość pomiędzy ich rzutami na płaszczyznę $y = 0$ wynosi $2d$. W tym przypadku obliczyć także czas przelotu promienia od A do B .

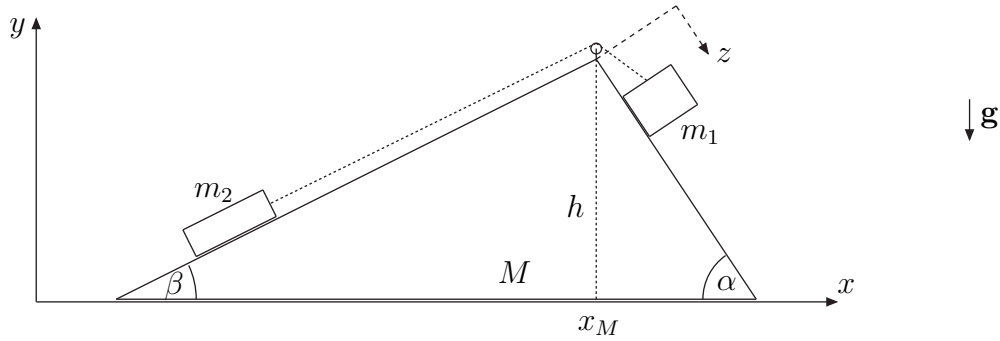
Uwaga: Należy podać matematyczny argument, że tor promienia leży całkowicie w płaszczyźnie przechodzącej przez oba te punkty.

Zadanie 7.10^R (Zasada Fermata “more geometrico”)

Z zasady Fermata otrzymać równanie charakteryzujące w sposób geometryczny trajektorię promienia świetlnego w ośrodku o zmiennym współczynniku załamania $n = n(x, y, z)$.

Zadanie 7.11^R

Wyznaczyć kształt łańcucha (o bardzo krótkich ogniwach albo nierozciągliwej jednorodnej



Rysunek 9: Dwa klocki na dwu-klinie.

liny) o długości L i stałej gęstości ρ masy na jednostkę długości umocowanego swoimi końcami w dwóch różnych punktach A i B nad ziemią i swobodnie zwisającego (bez dotykania ziemi) w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$.

Zadanie 7.12^R

Jak powinna zmieniać się z czasem prędkość pojazdu, który, rozpędzając się od zerowej prędkości, ma w zadanym czasie T przebyć po linii prostej dystans $2L$ (i zatrzymać się po jego przebyciu), żeby zminimalizować dyskomfort jego pasażerów powodowany z jego przyspieszaniem i hamowaniem? Za miarę dyskomfortu przyjąć całkę wzdłuż przebywanej drogi z kwadratu przyspieszenia.

Wskazówka: Sparametryzować drogę przebytą odległością i uwzględnić zadany czas T przejazdu jako dodatkowy warunek.

Zadanie 7.13^R

Rozwiązać problem 7.12 w sposób przybliżony minimalizując funkcjonal dyskomfortu bezpośrednio, postulując wielomianową postać zależności przebywanej drogi od czasu. Dla prostoty ograniczyć się do wielomianów stopnia nie wyższego niż czwarty.

Zadanie 7.14^R

Wytyczyć w górnej półpłaszczyźnie krzywą o długości $2l$, łączącą punkty $(-a, 0)$ i $(a, 0)$ i obejmującą jak największe pole (ograniczone tą krzywą i osią x). Przedyskutować, kiedy problem ten ma rozwiązanie i jak ono wygląda w przypadkach granicznych.

Zadanie 7.15^R

Korzystając z rachunku wariacyjnego znaleźć najkrótszą drogę leżącą na powierzchni bocznej walca o promieniu R łączącą punkty $A = (R, 0, 0)$ i $B = (0, R, h)$. Rozwiązać problem raz wykorzystując technikę mnożników Lagrange'a oraz drugi raz, przechodząc do zmiennych zgodnych z więzami. Uwzględnić także rolę topologii walca.

Zadanie 7.16^R

Korzystając z rachunku wariacyjnego wykazać, że geodetyką (tj. krzywą o najmniejszej długości) na sferze (o promieniu R) łączącą dwa zadane punkty sfery jest wycinek koła wielkiego (tj. krzywej powstałej z przecięcia tej sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej

środek) przechodzącego przez te dwa punkty.

Wskazówka: Używając współrzędnych sferycznych szukać rozwiązania jako funkcji $\phi = \phi(\theta)$. W otrzymanym na końcu równaniu przejść do współrzędnych kartezjańskich i zauważyć, że jest to równanie postaci $zx + by + cz = 0$ wyznaczające płaszczyznę przechodzącą przez środek sfery.

Zadanie 7.17^R

Napisać równania wyznaczające bieg promienia świetlnego padającego pod kątem α na powierzchnię kuli o promieniu R , we wnętrzu której współczynnik załamania n zmienia się zgodnie ze wzorem $n = (R/r)^a$. Otrzymać tor promienia jawnie w przypadkach, gdy $a = 1$ i $a = 2$. Jeśli promień dociera do środka kuli, obliczyć po jakim czasie się to stanie.

Zadanie 7.18^R

Po jakiej zamkniętej krzywej płaskiej zawartej w płaszczyźnie $\mathcal{O}xy$ powinien poruszać się przez czas T punkt, którego prędkość jest zadana funkcją czasu $v = v(t)$, aby zakreślona przezeń krzywa ograniczała obszar o największym możliwym polu?

Wskazówka: Wykorzystać wzór wyrażający pole powierzchni obszaru ograniczonego daną krzywą przez całkę z jakiejś jedno-formy po tej krzywej.

Zadanie 7.19^R

Podać równanie Eulera-Lagrange'a odpowiadające problemowi wariacyjnemu

$$\delta J[f] = \delta \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \mathcal{J}(\xi, f, f', f'') = 0,$$

o ustalonych końcach, tj. $\delta f(\xi_1) = \delta f(\xi_2) = 0$ oraz $\delta f'(\xi_1) = \delta f'(\xi_2) = 0$. Zastosować następnie uzyskany wynik do całki działania

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, \ddot{q}),$$

z funkcją Lagrange'a postaci

$$L(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -\frac{1}{2} m q \ddot{q} - V(q).$$

Czy w tym przypadku dodatkowe warunki $\delta \dot{q}(t_1) = \delta \dot{q}(t_2) = 0$ są konieczne?

8 RÓWNANIA LAGRANGE’A II-go RODZAJU

Zadanie 8.1^R

Płaskie wahadło o długości l i masie m (tj. masa m zawieszona na sztywnym, w przybliżeniu nieważkim, pręcie) jest zaczepione w punkcie umiejscowionym na okręgu o promieniu R , który obraca się z prędkością kątową ω wokół osi prostopadłej do kierunku pola siły ciężkości $\mathbf{g}$ (zob. rysunek 8). Przyjmując, że wahadło pozostaje zawsze w płaszczyźnie wyznaczonej przez okrąg (czyli, że jego ruch jest płaski) napisać lagragian tego układu i otrzymać zeń równanie wyznaczające ruch masy m .

Zadanie 8.2^R

Pokazać, że równanie ruchu cząstki o masie m w układzie nieinercyjnym (primy nad wielkościami zdefiniowanymi względem układu nieinercyjnego zostały tu pominięte)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right),$$

jeśli tylko rzeczywista siła $\mathbf{F}$ jest potencjalna (lub wynika z jakiegoś potencjału uogólnionego) wynikają z lagrangianu z odpowiednio dobranym (uogólnionym) potencjałem zależnym od prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.

Zadanie 8.3^R

Pokazać bezpośrednim rachunkiem,⁸ że równania Eulera-Lagrange’a zachowują swoją postać przy dowolnych zamianach $q_a(t) = q_a(s_1, \dots, s_N, t)$, $a = 1, \dots, N$ zmiennych uogólnionych ($s_1(t), \dots, s_N(t)$ są nowymi zmiennymi).

Zadanie 8.4^R

Rozpatrzmy punkt materialny o masie m poddany działaniu siły $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, która jest niezależna od położenia. Translacje przestrzenne są oczywistymi symetriami tego problemu (jeśli $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ jest jakimś rozwiązaniem równania Newtona, to jest nim także $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{a}$). Mimo to, pęd $\mathbf{p}$ cząstki nie jest stałą ruchu. Wyjaśnić to (pozorne) pogwałcenie związku symetrii z prawami zachowania.

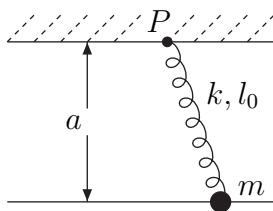
Zadanie 8.5

Czy w sytuacji takiej jaka jest przedmiotem Zadania 8.4 galileuszowskie pchnięcie jest symetrią układu? jeśli jest, to znaleźć odpowiadającą jej wielkość zachowaną korzystając z twierdzenia Noether i pokazać wykorzystując równania ruchu, że jest ona rzeczywiście stałą ruchu.

Zadanie 8.6^R

Pręt nachylony pod kątem α do pionu (wyznaczanego przez pole grawitacyjne $\mathbf{g}$) wiruje z prędkością kątową ω wokół przechodzącej przez pionowej osi (zakreślając w ten sposób powierzchnię stanowiącą dwie części stożka o kącie rozwarcia α). Po pręcie, pozostając

⁸Że jest to prawda, wynika już z samego wyprowadzenia równań Lagrange’a drugiego rodzaju z zasady d’Alemberta, w którym po prostu wyraża się kartezjańskie składowe wektorów położenia $\mathbf{r}_i(t)$ mas układu przez *dowolnie* zdefiniowane (byle zgodne z więzami holonomicznymi) współrzędne uogólnione q_i .



Rysunek 10: Masa m ślizgająca się po gładkim płacie połączona sprężynką z nieruchomym punktem P .

stale na nim, ślizga się bez tarcia koralik o masie m . Zakładamy też (nie interesując się tym, jak to by miało być technicznie możliwe), że koralik może przechodzić przez oś obrotu. Wypisać funkcję Lagrange'a koralika oraz wynikające z niej jego równanie ruchu. Znaleźć i przedyskutować charakter ruchu koralika w zależności od wartości kąta α i warunków początkowych (koralik w $t = 0$ nad punktem przecięcia się pręta z osią lub pod nim, etc. Czy w przypadku, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ możliwe są takie warunki początkowe, by koralik asymptotycznie zbliżał się do osi obrotu?

Zadanie 8.7^R

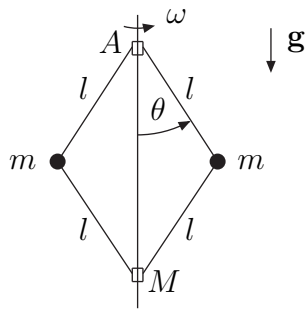
Koralik o masie m może ślizgać się bez tarcia po pręcie odchylonym od pionu (wyznaczonego przez pole ciężkości $\mathbf{g}$) o kąt α i wirującym ze stałą prędkością kątową ω wokół przechodzącej przez pionową oś, tak jak w Zadaniu 8.6. Dodatkowo koralik jest zaczepiony do (naciągniętej na pręt) sprężyny o współczynniku sprężystości k i pomijalnie małej długości swobodnej, która jest umocowana w do pręta w punkcie oddalonym o l od tego punktu pręta, przez który przechodzi oś obrotu (zob. rysunek ??). Zbadać ruch układu w zależności od wartości parametrów ω , k , l warunków początkowych. Jak zmieniłby się lagrangian układu, gdyby sprężyna była umocowana w punkcie przecięcia pręta z osią obrotu a miała za to długość swobodną równą l ?

Zadanie 8.8^R

Klin o masie M , kącie nachylenia α i wysokości górnej krawędzi h może przesuwac się bez tarcia po płaskiej powierzchni. Po klinie, wskutek działania skierowanego pionowo w dół pola siły ciężkości $\mathbf{g}$, może zsuwać się bez tarcia klocek o masie m . Znaleźć ruch tego układu wykorzystując równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Porównać wynik z otrzymanym w Zadaniu 6.3 w granicy $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Zadanie 8.9^R

Klin o masie M i przekroju poprzecznym w kształcie trójkąta wysokości h mającego kąty nachylenia ramion do poziomu równe α i β może przemieszczać się bez tarcia po płaskiej poziomej (w stosunku do pola $\mathbf{g}$) powierzchni. Po jego bocznych płaszczyznach, połączone nierozciągliwą i nieważką linką długości l , mogą przesuwac się dwa klocki o masach m_1 (ta od strony kąta α) i m_2 (zob. rysunek 9). Napisać lagrangian i równania wyznaczające płaskorównoległy ruch tego układu. Zakładając, że w chwili początkowej masa m_1 znajduje się w najwyższym położeniu (na wysokości h nad podstawą klina)



Rysunek 11: “Waciak” (czyli regulator Watta).

obliczyć czas jej zjazdu do najniższego położenia, przyjmując, że $m_1 > m_2$ i $\alpha > \beta$ (i że długość linki to umożliwia). Obliczyć także odległość o jaką przesunie się przy tym klin.

Zadanie 8.10^R

Dwie masy m_1 i m_2 połączone sztywnym prętem o długości l i pomijalnie małej masie ślizgają się w pionowym polu $\mathbf{g}$ po dwóch przecinających się (więc wyznaczających pewną płaszczyznę) prostych nachylonych do poziomu pod kątem $\pi/4$. Napisać lagrangian i odpowiadające mu równania Eulera-Lagrange’a. Znaleźć położenie równowagi układu i częstość małych drgań wokół tego położenia.

Zadanie 8.11^R

Masa m może bez poślizgu przemieszczać się po poziomej osi i jest połączona (nieważką) sprężynką o długości swobodnej l_0 i współczynniku sprężystości k z nieruchomym punktem P . Napisać lagrangian tego układu pokazanego na rysunku 10 i znaleźć częstości jego małych drgań wokół położenia równowagi trwałej. Rozpatrzyć przypadki $a > l_0$ i $a < l_0$.

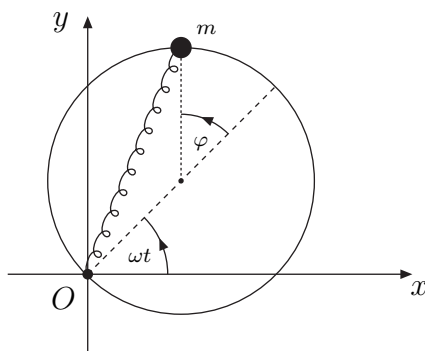
Zadanie 8.12^R

Koralik o masie m porusza się po okręgu o promieniu R (wieży dwustronne), którego jedna ze średnic jest równoległa do ziemskiego pola ciężenia $\mathbf{g}$. Okrąg ten obraca się wokół tejże średnicy z prędkością kątową ω . Napisać lagrangian tego układu i wynikające z niego równanie Lagrange’a IIgo rodzaju wyznaczające ruchu koralika. Sprowadzić jego rozwiązanie do kwadratur wykorzystując całkę pierwszą (czy jest nią całkowita energia mechaniczna koralika?). Znaleźć jego położenia równowagi i przedyskutować ich charakter (równowaga trwała lub nietrwała) w zależności od wartości prędkości kątowej ω . Wyznaczyć częstości małych drgań koralika wokół położenia równowagi trwałej.

Zadanie 8.13^R

Napisać równania wyznaczające ruch układu składającego się z dwóch mas, z których jedna, m_1 , ślizga się bez tarcia po poziomym pręcie, a druga, m_2 jest z tamtą połączona nieważkim prętem o długości l i może wahać się w płaszczyźnie wyznaczonej przez pole siły ciężkości $\mathbf{g}$ i pręt (rysunek ??). Znaleźć ruch układu w przybliżeniu małych odchylen z położenia równowagi.

Zadanie 8.14^R



Rysunek 12: Koralik na okręgu o promieniu R wirującym wokół osi przechodzącej przez punkt na obwodzie. Pokazana jest sugerowana definicja zmiennej dynamicznej φ .

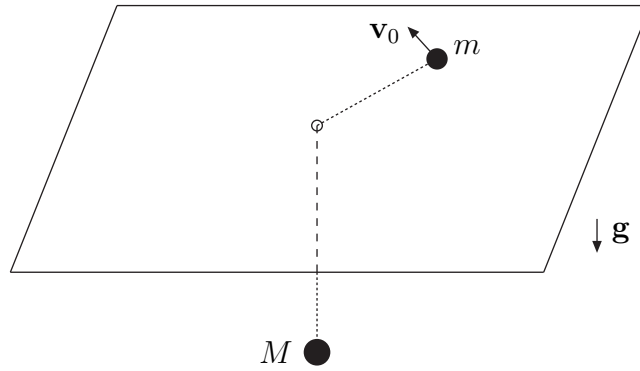
Masa m jest zawieszona w polu $\mathbf{g}$ na nieważkim sztywnym pręcie o długości l . Górny koniec tego pręta, czyli punkt w którym zawieszone jest utworzone z pręta i masy m wahadło, porusza się horyzontalnie, wzdłuż osi x ruchem harmonicznym o amplitudzie a i częstości ω . Napisać równanie wyznaczające ruch wahadła (masy m) i rozwiązać je w sposób przybliżony, zakładając (jako warunki początkowe), że w chwili, gdy jego ruchome zawieszenie ma maksymalną prędkość zwisało ono swobodnie. Rozpatrzyć przypadek, gdy $\omega^2 \rightarrow g/l$. Czy otrzymane rozwiązanie pozostaje wtedy słuszne dla dowolnie długiego czasu? Podać też przybliżone rozwiązanie stosowalne przez jakiś czas po $t = 0$ w sytuacji, gdy $\omega_0 \gg |\omega - \omega_0| \neq 0$.

Zadanie 8.15^R (“Waciak”)

Znaleźć ruch “waciaka”, czyli regulatora Watta. Jest to urządzenie pokazane na rysunku 11: wokół pionowej osi (w polu $\mathbf{g}$) na wychodzących ze znajdującego się na stałej wysokości pierścienia A , symetrycznie położonych ruchomych ramionach o długości l wirują z ustaloną prędkością kątową ω dwie masy m połączone kolejną parą ramion o długości l z mogącym przesuwac się po osi w górę i w dół obciążającym pierścieniem o masie M . Napisać lagrangian waciaka i wynikające zeń ściśle równanie ruchu. Znaleźć stabilne położenie równowagi i ruch układu w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi trwałej.

Zadanie 8.16^R

Masa m może ślizgać się bez tarcia po okręgu o promieniu R wirującym ze stałą prędkością kątową ω wokół punktu O położonego na jego obwodzie. Z punktem tym masa m jest połączona nieważką sprężyną o długości swobodnej l i współczynnika sprężystości k . (Okrąg wiruje w płaszczyźnie prostopadłej do pola grawitacyjnego - zob. rysunek 12). Napisać lagrangian tego układu i wynikające zeń równanie ruchu masy m . Znaleźć położenia równowagi i częstości małych drgań masy m wokół położenia równowagi trwałej. Jakie warunki muszą spełniać parametry R , l i ω , by $\varphi = 0$ było położeniem równowagi trwałej? Znaleźć także całkę pierwszą (stałą ruchu) równania Eulera-Lagrange’a - czy jest to energia? - i sprowadzić jego rozwiązanie do kwadratur. Rozwijając odpowiedni



Rysunek 13: Dwie masy połączone linką.

potencjał efektywny masy m wokół jego minimum uzyskać te same wnioski, które wynikają z linearyzacji równania Eulera-Lagrange'a.

Zadanie 8.17^R

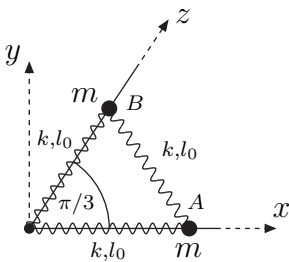
Punkt materialny o masie m mogący poruszać się bez tarcia po gładkiej poziomej (w stosunku do pola $\mathbf{g}$) płaszczyźnie jest połączony linką (nieważką i nierozciągliwą) o długości l przechodzącą przez otwór w płaszczyźnie z drugą masą M , która może poruszać się tylko wzdłuż pionowej prostej. W chwili $t = 0$ masa m znajduje się w odległości R od otworu i ma prędkość $\mathbf{v}_0$ skierowaną prostopadłe do linki, a prędkość masy M jest równa zero (zob. rysunek 13). Napisać lagrangian tego układu i sprowadzić wynikające zeń równania wyznaczające zależność położenia elementów układu od czasu do kwadratur. Na tej podstawie opisać ruch jakościowo, czyli m.in. powiedzieć, czy może on być okresowy. Wyznaczyć także minimalną odległość $R_{\min}$, na jaką masa m może się zbliżyć do otworu. Jaką zmianę wprowadziłoby odrzucenie warunku, że prędkość początkowa $\mathbf{v}_0$ jest prostopadła do nici?

Zadanie 8.18^R

Posługując się równaniami Lagrange'a II-go rodzaju zbadać ruch masy m zmuszonej do pozostawiania na stożku (wieży dwustronne) o kącie rozwarcia 2α , którego oś jest równoległa do pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$. Przedyskutować ruch jakościowo w zależności od kąta α . Jeśli w jakimś zakresie kąta α możliwy jest ruch quasi-okresowy (tj. taki, przy którym zmiany odległości masy od czubka stożka są okresowe), znaleźć jego częstość, w przybliżeniu małych amplitud oscylacji.

Zadanie 8.19^R

Posługując się równaniami Lagrange'a II-go rodzaju napisać równania wyznaczające ruch masy m pozostającej stale na powierzchni obrotowej zadanej wzorem $z = (x^2 + y^2)^2 / 4a^3$ ($a > 0$ jest stałą o wymiarze długości), której oś symetrii jest równoległa do ziemskiego pola ciężenia $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$. Sprowadzić rozwiązanie zagadnienia do "kwadratury", tj. do jednej całki i przedyskutować jakościowo charakter możliwego ruchu wykorzystując pojęcie potencjału efektywnego. W przybliżeniu małych odchyień zmiennej radialnej od



Rysunek 14: Dwie masy na prętach połączone sprężynkami.

położenia minimum tego potencjału wyznaczyć okres oscylacji masy m wokół niego oraz zależność od czasu w tej sytuacji prędkości kątowej, z jaką masa m okrąża oś z .

Zadanie 8.20^R

Napisać lagrangian cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q poruszającej się w stałym i jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$, wprowadzając zmienne cylindryczne w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego. Wykorzystując całki pierwsze sprowadzić rozwiązanie do kwadratury i znaleźć zależność położenia cząstki od czasu przyjmując, że $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}(0) = v_0^x \mathbf{e}_x + v_0^y \mathbf{e}_y$.

Wskazówka: Wybrać odpowiednio potencjał wektorowy $\mathbf{A}$ pola magnetycznego.

Zadanie 8.21^R

Stałe pole magnetyczne o symetrii cylindrycznej, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B(r)$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, jest zlokalizowane w obszarze, którego rzut na płaszczyznę xy jest kołem o promieniu R . Pole to jest takie, że

$$\int_{z=0} ds \cdot \mathbf{B} = 0.$$

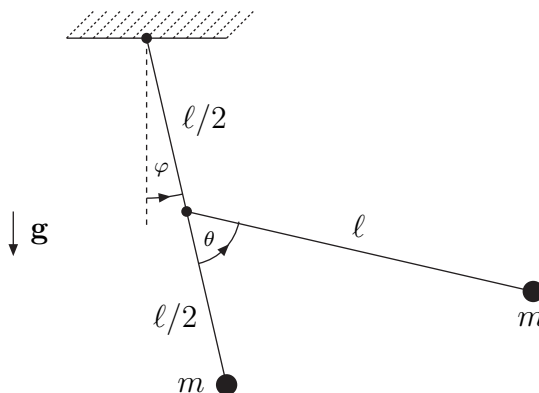
Pokazać, że jeśli cząstka o ładunku elektrycznym q startująca z punktu $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ i pozostająca stale w płaszczyźnie xy opuszcza obszar pola (tzn. obszar $r < R$), to w chwili przekraczania granicy (tj., gdy $r = R$) pola jej prędkość jest skierowana radialnie. Podać warunek, jaki musi spełniać prędkość $\mathbf{v}_0$ cząstki w $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, by mogła ona opuścić obszar pola.

Wskazówka: wykorzystać wielkości, które pozostają stałe podczas ruchu cząstki.

Zadanie 8.22^R

Czy możliwy jest jednowymiarowy (tj. wzdłuż jakiejś krzywej) ruch oscylacyjny punkтового ładunku q o masie m w polu elektrycznym wytwarzanym przez nieruchomy punktowy dipol elektryczny $\mathbf{p}$ (wektor $\mathbf{p}$ ma wartość bezwzględną równą iloczynowi dodatniego ładunku Q i odległości d dzielącej ten ładunek i ładunek ujemny $-Q$ i jest skierowany od ładunku ujemnego do dodatniego; dipol punktowy powstaje w granicy $d \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$ z $Qd = |\mathbf{p}| \equiv p = \text{const.} > 0$)?

Wskazówka: Spróbować znaleźć takie rozwiązanie równań ruchu zapisanych we współrzędnych sferycznych (z osią z wybraną wzdłuż wektora $\mathbf{p}$), które ma znikająca składową momentu pędu w kierunku $\mathbf{p}$.



Rysunek 15: Połączone dwa ruchome pręty. Pokazane są możliwe zmienne uogólnione.

Zadanie 8.23^R

Cząstka o masie m i ładunku elektrycznym q porusza się w polu magnetycznym

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

wytwarzanym przez monopol (g jest ładunkiem magnetycznym monopola). Napisać lagrangian wyznaczający ruch cząstki wykorzystując współrzędne sferyczne. Znaleźć równanie toru cząstki i zależność jej położenia od czasu.

Zadanie 8.24^R

Napisać lagrangian sferycznego wahadła, tj. masy m na sztywnym nierozciągliwym drucie o długości l zawieszonego na wysokości $h = l$ nad Ziemią na szerokości geograficznej ϕ uwzględniając dobowy obrót Ziemi. Wypisać ściśle równania ruchu (Eulera-Lagrange'a) i znaleźć ich rozwiązanie w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi.

9 MAŁE DRGANIA UKŁADÓW ZŁOŻONYCH

Zadanie 9.1^R

W przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi znaleźć ruch pokazanego na rysunku 14 układu dwóch mas m mogących ślizgać się bez tarcia po dwu prętach łączących się pod kątem $\pi/3$ (pręty leżą w płaszczyźnie prostopadłej do pola $\mathbf{g}$, czyli pole to jest tu nieistotne) i połączonych jedna z drugą oraz każda z osobna z punktem złączenia się prętów jednakowymi sprężynkami o długościach swobodnych l_0 i współczynnikach sprężystości k . Znaleźć współrzędne normalne. Podać przykład warunków początkowych, przy których wzbudzony zostanie tylko mod drgań o wyższej częstotliwości.

Zadanie 9.2^R

Masa m_1 może poruszać się jedynie po paraboli o równaniu $z = x^2/2a$. Z masą tą nieważkim sztywnym prętem o długości l jest połączona masa m_2 , która może poruszać się jedynie w płaszczyźnie xz . Cały układ znajduje się w polu siły ciężkości $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$. Napisać lagrangian i wynikające z niego równania ruchu układu. Znaleźć położenie równowagi trwałej i częstotliwości małych drgań wokół niego w przypadku, gdy $l = a$ i $m_1 = 3m_2$. Zidentyfikować w tym przypadku współrzędne normalne. Podać zależność położenia obu mas od czasu jeśli w chwili $t = 0$ masa m_1 spoczywała w położeniu $x = 0$, a pręt łączący ją z masą m_2 był odchylony od pionu o kąt α .

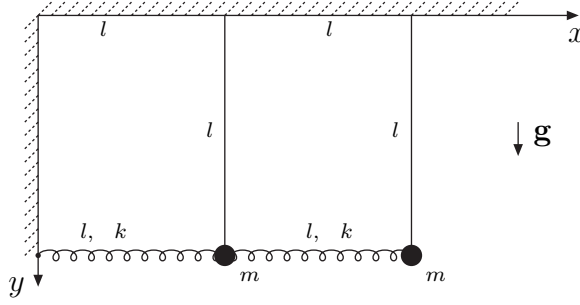
Zadanie 9.3^R

Napisać lagrangian układu złożonego z dwu jednakowych mas m podwieszonych jedna do drugiej na dwu jednakowych nieważkich sprężynkach o długości swobodnej l i współczynniku sprężystości k w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$ (ruch mas może zachodzić tylko wzdłuż pionowej prostej bo np. zarówno masy, jak i sprężyny ślizgają się bez tarcia po pionowym pręcie). Znaleźć położenie równowagi tego układu, częstotliwości drgań własnych wokół tego położenia i odpowiadające im mody normalne drgań. Podać przykładowe warunki początkowe, przy których wzbudzeniu ulega tylko mod drgań o wyższej częstotliwości. Jak wygląda dalszy ruch układu jeśli znienacka, w trakcie wykonywania drgań, górna sprężyna pęknie (np. w momencie, gdy jest maksymalnie - dla danych drgań - rozciągnięta)?

Zadanie 9.4^R

Nieważki pręt o długości l zakończony masą m przymocowany jest (w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$) do sufitu tak, że może obracać się tylko w jednej płaszczyźnie. W połowie jego długości przyczepiony jest doń drugi taki sam pręt, który również może obracać się w tej samej co tamten płaszczyźnie⁹ (zobacz rysunek 15). Napisać lagrangian tego układu i wynikające z niego równania ruchu. Znaleźć położenie równowagi trwałej. Przyjmując, że wychylenia obu prętów z tego położenia są niewielkie, znaleźć częstotliwości drgań oraz odpowiadające im mody normalne i współrzędne normalne. Podać przykład warunków początkowych wzbudzających tylko mod drgań o niższej częstotliwości.

⁹Problem jest akademicki, więc oba pręty swobodnie mijają się w powietrzu podczas wykonywania ruchu.



Rysunek 16: Dwa sprzężone wahadła przy ścianie.

Zadanie 9.5^R

Znaleźć częstości własne i mody normalne małych drgań układu dwu jednakowych mas m podwieszonych na dwu jednakowych nieważkich prętach o długości l do sufitu. Punkty podwieszenia są odległe od siebie o odległość l , która jest równa długości swobodnej sprężyny o współczynniku sprężystości k łączącej obie kulki. Dodatkowo, jedna z kulek jest połączona taką samą sprężyną z pionową ścianą również odległą o l od punktu zawieszenia pierwszej kulki (zobacz rysunek 16).

Zadanie 9.6^R

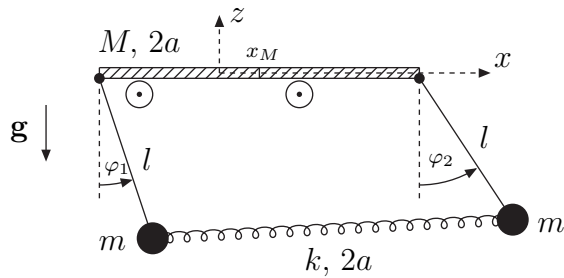
Z dwu końców belki o masie M i długości $2a$ mogącej swobodnie przesuwąć się poziomo (w polu $\mathbf{g}$) po nieważkich rolkach zwisają dwa jednakowe sztywne, nieważkie pręty o długościach l zakończone masami m każdy. Masy te są ze sobą połączone sprężyną o współczynniku sprężystości k i długości swobodnej $2a$ (zobacz rysunek 17). Napisać ścisły lagrangian tego układu a następnie wyeliminować z niego stopnie swobody związane z ruchem układu jako całości. W otrzymanym efektywnym lagrangianie dokonać przybliżenia odpowiadającego małym drganiom dwu wahadeł. Znaleźć w tym przybliżeniu ruch układu.

Zadanie 9.7^R

Napisać równania ruchu, i podać ich najogólniejsze rozwiązanie, układu trzech jednakowych mas ślizgających się bez tarcia po okręgu o promieniu R , połączonych jednakowymi sprężynkami o długościach swobodnych $l = \pi R/2$ i współczynnikami sprężystości k (sprężynki są też nawleczone na okrąg, który jest umieszczony horyzontalnie - pole siły ciężkości nie odgrywa tu żadnej roli). Znaleźć częstości własne i odpowiadające im mody normalne drgań. Podać jawnie zamianę zmiennych wyrażającą wybrane współrzędne uogólnione przez współrzędne normalne. Rozwiązać ten sam problem eliminując stopień swobody odpowiadający jednostajnemu obiegowi okręgu przez wszystkie trzy masy. Pokazać jawnie, że otrzymuje się w ten sposób rozwiązanie równoważne otrzymanemu pierwszą metodą.

Zadanie 9.8^R

Dwa atomy A o masie m_A i jeden atom B o masie m_B tworzą liniową cząsteczkę $A-B-A$. Oddziaływanie sąsiednich atomów modelujemy siłą sprężystą o współczynniku



Rysunek 17: Dwa wahadła podwieszone do ruchomej platformy.

sprężystości k . Przyjmując, że atomy mogą przemieszczać się tylko wzdłuż osi cząsteczki znaleźć najogólniejszą postać rozwiązania równań ich ruchu. Wyznaczyć częstości drgań tego układu i podać współrzędne normalne. Zilustrować graficznie odpowiednie mody drgań. Następnie zastosować do tego układu procedurę eliminacji stopnia swobody odpowiadającego (jednowymiarowemu) ruchowi cząsteczki jako całości, napisać odpowiedni zredukowany lagrangian i rozwiązać wynikające z niego równania ruchu. Czy otrzymuje się w ten sposób to samo rozwiązanie, co pierwszą metodą?

Zadanie 9.9^R

Napisać najogólniejsze rozwiązanie równań ruchu układu składającego się z czterech, parami równych (równe są masy przeciwległe), mas ślizgających się bez tarcia po okręgu o promieniu R i połączonych jednakowymi sprężynkami o długościach swobodnych $l = \pi R/2$ i współczynnikach sprężystości k (sprężynki są też nawleczone na okrąg, którego średnice są prostopadłe do pola siły ciężkości $\mathbf{g}$ - siła ta nie odgrywa tu zatem żadnej roli). Znaleźć częstości własne i odpowiadające im mody normalne drgań (zilustrować rysunkami odpowiadające tym modom przemieszczenia mas). Podać przykład warunków początkowych prowadzących do wzbudzenia tylko drgań o najwyższej częstości.

Zadanie 9.10^R

Znaleźć mody drgań i odpowiadające im częstości układu N jednakowych mas m mogących ślizgać się bez tarcia po prostym pręcie i połączonych jednakowymi sprężynkami o współczynnikach sprężystości κ i długościach swobodnych l . Odległość między ściankami, do których zamocowane są skrajne sprężyny jest równa $(N + 1)l$.

Zadanie 9.11^R

Znaleźć częstości i mody drgań układu N jednakowych mas m ślizgających się po okręgu o promieniu R połączonych jednakowymi sprężynkami o długościach swobodnych $l = 2\pi R/N$ i współczynnikach sprężystości k (sprężynki są naciągnięte na okrąg; pole ciężkości nie odgrywa roli - okrąg leży horyzontalnie). Znaleźć mody normalne tego układu. Pokazać, że dla $N = 3$ wyprowadzone wzory sprowadzają się do wyniku otrzymywanego bezpośrednio dla przypadku trzech mas (Zadanie 9.7).

Zadanie 9.12^R

Wyznaczyć częstości drgań podłużnych układu $2N$ jednakowych mas m mogących ślizgać się bez tarcia po poziomym pręcie i połączonych ze sobą i z odległymi jedna od drugiej o $(2N + 1)l$ ściankami sprężynkami o długościach swobodnych l i współczynnikach

sprężystości naprzemian k_A i k_B . Wykazać, że otrzymane wzory na częstości drgań i wychylenia mas z położeń równowagi przechodzą w granicy $k_A = k_B = k$ w te otrzymane w zadaniu 9.10.

Zadanie 9.13^R

Rozpatrzeć cząsteczkę zbudowaną z dwu różnych atomów o masach m_A i m_B oddziałujących ze sobą siłą sprężystą o współczynniku k zależną tylko od odległości między atomami A i B . Siła ta znika, gdy atomy są od siebie odległe o l . Stosując metodę eliminacji stopni swobody związanych z ruchem translacyjnym oraz obrotami, znaleźć częstość drgań własnych cząsteczki. Rozwiązać następnie ściśle problem ruchu takich dwu atomów wyrażając ich lagrangian przez wektor $\mathbf{R}$ położenia środka masy oraz wektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ i znaleźć wzory pozwalające wyznaczyć częstość małych drgań ściśle. Czym uzyskany w ten sposób wynik różni się od otrzymanego metodą eliminacji translacyjnych i rotacyjnych stopni swobody?

Zadanie 9.14^R

Posługując się metodą eliminacji translacyjnych i rotacyjnych stopni swobody znaleźć mody własne drgań i odpowiadające im częstości cząsteczki zbudowanej z trzech identycznych atomów tworzących w położeniu równowagi (w stanie niewzbudzonym, mówiąc językiem mechaniki kwantowej) trójkąt równoboczny o bokach długości l . Atomy traktujemy tu jak punktowe masy m , a siły je wiążące (których prawdziwym źródłem są oddziaływania elektromagnetyczne) jak zwykłe sprężynki o długościach swobodnych l i współczynnikach sprężystości κ .

10 RUCHY W POLACH SIŁ CENTRALNYCH

Zadanie 10.1^R

Masa m porusza się w polu siły centralnej $F_r(r)$ po torze zamkniętym o równaniu

$$r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi).$$

Znaleźć postać powodującej ten ruch siły centralnej $F_r(r)$. Obliczyć także czas obiegu centrum przyciągającego przez masę m

Zadanie 10.2^R

Wyznaczyć postać siły centralnej powodującej ruch punktu po masie m po spirali hiperbolicznej danej równaniem

$$r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}.$$

Znaleźć także zależność $\varphi = \varphi(t)$. Czy otrzymany wzór na siłę nie wygląda dziwnie? Jeśli tak, poszukać wyjaśnienia rozwiązując Zadanie 10.14.

Zadanie 10.3^R

Masa m porusza się w polu siły centralnej o potencjale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^\alpha}.$$

Czy może ona poruszać się po stabilnej orbicie kołowej, jeśli $\alpha = 5$? Jeśli $\alpha = \frac{1}{2}$?

Zadanie 10.4^R

Wykazać metodami geometrii analitycznej, że wzór

$$r(\varphi) = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

w którym parametr ε jest z definicji nieujemny (tak wybrany jest sposób odmierzenia kąta φ), rzeczywiście zadaje znane z geometrii krzywe stożkowe: elipsę (gdy $0 \leq \varepsilon < 1$ i znak +), hiperbolę (gdy $\varepsilon > 1$, oba znaki) i parabolę (gdy $\varepsilon = 1$ i znak +). Wyprowadzić w ten sposób związki między różnymi charakterystykami tych krzywych (np. między długościami a i b półosi elipsy, parametrami p i ε oraz odległością $2c$ między dwoma ogniskami elipsy i sumą $2f$ odległości dowolnego punktu na elipsie od jej ognisk).

Zadanie 10.5^R

Wiedząc, że torami ruchu masy m w polu siły centralnej o potencjale $V(r) = -\kappa/r$ ($\kappa > 0$ - siła przyciągająca, $\kappa < 0$ - odpychająca) są krzywe stożkowe: okrąg, elipsa, parabola lub hiperbola, wyprowadzić związki między różnymi charakterystykami elipsy i hiperboli: (c, f) , (a, b) i (p, ε) bez jawnego wyprowadzania (jak w Zadaniu 10.4) związków między równaniami w układach kartezjańskim i biegunowym. Powiązać te charakterystyki z momentem pędu L i całkowitą energią mechaniczną E cząstki. W przypadku ruchu po elipsie wyprowadzić z otrzymanych związków trzecie prawo Keplera.

planeta	duża polosa [j.a.]	okres T [s]	stosunek T^2/a^3 [s ² /m ³]
Merkury	0.387099	7.600344×10^6	2.97457×10^{-19}
Wenus	0.723332	1.94×10^7	2.97461×10^{-19}
Ziemia	1	3.15576×10^7	2.97462×10^{-19}
Mars	1.523691	5.94×10^7	2.97463×10^{-19}
Jowisz	5.202803	3.74×10^8	2.97179×10^{-19}
Saturn	9.55884	9.30×10^8	2.97377×10^{-19}
Uran	19.1819	2.66×10^9	2.97457×10^{-19}
Neptun	30.0578	5.20×10^9	2.97442×10^{-19}
Pluton	39.44	7.82×10^9	2.97466×10^{-19}

Tablica 1: Orbity planet Układu Słonecznego. j.a.= $1.4959787066 \times 10^{11}$ m.

Zadanie 10.6^R

Wyprowadzić wzory zadające (w sposób uwikłany) zależność od czasu położenia masy m poruszającej się w potencjale $V(r) = -\kappa/r$ ($\kappa > 0$ - siła przyciągająca, $\kappa < 0$ - odpychająca) we wszystkich możliwych przypadkach: ruchu po elipsie (możliwym przy $\kappa > 0$), ruchu po hiperboli (trzeba tu odróżnić przypadki ruchu po gałęzi hiperboli bliższej centrum siły, co zachodzi, gdy $\kappa > 0$ i po gałęzi dalszej, gdy $\kappa < 0$) oraz w przypadku ruchu po paraboli (możliwym tylko, gdy $\kappa > 0$).

Zadanie 10.7^R

Wykazać, że wektor $\mathbf{A}$ (zwany wektorem Lenza)

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} + \frac{\beta}{r} \mathbf{r},$$

z odpowiednio dobraną stałą β jest stały podczas ruchu masy m w potencjale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}.$$

Wykorzystując stałość $\mathbf{A}$ podać wzór wyznaczający tor, po którym porusza się masa m , wyrażając występujące w tym wzorze stałe przez jej całkowitą energię i moment pędu.

Zadanie 10.8^R

Wy tłumaczyć widoczne w tabeli 1 odstępstwo od trzeciego prawa Keplera, jakie wykazują planety Jowisz i Saturn.

Zadanie 10.9^R

Pierwszy lot suborbitalny odbył się w roku 1961. Kabina Merkury została wystrzelona z Ziemi i poruszając się po elipsie osiągnęła maksymalną wysokość $h = 185$ km (nad powierzchnią Ziemi). Wylądowała w odległości (liczonej po powierzchni Ziemi) $s = 480$ km od punktu startu. Znaleźć parametry p i ε elipsy, po której poruszała się kabina. Obliczyć także czas trwania jej lotu.

Zadanie 10.10^R

Z powierzchni Ziemi wystrzelono pod kątem α (w stosunku do powierzchni Ziemi) rakietę z prędkością v_0 (mniejszą od pierwszej prędkości kosmicznej). Jaki jest zasięg jej lotu (tj. liczona po powierzchni Ziemi odległość od punktu wystrzelenia do punktu upadku)? Dla jakiego kąta α zasięg jest największy? Pokazać, że gdy $v_0^2 \ll GM_Z/R_Z$, otrzymuje się znany zasięg rzutu ukośnego w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$. Jak wygląda orbita, gdy v_0 dąży do pierwszej prędkości kosmicznej?

Zadanie 10.11^R

Masa m spada z odległości R (gdzie ma zerową prędkość) na centrum keplerowskiej siły przyciągającej o potencjale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa > 0,$$

Obliczyć czas, po którym masa m spadnie na centrum.

Zadanie 10.12^R

Sztuczny satelita porusza się (z wyłączonymi silnikami) po orbicie kołowej o promieniu R_1 wokół Ziemi. W pewnym punkcie A toru, włącza na (pomijalnie krótki) moment silniki i jego prędkość zwiększa się lub zmniejsza się o $\Delta \mathbf{v}$ w kierunku prostopadłym do promienia orbity. W ten sposób pojazd przechodzi na orbitę eliptyczną. Pokazać, że punkt A jest apogeum lub perygeum tej orbity eliptycznej. Jaka musi być wartość $|\Delta \mathbf{v}|$ by pojazd mógł w ten sposób osiągnąć wysokość R_2 (i przejść na nową orbitę kołową włączając ponownie na pomijalnie krótki czas silniki i dopasowując odpowiednio do niej swoją prędkość transwersalną)?

Zadanie 10.13^R (tzw. Problem Bertranda)

Udowodnić, że tylko w potencjałach $V(r) = -|\kappa|/r$ oraz $V(r) = \frac{1}{2}|k|r^2$ wszystkie ruchy ograniczone z $L \neq 0$ zachodzą po torach zamkniętych.¹⁰

Zadanie 10.14^R

Rozpatrzyć ruch masy m w polu przyciągającej siły centralnej o potencjale $V(r) = -|\beta|/r^2$. Wszystkie możliwe przypadki takiego ruchu, w zależności od całkowitego momentu pędu L i całkowitej energii E ruchu, usystematyzować i przedyskutować, przede wszystkim jakościowo, ale opierając się w każdym z przypadków na wzorach zadających tor (tj. zależność $r = r(\varphi)$) oraz zależność położenia od czasu ($\varphi = \varphi(t)$ i ewentualnie $r = r(t)$). Jeśli dla jakichś wartości energii E i momentu pędu L możliwy jest ruch kończący się spadkiem na centrum siły, obliczyć czas po jakim masa m na nie spadnie, jeśli chwili $t = 0$ znajduje się w skończonej odległości $r(t = 0) = r_0$. Pokazać także, że otrzymane wzory dają, gdy $|\beta| \rightarrow 0$, to, czego należałoby się spodziewać (czyli co?).

¹⁰Ruchy, w których $L = 0$ zachodzą wzdłuż prostej przechodzącej przez centrum siły; jeśli $V(r)$ ma “dołek” (albo dolki), to każdy ruch w takim dolku jest okresowy - zobacz zadania w rozdziale 3 - i jego tor jest trywialnie “zamknięty”.

Zadanie 10.15^R

Masa m porusza się w polu siły centralnej o potencjale

$$V(r) = -\frac{|\kappa|}{r^4}.$$

W chwili $t = 0$ masa ta znajduje się w odległości $|\mathbf{r}_0| = r_0$ od przyciągającego centrum, przy czym wektor jej prędkości $\mathbf{v}_0$ jest prostopadły do wektora wodzącego $\mathbf{r}_0$ i ma wartość taką, że całkowita energia mechaniczna ruchu $E = 0$. Wyznaczyć tor, po którym poruszała i będzie się poruszać masa m . Czy spadnie ona na przyciągające ją centrum siły? Jeśli tak, obliczyć czas po jakim to nastąpi. Przedyskutować także możliwość przedłużenia toru masy m poza punkt $r = 0$.

Zadanie 10.16^R

Masa m porusza się w polu siły centralnej zadanej potencjałem

$$V(r) = -\frac{|\kappa|}{r^3},$$

przy czym całkowita energia mechaniczna tego ruchu $E = 0$. Znaleźć zależność położenia masy m od czasu, w przypadku, gdy jej moment pędu L jest równy zeru. W przypadku, gdy $L > 0$, znaleźć i naszkicować tor ruchu masy m oraz podać równania wyznaczające jej położenie w funkcji czasu, jeśli w chwili $t = 0$ była ona w punkcie maksymalnie (przy $E = 0$ i danym $L > 0$) odległym od centrum. Obliczyć czas jej spadku na centrum i przedyskutować możliwość przedłużenia toru takiego ruchu poza $r = 0$.

Zadanie 10.17

W polu siły centralnej o potencjale

$$V(r) = \frac{|\kappa|}{r} - \frac{\beta}{r^2},$$

porusza się masa m , o całkowitej energii E i momencie pędu L takim, że $\beta > L^2/2m$. Zakładając, że energia E jest taka, że masa spada na centrum, znaleźć tor jej ruchu i obliczyć czas, po jakim spadnie ona na centrum, jeśli w chwili początkowej była w odległości r_0 odeń. Jeśli moment pędu L cząstki jest taki, że $\beta < L^2/2m$, to nadlatująca masa oddala się do nieskończoności. Czy jej tor ma wtedy punkt przegięcia? Jeśli tak, to co go wyznacza?

Zadanie 10.18^R

Masa m porusza się w polu potencjalnej przyciągającej siły centralnej o potencjale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^\alpha}, \quad \kappa > 0, \quad \alpha > 0.$$

W chwili $t = 0$ znajduje się ona w odległości $r_0 > 0$ od przyciągającego ją centrum. Zbadać, w zależności od wykładnika α i globalnych charakterystyk ruchu masy m (momentu pędu L , całkowitej energii E i od znaku jej prędkości radialnej $v_r(0) = \dot{r}(0)$ w

chwili początkowej), czy spadnie ona na przyciągające ją centrum. Kiedy przy takim spadku okrąży ona centrum nieskończenie wiele razy? Ile zaś razy masa m okrąży centrum przy oddalaniu się do nieskończoności, gdy warunki początkowe są takie, że ucieczka taka nastąpi?

Zadanie 10.19^R

Zapisać rozwiązanie kartezjańskich równań ruchu dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω we współrzędnych biegunowych i otrzymać równanie toru, wyrażone przez całkowitą energię mechaniczną oscylatora i jego moment pędu oraz wzór na $r^2(t)$. Odtworzyć następnie równanie toru oraz wzór na $r^2(t)$ całkując podane w Przypomnieniu wzory właściwe dla ruchu w polu sił centralnych.

Zadanie 10.20^R

Satelita o masie m porusza się wokół Ziemi po orbicie kołowej o promieniu r_0 . Oprócz siły grawitacji działa nań dodatkowo siła oporu $\mathbf{F}_{\text{op}} = -\lambda v^{n-1}\mathbf{v}$ ($v = |\mathbf{v}|$). Przyjmując, że energia tracona przezeń w trakcie każdego obiegu jest bardzo mała w porównaniu z jego całkowitą energią kinetyczną (tak iż można przyjąć że siła oporu powoduje jedynie małą zmianę promienia orbity), obliczyć czas, po którym spadnie on na Ziemię.

Zadanie 10.21^R

Zgodnie z prawami elektrodynamiki klasycznej ładunek elektryczny q poruszając się z przyspieszeniem promieniuje i traci energię. Wypromieniowana (czyli stracona) w przedziale dt czasu energia dE jest dana (w tym nienormalnym układzie SI) wzorem

$$dE = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \mathbf{a}^2(t) dt.$$

Przyjmując że spowodowana promieniowaniem strata energii elektronu na bohrowskiej orbicie kołowej¹¹ w atomie wodoropodobnym (jeden elektron krążący wokół jądra o ładunku Ze) jest mała, oszacować czas życia takiego rządzonego prawami fizyki klasycznej atomu (tj. czas po którym elektron spadłby na jądro).

Zadanie 10.22^R

Posługując się mechaniką newtonowską obliczyć jak zmienia się z czasem częstotliwość ν fal grawitacyjnych (rejestrowanych na Ziemi przez detektory LIGO) emitowanych przez układ dwóch czarnych dziur o masach M_1 i M_2 wirujących wokół swojego środka masy, jeśli wiadomo, że częstość $2\pi\nu$ emitowanych fal jest równa podwojonej prędkości kątowej ω ich obrotów, a moc P wypromieniowywana przez taki układ jest dana wzorem

$$P = \alpha G^a I^2 \omega^b c^d,$$

w którym $\alpha = 32/5$, c jest prędkością światła, a I jest momentem bezwładności względem osi obrotu układu dwóch czarnych dziur. Wykładniki a , b i d w podanym wzorze na P

¹¹Jak wiadomo N. Bohr był z matematyki noga (wielkość Bohra leżała w czymś zupełnie innym) i konstruując swój model atomu był w stanie rozpatrzeć jedynie orbity kołowe; eliptyczne musiał już opracować A. Sommerfeld. Tu jednak jest to okoliczność szczęśliwa, gdyż przyjętą tu metodę można zastosować w zasadzie tylko do orbit kołowych.

trzeba ustalić na podstawie analizy wymiarowej. Przyjąć, że środek masy układu czarnych dziur pozostaje w spoczynku w układzie, w którym emitowane przezeń promieniowanie jest rejestrowane, a ruch względny czarnych dziur odbywa się po orbicie kołowej.

Zadanie 10.23^R

Masa m porusza się w polu centralnej siły przyciągającej o potencjale $V(r)$ mając ujemną energię. Ruch odbywa się więc w ograniczonym obszarze: odległość masy m od centrum zmienia się od pewnej wartości minimalnej r_- do maksymalnej r_+ . Pomiedzy dwoma kolejnymi położeniami minimalnego oddalenia od centrum siły masa zakreśla kąt $\Delta\varphi$ (równy 2π , gdy $V(r) = -\kappa/r$). Wyprowadzić wzór pozwalający obliczyć zmianę (w przypadku keplerowskich orbit zmiana ta nazywa się precesją orbity) $\delta(\Delta\varphi)$ powodowaną zmianą potencjału z $V(r)$ na $V(r) + \delta V(r)$. Potraktować $\delta V(r)$ jak małe zaburzenie i ograniczyć się do efektów pierwszego rzędu. Otrzymany wzór sprawdzić na przykładzie $V(r) + \delta V(r) = -\kappa/r + \beta/r^2$ (zmianę $\delta(\Delta\varphi)$ można wtedy obliczyć ściśle). Przy okazji, korzystając z analizy wymiarowej, oszacować rząd wielkości precesji (sumarycznej zmiany $\delta(\Delta\varphi)$ po stu latach - taką wielkość podają źródła stronomiczne) orbity Merkurego (o $a = 0.387$ j.a., $\varepsilon = 0.21$, obieganej przezeń w $T = 88$ dni) powodowaną efektami relatywistycznymi - efekty te modyfikują nieco potencjał keplerowski o człony, które powinny zniknąć, gdy prędkość światła c dąży do nieskończoności (analiza wymiarowa nie pozwala rozdzielić efektów szczególnej i ogólnej teorii względności).

Zadanie 10.24^R

Obliczyć szybkość precesji orbity masy m o całkowitej energii ruchu $E < 0$ jakie by spowodowało odstępstwo postaci

$$V(r) = -\frac{|\tilde{\kappa}|}{r^{1+\sigma}}, \quad |\sigma| \ll 1,$$

potencjału siły centralnej od ściśle keplerowskiej. Przez szybkość precesji należy tu rozumieć stosunek zmiany $\delta(\Delta\varphi)$ pod wpływem zaburzenia potencjału ściśle keplerowskiego przez $\sigma \neq 0$ kąta $\Delta\varphi$, jaki masa m zakreśla pomiędzy kolejnymi położeniami maksymalnego oddalenia od centrum siły, do okresu obiegu orbity w niezaburzonym potencjale keplerowskim.

11 ROZPRASZANIE I PRZEKROJE CZYNNE

Zadanie 11.1^R

Obliczyć różniczkowy i całkowity przekrój czynny elastycznego rozpraszania sztywnej kuli o promieniu r na unieruchomionej kuli o promieniu R .

Zadanie 11.2^R

Obliczyć przekrój czynny $\sigma_{\text{zderz}}(E)$ na zderzenie z planetą o promieniu R i masie M meteorytu (traktowanego jak punkt) o masie m nadlatującego z nieskończoności i mającego energię E .

Zadanie 11.3^R

Jaki jest przekrój czynny $\sigma_{\text{spadku}}(E)$ na spadek na centrum przyciągającej siły centralnej o potencjale

$$V(r) = -\frac{|\kappa|}{r^n},$$

masy m w zależności od jej energii E i od wykładnika $n > 0$?

Zadanie 11.4^R

Tworzące jednorodny strumień cząstki mające w nieskończoności prędkość v_∞ (tj. ustaloną energię E) równoległą do osi x rozpraszają się w polu siły o potencjale

$$V(r) = \frac{|\kappa|}{r}.$$

Wyznaczyć obszar niedostępny dla tych cząstek.

Zadanie 11.5^R

Tworzące jednorodny strumień małe (można je traktować jak punktowe) meteoryty lecą w kierunku Ziemi mając w nieskończoności prędkość $\mathbf{v}_\infty$ (tj. ustaloną energię E) równoległą do osi x będącej zarazem przedłużeniem (np. w kierunku północnym) osi Ziemi. Jakie szerokości geograficzne na Ziemi są “bezpieczne” (tzn. meteoryty nie mogą tam spaść)?

Zadanie 11.6^R

Masa m nadlatuje z nieskończoności, rozprasza się w polu zachowawczej siły centralnej o potencjale

$$V(r) = \frac{|\kappa|}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

i oddala się ponownie do nieskończoności. Jaki kąt tworzą wektor prędkości początkowej (tj. w $t = -\infty$) i końcowej (w $t = +\infty$) masy m , jeśli całkowita jej energia jest równa E , a moment pędu L . Rozpatrzeć przypadki $\beta > 0$ i $\beta < 0$, uwzględniając też możliwość $2m\beta/L^2 < -1$.

Zadanie 11.7^R

Traktując zmianę pędu cząstki rozpraszającej się na ustalonym centrum siły (niekoniecznie centralnej, ale takiej, że ruch cząstki jest płaski, tj. jej tor leży w jednej płaszczyźnie) o potencjale $V(\mathbf{r})$ jak wielkość małą pierwszego rzędu (tego samego, co sam potencjał) wyprowadzić ogólny wzór na przekrój czynny rozpraszania pod małymi kątami. W przypadku rozpraszania w polu siły centralnej wyprowadzić ten sam wzór robiąc odpowiednie przybliżenia w standardowych wyrażeniach.

Zadanie 11.8^R

Obliczyć różniczkowy przekrój czynny rozpraszania cząstki o masie m i energii E (lub, równoważnie, prędkości v_∞ w nieskończoności) w polu siły centralnej o potencjale

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}.$$

Rozpatrzyć przypadki siły przyciągającej ($\kappa > 0$) i odpychającej ($\kappa < 0$). Jaki jest całkowity przekrój czynny rozpraszania w takim potencjale? Odtworzyć otrzymany różniczkowy przekrój czynny rozpraszania pod małymi kątami posługując się ogólną przybliżoną metodą obliczania przekroju czynnego w tej granicy z zadania 11.7.

Zadanie 11.9^R

Obliczyć różniczkowy przekrój czynny rozpraszania cząstek o masie m w polu odpychającej siły centralnej o potencjale

$$V(r) = \frac{|\beta|}{r^2}.$$

Jaki jest całkowity przekrój czynny takiego rozpraszania? Odtworzyć postać różniczkowego przekroju czynnego rozpraszania pod infinitezymalnie małymi kątami metodą z zadania 11.7.

Zadanie 11.10^R

Obliczyć różniczkowy przekrój czynny rozpraszania cząstek o masie m w polu przyciągającej siły centralnej o potencjale

$$V(r) = -\frac{|\beta|}{r^2}.$$

Czy wiodący wyraz otrzymanego różniczkowego przekroju czynnego rozpraszania pod infinitezymalnie małymi kątami można odtworzyć metodą z zadania 11.7?

Zadanie 11.11^R

Obliczyć różniczkowy przekrój czynny rozpraszania cząstki o masie m w polu impulsowej siły centralnej o potencjale w będącym sferycznie symetryczną “studnią” o promieniu R

$$V(r) = \begin{cases} -|V_0| & \text{gdy } r < R \\ 0 & \text{gdy } r > R \end{cases}.$$

Otrzymać związek kąta rozproszenia z parametrem zderzenia dwiema różnymi metodami: raz metodą “optyczno-geometryczną” wprowadzając współczynnik “załamania” cząstki

na granicy studni potencjału, a drugi raz korzystając z ogólnego wzoru na kąt $\varphi_{\max}$. Obliczyć¹² całkowity przekrój czynny całkując $d\sigma/d\Omega$ po całym, kącie bryłowym.

Zadanie 11.12^R

Obliczyć różniczkowy przekrój czynny rozpraszania cząstki o masie m w polu impulsowej siły centralnej o potencjale będącym sferycznie symetrycznym “garbem”

$$V(r) = \begin{cases} |V_0| & \text{gdy } r < R \\ 0 & \text{gdy } r > R \end{cases}.$$

Obliczyć całkowity przekrój czynny całkując $d\sigma/d\Omega$ po kącie bryłowym i pokazać, że ma on wartość zgodną z oczekiwaną (czyli jaką?).

Zadanie 11.13^R

Na powierzchnię obrotową zadaną wypukłą funkcją $\rho = f(z)$ (gdzie $\rho^2 = x^2 + y^2$), równoległe do osi z pada strumień cząstek o masie m i całkowitej energii E . Cząstki odbijają się od powierzchni doskonale sprężysto. Zakładając, że powierzchnia ta jest wypukła, wyrazić różniczkowy przekrój czynny rozpraszania przez funkcję f i jej pochodne (obliczone w odpowiednim punkcie). Podać przekrój czynny w jawnej postaci w sytuacji, gdy $f(z) = A(z/a)^\alpha$, zakładając (dla wypukłości), że $\alpha > 1$. Dobierając wykładnik α , znaleźć taką funkcję $f(z)$, że przekrój czynny rozpraszania na niej będzie miał taką samą zależność od kąta rozproszenia, jak przekrój rutherfordowski rozpraszania cząstek naładowanych na nieruchomym naładowanym centrum. Czy ta sama powierzchnia może “symulować” rutherfordowskie rozpraszanie dla każdej wartości energii?

Zadanie 11.14^R

Obliczyć przekrój czynny wzbudzenia początkowo nieruchomego trójwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego (o środku w punkcie $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ i częstości własnej ω) do energii pomiędzy E i $E + dE$ przez przelatującą bardzo szybką cząstkę o prędkości $\mathbf{v}$, jeśli oddziałuje ona z oscylatorem siłą, której potencjał jest dany wzorem

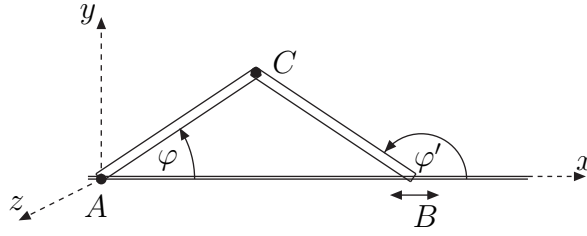
$$V(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = -V_0 \exp \{ -\kappa^2 (\mathbf{r} - \mathbf{R})^2 \},$$

w którym $\mathbf{r}$ jest wychyleniem oscylatora, a $\mathbf{R}$ położeniem przelatującej cząstki. Dokonać przybliżenia polegającego na przyjęciu, że $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{R}|$ i pominięciu odchylenia toru cząstki od prostoliniowego (cząstka szybka).

Zadanie 11.15^R

Dwie (nierelatywistyczne) cząstki o masach m_1 i m_2 oddziałujące tylko ze sobą nawzajem, z których ta o masie m_2 początkowo spoczywa (tj. w chwili $t = -\infty$) w układzie związanym z laboratorium, a druga nadlatuje z nieskończoności z prędkością równą $\mathbf{v}_{1L}$ (też w $t = -\infty$), rozpraszają się na sobie elastycznie (tzn. bez strat energii mechanicznej) i rozlatują do nieskończoności. Wyrazić kąty θ_{1L} i θ_{2L} pod jakimi (w stosunku do kierunku

¹²Albo przynajmniej powiedzieć, ile powinien on wynosić, jeśli całka, którą trzeba wykonać jest zbyt przeróżająca.

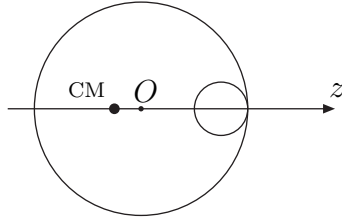


Rysunek 18: Dwa połączone przegubowo pręty.

wyznaczanego przez $\mathbf{v}_{1L}$) w układzie laboratorium rozleca się one do nieskończoności przez kąt ϑ ich rozproszenia w układzie środka ich masy.

Zadanie 11.16^R

Kula o masie m_1 i promieniu r_1 nadlatuje z nieskończoności i odbija się doskonale sprężysto od początkowo nieruchomej (w układzie laboratoryjnym) kuli o masie m_2 i promieniu r_2 . Znaleźć różniczkowy przekrój czynny tego rozpraszania wyrażając go zarówno przez kąt θ_{1L} rozproszenia kuli o masie m_1 jak też i przez kąt θ_{2L} pod jakim w stosunku do kierunku wyznaczanego przez wektor początkowej prędkości padającej kuli odlatuje kula o masie m_2 . Rozpatrzyć przypadki $m_1 < m_2$, $m_1 > m_2$ i $m_1 = m_2$. We obu przypadkach obliczyć całkowity przekrój czynny wykonując całkowanie po kątach bezpośrednio i pokazać, że jest on równy, tyle ile być powinien (czyli ile?).



Rysunek 19: Kula o promieniu R z kulistym wydrążeniem o promieniu r .

12 BRYŁA SZTYWNA

Zadanie 12.1^R

Wyprowadzić wzory na składowe (chwilowej) prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ w układzie odniesienia związanym z obracającą się bryłą sztywną, którego orientacja względem układu nieruchomego (inercjalnego), mającego z nim wspólny początek jest wyznaczona przez zdefiniowane standardowo przez trzy kąty Eulera φ , θ i ψ (trzy “trzy ruchy łapki”).

Zadanie 12.2^R (Twierdzenie Steinera)

Podać wzór wyrażający tensor $\mathbf{I}_{(O)}$ momentu bezwładności bryły sztywnej względem punktu O przez tensor $\mathbf{I}_{(\text{CM})}$ tejże bryły względem jej środka masy.

Zadanie 12.3^R

Znaleźć tensor $\hat{\mathbf{I}}^{(O)}$ momentu bezwładności jednorodnej płaskiej płytki o kształcie prostokątnego trójkąta mającego przyprostokątne o długościach R i h i masę M względem punktu O będącego wierzchołkiem kąta prostego. Płytkę należy potraktować jak dwuwymiarowy rozkład masy, ale sam tensor $\hat{\mathbf{I}}^{(O)}$ charakteryzuje ją jako bryłę w trzech wymiarach.

Zadanie 12.4^R

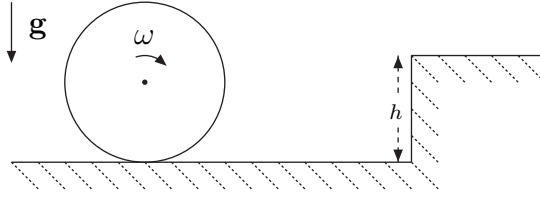
Znaleźć tensor $\hat{\mathbf{I}}^{(O)}$ momentu bezwładności jednorodnego stożka o masie M , promieniu podstawy R i wysokości h względem punktu O będącego środkiem jego podstawy. Następnie wykorzystując twierdzenie Steinera, otrzymać tensor momentu bezwładności względem środka masy stożka.

Zadanie 12.5^R

Podać składowe tensora momentu bezwładności $\mathbf{I}_{(\text{CM})}$ (względem środka masy) jednorodnej bryły o całkowitej masie M będącej kulą o promieniu R z pustym kulistym wydrążeniem o promieniu $r < R$, które jest styczne z jej powierzchnią, tak jak na rysunku 19.

Zadanie 12.6^R

Pokazać, że ruch środka masy jednorodnej kuli o promieniu R i masie M toczącej się bez poślizgu po poziomej (w stosunku do pola siły ciężkości $\mathbf{g}$) płaszczyźnie pod działaniem stałej siły F skierowanej poziomo wzdłuż prostej przechodzącej przez środek kuli jest taki sam, jak punktu materialnego o tej samej masie pod wpływem stałej poziomej siły



Rysunek 20: Walec wtaczający się na próg.

$F' = \alpha F$. Znaleźć współczynnik proporcjonalności α .

Zadanie 12.7^R

W górną krawędź sześciangu o objętości l^3 i masie M spoczywającego na płaszczyźnie (w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$) uderza kulka o masie m lecąca poziomo z prędkością v prostopadłą do tej krawędzi. Przyjmując, że jej zderzenie z sześciangiem jest doskonale sprężyste i kulka odbija się tak, że odlatuje wzdłuż tej samej prostej, wzdłuż której nadleciała, a dolna krawędź sześciangu, przeciwnieległa do tej, w od której odbija się kulka, jest unieruchomiona tak, że sześciang może się tylko wokół niej obracać (odrywając dolną ścianę od podłoża), znaleźć prędkość kątową takiego obrotu sześciangu po odbiciu się odeń kulki. Podać równania wyznaczające ruch sześciangu po odbiciu i sprowadzić jego rozwiązanie do kwadratury. Jaka musi być minimalna prędkość kulki, by sześciang obrócił się całkowicie, tzn. o kąt $\pi/2$?

Zadanie 12.8^R

Znaleźć energię kinetyczną układu dwu połączonych przegubowo prętów o masie m i długości l każdy. Koniec lewego pręta jest unieruchomiony w punkcie A (pręt może się tylko obracać wokół A), a koniec B prawego pręta może tylko przesuwać się po ustalonej prostej przechodzącej przez punkt A (rysunek 18).

Zadanie 12.9^R

Znaleźć energię kinetyczną niejednorodnego walca o masie M i promieniu R toczącego się bez poślizgu po płaszczyźnie. Środek masy walca jest odległy o a od jego osi, a oś główna jego tensora bezwładności $\mathbf{I}_{(\text{CM})}$ (z założenia znanego) jest równoległa do osi walca.

Zadanie 12.10^R

Znaleźć energię kinetyczną małego jednorodnego walca o masie m i promieniu a toczącego się bez poślizgu po wewnętrznej powierzchni nieruchomego dużego walca o promieniu R ($R > a$). Osie obu walców są do siebie stale równoległe.

Zadanie 12.11^R

Znaleźć energię kinetyczną jednorodnego stożka o całkowitej masie M , kącie rozwarcia 2α i wysokości h taczającego się bez poślizgu po płaszczyźnie w taki sposób, że jego czubek pozostaje stale w tym samym punkcie płaszczyzny. Następnie, przyjmując, że płaszczyzna ta jest do pionu (wyznaczanego przez pole siły ciężkości) nachylona pod kątem β , napisać równanie wyznaczające ruch stożka po płaszczyźnie.

Zadanie 12.12^R

Jednorodny walec o masie M i promieniu R toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie stołu z prędkością kątową ω . Tocząc się dociera do progu o wysokości h , którego krawędź jest równoległa do osi walca (patrz rysunek 20). Jakie warunki musi spełniać ruch walca, by walec wtoczył się na próg? Jaka jest jego prędkość kątowa po wtoczeniu się na próg?

Zadanie 12.13^R

Jednorodna bryła w kształcie stożka o wysokości h i promieniu podstawy również h obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi z pokrywającej się z tworzącą stożka. Jakie siły $\mathbf{F}_A$ i $\mathbf{F}_B$ muszą na nią działać, jeśli są one przyłożone w dwu punktach: A będącym wierzchołkiem stożka i zarazem początkiem inercjalnego układu odniesienia oraz w punkcie B położonym na brzegu podstawy stożka, którym styka się ona z osią z ?

Zadanie 12.14^R

Płaska płytką o kształcie równoramiennej trójkąta prostokątnego mającego przyprostokątne o długości a i masę M obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej (w stosunku do pola siły ciężkości $\mathbf{g}$) osi będącej jedną z przyprostokątnych tak, iż wierzchołek A płytki będący kątem prostym jest dolnym jej punktem oparcia a punkt B na drugim końcu tej przyprostokątnej górnym. Oprócz siły ciężkości, na płytkę działają w punktach A i B siły reakcji. Jaka musi być wartość $|\omega|$ prędkości kątowej, by zniknęła horyzontalna składowa siły reakcji w punkcie A ? Czy składowe pionowe obu sił reakcji można wyznaczyć bezwzględnie?

Zadanie 12.15^R

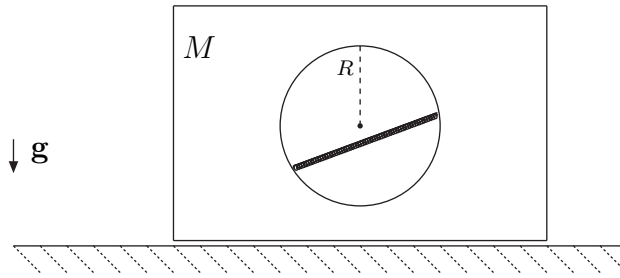
Półwalec o promieniu R i masie M wykonany z jednorodnego kawałka materiału może toczyć się bez poślizgu po poziomej w stosunku do pola $\mathbf{g}$ powierzchni i tym samym wykonywać małe drgania wokół położenia równowagi. Wypisać równanie ruchu półwalca i znaleźć częstość jego małych drgań. Problem rozwiązać zarówno posługując się równaniami Lagrange’a II-go rodzaju, jak też i metodą “newtonowską”.

Zadanie 12.16^R

Jednorodny cienki pręt o masie m i długości l położono na nieruchomej walcowatej powierzchni o promieniu a tak, że środek pręta jest zarazem punktem styku obu ciał a sam pręt jest prostopadły do osi walca. (Cały układ znajduje się w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$). Zakładając, że poślizg pręta nie występuje, napisać ściśle równanie wyznaczające jego ruch korzystając z metody lagrangeowskiej. Stosując standardowe przybliżenia znaleźć częstość małych drgań w jakie można wprawić pręt nieznacznie wychylając go z położenia równowagi. Odtworzyć także ściśle równanie ruchu korzystając z metody newtonowskiej.

Zadanie 12.17^R

Blok o masie M mający walcowate wydrążenie o promieniu R może ślizgać się bez tarcia po gładkiej poziomej (w stosunku do pola $\mathbf{g}$) płaszczyźnie w kierunku prostopadłym do osi wydrążenia. W wydrążeniu znajduje się jednorodny pręt o masie m i długości $2l$ ($l < R$). Pręt ten może ślizgać się bez tarcia po ściankach wydrążenia pozostając stale prostopadłym do osi wydrążenia (zob. rysunek 21). Ograniczając się do ruchów



Rysunek 21: Pręt o masie m i długości $2l < 2R$ w walcowym wydrążeniu o promieniu R w bloku o masie M na gładkim stole.

plaskich napisać lagrangian tego układu oraz wynikające z niego ściśle równania jego ruchu. Sprowadzić ich rozwiązanie do kwadratur wykorzystując całki pierwsze. Znaleźć ruch układu w przybliżeniu małych odchylen pręta od pozycji poziomej (względem pola $\mathbf{g}$). W tym przybliżeniu podać zależność od czasu wszystkich wybranych współrzędnych uogólnionych.

Zadanie 12.18^R

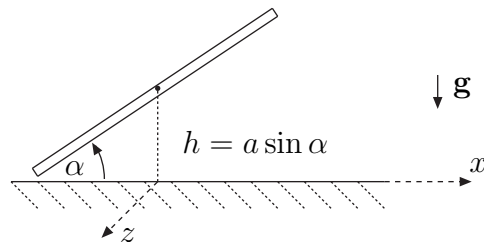
Końce jednorodnego pręta mającego długość $2l$ i masę m mogą ślizgać się bez tarcia po nieważkiej obręczy o promieniu $R > l$. Obręcz ta wiruje ze stałą prędkością kątową ω wokół swojej średnicy równoległej do pola a siły ciężkości $\mathbf{g}$. Napisać lagrangian tego układu i równania ruchu. Sprowadzić rozwiązanie do kwadratur wykorzystując całkę pierwszą. Znaleźć położenia równowagi pręta i częstości małych drgań wokół położen równowagi trwałej.

Zadanie 12.19^R

Jednorodny walec o promieniu a i masie m stacza się bez poślizgu w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$ z dużego całkowicie unieruchomionego walca o promieniu b . Osie obu walców pozostają cały czas wzajemnie równoległe (i prostopadłe do pola $\mathbf{g}$). Znaleźć zależność siły reakcji działającej na mały walec od strony dużego walca i punkt, w którym oderwie się on od dużego walca, jeśli zaczyna staczać się praktycznie bez prędkości początkowej z najwyższego położenia.

Zadanie 12.20^R

Obręcz o promieniu R i masie M stoi na horyzontalnej (w stosunku do pola siły ciężkości $\mathbf{g}$) płaszczyźnie tak, że jedna z jej średnic jest równoległa pola $\mathbf{g}$. Do obręczy tej w punkcie, który znajduje się na wysokości R nad płaszczyzną przyczepiono nagle punktowy ciężarek o masie m (np. kulkę z plasteliny) tak, że obręcz zaczyna się obracać i przemieszczać. Jak duży musi być współczynnik μ_{st} tarcia statycznego obręczy o płaszczyznę by nie wystąpił poślizg? Napisać także lagrangian wyznaczający toczenie się obciążonej obręczy bez poślizgu. Podać równanie wyznaczające ruch obciążonej obręczy w przypadku niewystąpienia poślizgu.



Rysunek 22: Pręt upadający na poziomą płaszczyznę, o którą opiera się stale jednym swoim końcem.

Zadanie 12.21^R

Jednorodny pręt o masie m , długości $2a$ i pomijalnie małym przekroju poprzecznym upada na poziomą (w stosunku do pola siły ciężkości $\mathbf{g}$) płaszczyznę stale ślizgając się po niej (całkowicie bez tarcia) jednym ze swych końców (rysunek 22). Jak prędkość środka masy pręta i siła reakcji podłoża zależą od wysokości h , na jakiej środek masy pręta znajduje się nad płaszczyznę, jeśli początkowo znajdował on się w spoczynku na wysokości $h_0 < a$?

Zadanie 12.22^R

Znaleźć ruch w ziemskim polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$ bąka o masie M i symetrii obrotowej, którego czubek leżący na osi symetrii pozostaje unieruchomiony w ustalonym punkcie płaszczyzny (czyli ruch tzw. bąka symetrycznego podpartego). Wykorzystując odpowiednio zdefiniowany potencjał efektywny przedyskutować jakościowo charakter ruchu bąka.

13 FORMALIZM HAMILTONOWSKI I RÓWNANIE HAMILTONA-JACOBIEGO

Zadanie 13.1^R

Podać hamiltonian układu, którego lagrangian ma ogólną postać

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij}(q, t) \dot{q}^i \dot{q}^j + \sum_i a_i(q, t) \dot{q}^i - V(q, t),$$

zakładając, że symetryczna macierz $T_{ij}(q, t)$ jest odwracalna. Korzystając z wyniku wypisać jawnie hamiltoniany cząstki o masie m poruszającej się w potencjale $V(\mathbf{r})$ wyrażone w zmiennych cylindrycznych i sferycznych. Podać (w zmiennych kartezjańskich) hamiltonian cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q oddziałującej z zewnętrznymi polami elektrycznym i magnetycznym. Wypisać także hamiltonian bąka symetrycznego podpartego rozpatrywanego w zadaniu 12.22.

Zadanie 13.2^R

Napisać hamiltonian cząstki swobodnej o masie m wyrażony przez zmienne (i sprzężone z nimi kanonicznie pędy) zdefiniowane w układzie obracającym się względem układu inercyjnego z (chwilową) prędkością kątową ω .

Zadanie 13.3^R

Stosując równania kanoniczne Hamiltona rozwiązać problem ruchu cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q w stałym, jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$.

Zadanie 13.4^R

Rozwiązać równania kanoniczne wynikające z hamiltonianu

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \lambda \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right)^2,$$

w którym λ jest pewną stałą. Czy układ, którego jest to hamiltonian, jest oscylatorem harmonicznym o częstości ω ?

Zadanie 13.5^R

Znaleźć hamiltonian oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω otrzymany w wyniku przekształcenia kanonicznego do nowych zmiennych Q i P zadawanego przez funkcję tworzącą

$$W(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \operatorname{ctg} Q.$$

Rozwiązać nowe równania kanoniczne i znaleźć w ten sposób ruch układu.

Zadanie 13.6^R

Stosując przekształcenie kanoniczne z zadania 13.5 otrzymać przybliżone rozwiązanie problemu oscylatora harmonicznego, którego częstość ω wolno zmienia się z czasem: $\omega(t) \approx \omega_0 + \varepsilon t + \dots$ przy czym $|\varepsilon| \ll \omega_0^2$.

Zadanie 13.7^R

Hamiltonian układu o jednym stopniu swobody ma postać

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \alpha q^3 + \beta qp^2.$$

W przekształceniu kanonicznym do nowych zmiennych Q i P zadany funkcją tworzącą

$$S(q, P) = qP + a q^2 P + b P^3,$$

dobrać stałe a i b tak, by z przekształconego hamiltonianu $\bar{H}(Q, P)$ usunąć wyrazy anharmoniczne pierwszego rzędu w α i β . Przybliżając następnie $\bar{H}(Q, P)$ przez hamiltonian oscylatora (w zmiennych Q i P) podać przybliżone rozwiązanie ruchu wyjściowego układu, tj. przybliżoną funkcję $q(t)$, zakładając, że w trakcie ruchu $\alpha|q| \ll m\omega^2$ i $\beta|q| \ll 1/m$. Porównać je z przybliżonym rozwiązaniem, które można przymać stosując rachunek zaburzeń do równania Eulera-Lagrange'a otrzymanego z lagrangianu odpowiadającego wyjściowemu hamiltonianowi.

Zadanie 13.8^R

Stosując do Hamiltonianu

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \beta q^4.$$

jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω zaburzonego członem anharmonicznym zadane funkcją tworzącą

$$S(q, P) = qP + a q^3 P + b q P^3,$$

przekształcenie kanoniczne do nowych zmiennych Q i P znaleźć zależność zmiennej q od czasu. Założyć, iż odchylenia q od położenia równowagi $q = 0$ są na tyle małe ($\beta q^2(t) \ll m\omega^2$), że można się ograniczyć do poprawek pierwszego rzędu względem β . Czy otrzymane w ten sposób przybliżone rozwiązanie jest lepsze od otrzymywanego przy zastosowaniu rachunku zaburzeń do równania Lagrange'a?

Wskazówka: Dobrać stałe a i b tak, by z nowy hamiltonian $\bar{H}(Q, P)$ miał postać analogiczną do hamiltonianu z zadania 13.4.

Zadanie 13.9^R

W związkach

$$\begin{aligned} x &= a \left(Q_2 - \sqrt{2Q_1} \sin P_1 \right), & p_x &= b \left(P_2 + \sqrt{2Q_1} \cos P_1 \right), \\ y &= a \left(-P_2 + \sqrt{2Q_1} \cos P_1 \right), & p_y &= b \left(Q_2 + \sqrt{2Q_1} \sin P_1 \right), \end{aligned}$$

dobrać stałe a i b tak, by było to przekształcenie kanoniczne od zmiennych (x, y, p_x, p_y) do nowych zmiennych (Q_1, Q_2, P_1, P_2) . Podać jawną postać jego funkcji tworzącej. Wykorzystując to przekształcenie sprowadzić hamiltonian cząstki o masie m i ładunku elektrycznym q poruszającej się w stałym i jednorodnym polu magnetycznym $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ do prostej postaci i rozwiązując równania kanoniczne w nowych zmiennych znaleźć zależność położenia cząstki od czasu, tj. zależność od czasu zmiennych x i y .

Zadanie 13.10^R

Na przykładzie jednowymiarowego ruchu cząstki o masie m poddanej działaniu stałej i jednorodnej siły F , której to cząstki lagrangianem jest wyrażenie

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + qF,$$

pokazać, że transformacje od zmiennych $q(t), p(t)$ do $Q(t) = q(t + \tau)$, $P(t) = p(t + \tau)$ oraz od zmiennych $q(t), p(t)$ do $Q(t) = q_0$, $P(t) = p_0$ (tu q_0 i p_0 są warunkami początkowymi w chwili t_0) są kanoniczne. Znaleźć funkcje tworzące tych przekształceń i pokazać formalnie, że w pierwszym przypadku $\bar{H}(Q, P) = H(q, p)$, a w drugim $\bar{H}(Q, P) = 0$.

Zadanie 13.11^R

Na przykładzie ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω pokazać, że transformacje od zmiennych naturalnych $q(t), p(t)$ do $Q(t) = q(t - \tau)$, $P(t) = p(t - \tau)$ oraz od zmiennych $q(t), p(t)$ do $Q(t) = Q$, $P(t) = P$ (tu Q i P są warunkami początkowymi w chwili $t = 0$) są kanoniczne. Znaleźć funkcje tworzące tych przekształceń i pokazać formalnie, że w pierwszym przypadku $\bar{H}(Q, P) = H(q, p)$, a w drugim $\bar{H}(Q, P) = 0$.

Zadanie 13.12^R

Posługując się równaniem Hamiltona-Jacobiego znaleźć tor ruchu oraz zależność położenia od czasu masy m poruszającej się w stałym i jednorodnym polu siły ciężkości $\mathbf{g}$.

Zadanie 13.13^R

Rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego w zmiennych kartezjańskich znaleźć ruch dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω .

Zadanie 13.14^R

Znaleźć ruch dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω , rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego w zmiennych biegunowych. Scałkować równanie toru i wykazać, że tor jest elipsą o środku w centrum siły przyciągającej. Wyznaczyć długość półosi elipsy w funkcji energii ruchu i momentu pędu.

Zadanie 13.15^R

Rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego znaleźć ruch cząstki o ładunku elektrycznym q i masie m w równoległych do siebie nawzajem, stałych i jednorodnych polach elektrycznym $\mathbf{E} = E_{\text{el}} \mathbf{e}_z$, i magnetycznym $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. Odtworzyć w ten sposób wynik znany z całkowania równania Newtona (zadanie 2.18).

Zadanie 13.16^R

Rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego znaleźć ruch cząstki o ładunku elektrycznym q i masie m we wzajemnie do siebie prostopadłych, stałych i jednorodnych polach elektrycznym $\mathbf{E} = E_{\text{el}} \mathbf{e}_y$, i magnetycznym $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. Odtworzyć w ten sposób wynik znany z całkowania równania Newtona (zadanie 2.14).

Zadanie 13.17^R

Rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego znaleźć ruch cząstki (tj. tor cząstki i równania wyznaczające zależność jej położenia od czasu) o masie m w polu siły centralnej o potencjale ($\kappa > 0$)

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}.$$

W przypadku ruchu w ograniczonym obszarze przestrzeni wyrazić pólisie elipy będącej torem przez stałe ruchu: całkowitą energię E i moment pędu L .

Zadanie 13.18^R

Rozwiązując równanie Hamiltona-Jacobiego w dwóch wymiarach znaleźć ruch w polu siły (niecentralnej) o potencjale

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

w którym $\mathbf{a}$ jest stałym wektorem, cząstki o masie m nadlatującej z nieskończoności, gdzie ma ona prędkość $\mathbf{v}_\infty$ antyrównoległą do wektora $\mathbf{a}$ i parametr zderzenia równy b . Znaleźć także różniczkowy przekrój czynny rozpraszania takich cząstek (tzn. nadlatujących z kierunku, w którym wskazuje wektor $\mathbf{a}$) pod małymi kątami w przybliżeniu dużych energii i/lub dużych parametrów zderzenia. Czy ten przekrój czynny można otrzymać z ogólnej metody (zadanie 11.7) znajdowania przekroju czynnego rozpraszania pod małymi kątami? Otrzymać także w tym samym reżimie przekrój czynny rozpraszania cząstek o masie m na potencjale

$$V(r, \theta) = \frac{a \cos^2 \theta}{r^2},$$

przy padaniu z kierunku $\theta = 0$ i porównać z wynikiem otrzymywanym z ogólnej metody z zadania 11.7.

Zadanie 13.19^R

Wykorzystując metodę Hamiltona-Jacobiego znaleźć przekrój czynny spadku na centrum siły o potencjale

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

w zależności od energii nadlatujących cząstek o masie m i od kąta α jaki ich prędkość w nieskończoności tworzy z kierunkiem wyznaczanym przez stały wektor $\mathbf{a}$.

Zadanie 13.20^R

Pole magnetyczne zadane przez potencjał wektorowy

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} r B(z) \mathbf{e}_\varphi,$$

w którym $\mathbf{e}_\varphi$ jest jednym z wersorów związanych z układem współrzędnych walcowych, rozciąga się w obszarze $-a \leq z \leq a$ (tzn. funkcja $B(z)$ znika poza tym przedziałem). Posługując się metodą Hamiltona-Jacobiego znaleźć punkt na osi z w którym zogniskowane zostaną elektrony rozpoczynające bieg z punktu na osi z o współrzędnej $z_0 \ll -a$ i pozostające przez cały czas blisko osi z .

Zadanie 13.21^R

Zbadać przyosiowe ogniskowanie cząstek takie jak w zadaniu 13.20 przez pole magnetyczne o potencjale wektorowym (zadany w całej przestrzeni)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} r B(z) \mathbf{e}_\varphi,$$

jeśli

$$B(z) = \frac{B_0}{1 + \kappa^2 z^2}.$$

Zadanie 13.22^R

Lagrangian układu o trzech stopniach swobody ma postać:

$$L = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} V_{ij} x_i x_j,$$

gdzie

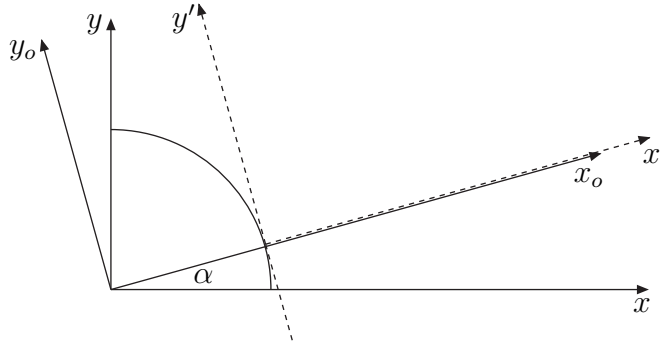
$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązać równania Eulera-Lagrange'a i znaleźć ruch tego układu. Przejść do sformułowania kanonicznego, znaleźć wszystkie więzy i skonstruować hamiltonian zachowujący więzy w trakcie ewolucji. Pokazać, że ruch otrzymany jako rozwiązanie równań kanonicznych jest tym samym, co otrzymany jako rozwiązanie równań Eulera-Lagrange'a.

Zadanie 13.23^R

Udowodnić, że nawias Poissona $\{F, G\}_{\text{PB}}$ Poissona wielkości F i G obliczony w zmiennych (q_i, p_i) jest taki sam, jak obliczony w zmiennych (Q_i, P_i) powiązanych z wyjściowymi przekształceniem kanonicznym.

CZĘŚĆ (CHYBA PRAWIE WSZYSTKO) TEGO, CO BYŁO NA ĆWICZENIACH



Rysunek 23: Trzy układy współrzędnych.

1. KINEMATYKA

Zadanie 1.3

Dany jest układ współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie oraz okrąg o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$. Dana jest też prosta p styczna do okręgu, która toczy się po nim bez poślizgu. (Bez poślizgu to znaczy, że jeśli w dwu różnych chwilach czasu zaznaczymy i na okręgu i na prostej punkty styczności, to odległość między tymi punktami na prostej będzie równa długości łuku pomiędzy punktami styczności na okręgu). Biegunowy kąt α wyznaczający punkt styczności prostej p z okręgiem zmienia się z czasem: $\alpha = \alpha(t)$. W chwili $t = 0$ prosta ta przechodzi przez punkt $(R, 0)$, tj. $\alpha(0) = 0$. Punkt A prostej ma w chwili $t = 0$ współrzędne (R, y_A) . Znaleźć jego współrzędne w dowolnej chwili czasu.

Rozwiązanie:

Wyrażmy najpierw współrzędne kartezjańskie (x, y) dowolnego punktu na płaszczyźnie xy przez jego współrzędne (x_0, y_0) w układzie, który ma z nieruchomym układem wspólny początek i jest obrócony o kąt α przeciwnie do wskazówek zegara:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha, \\ y &= x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Poprawność tego wzoru nietrudno sprawdzić: gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ powinno być $x_0 = y$ i $y_0 = -x$. Następnie wyrażamy współrzędne (x_0, y_0) przez współrzędne (x', y') układu przesuniętego o R wzdłuż osi x_0

$$\begin{aligned} x &= (x' + R) \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= (x' + R) \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

(x', y') jest układem o początku O' leżącym na okręgu o promieniu R . Prosta p w momencie, gdy jest do tego okręgu styczna w O' , pokrywa się z osią y' . Jeśli prosta ta z położenia zajmowanego w $t = 0$ przetoczyła się bez poślizgu stale pozostając styczną do okręgu w O' , to punkt A przesunął się w kierunku punktu styczności prostej z okręgiem (lub od niego oddalił - zależnie od tego, czy $y_A > 0$, czy $y_A < 0$ i od tego, w którą stronę po okręgu przetacza się prosta p) o odległość $R\alpha$. Przyjmując, że kąt α rośnie przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, zauważamy, że w układzie (x', y') punkt A ma po

przetoczeniu się współrzędne $(0, y_A - R\alpha)$. Stąd, w wyjściowym układzie kartezjańskim xy jego współrzędnymi będą

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos \alpha(t) - (y_A - R\alpha(t)) \sin \alpha(t), \\y(t) &= R \sin \alpha(t) + (y_A - R\alpha(t)) \cos \alpha(t).\end{aligned}$$

Zależność $\alpha(t)$ może być, oczywiście, dowolna.

Zadanie 1.4

Wyprowadzić wzory na składowe wektorów prędkości i przyspieszenia we współrzędnych biegunowych (r, φ) na płaszczyźnie i we współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozwiązanie:

Ze współrzędnymi kartezjańskimi x, y i z stowarzyszone są ustalone jednostkowe wektory (wersory) $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$. Wektory położenia $\mathbf{r}$, prędkości $\mathbf{v}$ i przyspieszenia $\mathbf{a}$ zapisane jako kombinacje liniowe tych wersorów wyrażają się oczywistymi wzorami

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_x \dot{x} + \mathbf{e}_y \dot{y} + \mathbf{e}_z \dot{z},$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x \ddot{x} + \mathbf{e}_y \ddot{y} + \mathbf{e}_z \ddot{z}.$$

Układ współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie zadają wzory

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Ze współrzędnymi tymi stowarzyszone są wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$, które zmieniają się od punktu do punktu. (Należałoby więc pisać $\mathbf{e}_r(x, y)$ i $\mathbf{e}_\varphi(x, y)$ lub $\mathbf{e}_r(\varphi)$ i $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ - w istocie wersory zależą tylko od kąta φ .) Sporządzając odpowiedni rysunek (i rozpatrując przypadki $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$) łatwo jest zobaczyć, że¹³

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi.$$

Wzory te łatwo odwrócić i otrzymać

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi,$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi.$$

Oczywiście każdy wektor można zapisać albo w bazie wersorów kartezjańskich $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$, albo w bazie wersorów $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ w odpowiednim punkcie.¹⁴ Piszemy zatem (wprowadzając oczywiste skrótowe oznaczenia)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{e}_x r \cos \varphi + \mathbf{e}_y r \sin \varphi \\ &= (\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) r c_\varphi + (\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) r s_\varphi = \mathbf{e}_r r, \end{aligned}$$

¹³Dalej zobaczymy, że wzory takie można zawsze otrzymać bezpośrednio ze wzorów definiujących krzywoliniowe (tu biegunowe) współrzędne.

¹⁴Na pozór wersory $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ zdefiniowane w dowolnym punkcie stanowią bazę, w której można rozłożyć dowolny wektor, np. wektor prędkości odpowiadający innemu położeniu. Jednak przy bardziej geometrycznym spojrzeniu okazuje się, że gdyby zajmować się ruchem na dowolnej tzw. rozmaitości, to z każdym punktem takiej rozmaitości stowarzyszona jest naprawdę inna przestrzeń wektorowa. I to elementami przestrzeni wektorowej właściwej dla danego punktu rozmaitości - tzw. przestrzeni stycznej do rozmaitości w tym punkcie - są wektory prędkości i przyspieszenia zdefiniowane w danym punkcie rozmaitości. Wektory te, można zatem rozkładać tylko na bazowe wektory przestrzeni stycznej właściwej dla danego punktu rozmaitości przestrzeni stycznej.

jak też można się było spodziewać. Analogicznie

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{e}_x (\dot{r}c_\varphi - r\dot{\varphi}s_\varphi) + \mathbf{e}_y (\dot{r}s_\varphi + r\dot{\varphi}c_\varphi) \\ &= (\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (\dot{r}c_\varphi - r\dot{\varphi}s_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (\dot{r}s_\varphi + r\dot{\varphi}c_\varphi) = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\varphi r\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Składowa r -owa prędkości jest oczywista - gdyby ruch odbywał się wzdłuż promienia tylko, jego prędkość w tym kierunku byłaby w oczywisty sposób równa $\dot{r}$. Podobnie oczywista jest składowa φ -fowa: $r\dot{\varphi}$ jest po prostu prędkością liniową związaną z ruchem po okręgu o promieniu r . Wreszcie

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{e}_x (\ddot{r}c_\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}s_\varphi - r\ddot{\varphi}s_\varphi - r\dot{\varphi}^2c_\varphi) \\ &\quad + \mathbf{e}_y (\ddot{r}s_\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}c_\varphi + r\ddot{\varphi}c_\varphi - r\dot{\varphi}^2s_\varphi) \\ &= (\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (\ddot{r}c_\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}s_\varphi - r\ddot{\varphi}s_\varphi - r\dot{\varphi}^2c_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (\ddot{r}s_\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}c_\varphi + r\ddot{\varphi}c_\varphi - r\dot{\varphi}^2s_\varphi) = \mathbf{e}_r (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \mathbf{e}_\varphi (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}).\end{aligned}$$

Znów większość wyrazów występujących w końcowym wzorze jest oczywista: $\ddot{r}$ jest przyspieszeniem ruchu wzdłuż promienia, $-r\dot{\varphi}^2$ jest przyspieszeniem dośrodkowym w ruchu po okręgu o promieniu r , a $r\ddot{\varphi}$ jest liniowym przyspieszeniem związanym z przyspieszaniem ruchu po okręgu o promieniu r . Jedynie wyrazu $2\dot{r}\dot{\varphi}$ nie można łatwo otrzymać na podstawie rozpatrywania takich szczególnych postaci ruchu.

Zauważmy też, że powyższe wzory można by było otrzymać nieco inaczej, gdyby najpierw znaleźć pochodne po czasie wektorów $\mathbf{e}_r(\varphi)$ i $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$. To zaś jest łatwe (wektory $\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{e}_y$ jako stałe, nie podlegają różniczkowaniu):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r &= \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_x c_\varphi + \mathbf{e}_y s_\varphi) = -\dot{\varphi}s_\varphi(\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) \\ &\quad + \dot{\varphi}c_\varphi(\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) = \mathbf{e}_\varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi &= \frac{d}{dt}(-\mathbf{e}_x s_\varphi + \mathbf{e}_y c_\varphi) = -\dot{\varphi}c_\varphi(\mathbf{e}_r c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) \\ &\quad - \dot{\varphi}s_\varphi(\mathbf{e}_r s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) = -\mathbf{e}_r \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Można (i właściwie należy) uogólnić te wzory tak, by nie występowała w nich zależność od czasu; należy po prostu pytać, jak zmieniają się wektory przy przejściu od punktu o współrzędnych (r, φ) do sąsiedniego o współrzędnych $(r + dr, \varphi + d\varphi)$. Zmiany te są dane przez

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Mając te wzory można już prędkość i przyspieszenie znaleźć “na piechotę”:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r r) = \mathbf{e}_r \dot{r} + \dot{\mathbf{e}}_r r = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\varphi r\dot{\varphi},$$

i podobnie

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi}) = \mathbf{e}_r \ddot{r} + \mathbf{e}_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} + \mathbf{e}_\varphi (\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) - \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi}^2 \\ &= \mathbf{e}_r (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \mathbf{e}_\varphi (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}),\end{aligned}$$

tak jak i poprzednim sposobem.

W przypadku układu współrzędnych sferycznych zadnych wzorami

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \equiv r s_\theta c_\varphi, \\ x &= r \sin \theta \sin \varphi \equiv r s_\theta s_\varphi, \\ x &= r \cos \theta \equiv r c_\theta,\end{aligned}$$

trudniej jest graficznie zobaczyć, że

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_y s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_z c_\theta, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x c_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_y c_\theta s_\varphi - \mathbf{e}_z s_\theta, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x s_\varphi + \mathbf{e}_y c_\varphi.\end{aligned}$$

Wzory te można jednak natychmiast dostać wspomnianym już sposobem, który przedstawimy niżej. Aby je odwrócić, tj. wyrazić $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ przez wersory $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, mnożymy pierwsze z wypisanych wyżej równań przez $s_\theta (c_\theta)$, drugie przez $c_\theta (s_\theta)$, dodajemy (odejmujemy) je do (od) siebie i zestawiamy z trzecim, otrzymując układ (ostatnie z poprzednich równań teraz napisane zostało jako środkowe)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r s_\theta + \mathbf{e}_\theta c_\theta &= \mathbf{e}_x c_\varphi + \mathbf{e}_y s_\varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_x s_\varphi + \mathbf{e}_y c_\varphi, \\ \mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta &= \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

który już łatwo rozwiązać ze względu na $\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{e}_y$ ($\mathbf{e}_z$ już jest). Ostatecznie

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi, \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta.\end{aligned}$$

Można teraz standardowym sposobem znaleźć pochodne wersorów $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ po kątach θ i φ (jest mniej więcej jasne, że ich pochodne po r muszą zniknąć). Obliczymy, żeby było sprawniej, pochodne zupełne po czasie (wektory mnożące $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ i $\dot{\varphi}$ będą wtedy pochodnymi różniczkowanych wersorów po współrzędnych r , θ i φ):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x (\dot{\theta} c_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} s_\theta s_\varphi) + \mathbf{e}_y (\dot{\theta} c_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} s_\theta c_\varphi) + \mathbf{e}_z (-\dot{\theta} s_\theta) \\ &= (\mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (\dot{\theta} c_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} s_\theta s_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (\dot{\theta} c_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} s_\theta c_\varphi) \\ &\quad + (\mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta) (-\dot{\theta} s_\theta) \\ &= \mathbf{e}_\theta \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi \dot{\varphi} s_\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x \left(-\dot{\theta} s_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} c_\theta s_\varphi \right) + \mathbf{e}_y \left(-\dot{\theta} s_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} c_\theta c_\varphi \right) + \mathbf{e}_z \left(-\dot{\theta} c_\theta \right) \\
&= (\mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) \left(-\dot{\theta} s_\theta c_\varphi - \dot{\varphi} c_\theta s_\varphi \right) \\
&\quad + (\mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) \left(-\dot{\theta} s_\theta s_\varphi + \dot{\varphi} c_\theta c_\varphi \right) \\
&\quad + (\mathbf{e}_r c_\theta - \mathbf{e}_\theta s_\theta) \left(-\dot{\theta} c_\theta \right) \\
&= -\mathbf{e}_r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi \dot{\varphi} c_\theta,
\end{aligned}$$

i wreszcie

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_x (-\dot{\varphi} c_\varphi) + \mathbf{e}_y (-\dot{\varphi} s_\varphi) \\
&= (\mathbf{e}_r s_\theta c_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta c_\varphi - \mathbf{e}_\varphi s_\varphi) (-\dot{\varphi} c_\varphi) \\
&\quad + (\mathbf{e}_r s_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\theta c_\theta s_\varphi + \mathbf{e}_\varphi c_\varphi) (-\dot{\varphi} s_\varphi) \\
&= -\mathbf{e}_r \dot{\varphi} s_\theta - \mathbf{e}_\theta \dot{\varphi} c_\theta.
\end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio odczytujemy pochodne wektorów $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ i $\mathbf{e}_\varphi$ po kątach

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi s_\theta, \\
\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\varphi c_\theta, \\
\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{0}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{e}_r s_\theta - \mathbf{e}_\theta c_\theta.
\end{aligned}$$

Można teraz łatwo napisać wzory na prędkość i przyspieszenie:¹⁵

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{e}_r r) = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi} s_\theta,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r \dot{\theta} + \mathbf{e}_\varphi r \dot{\varphi} s_\theta) = \mathbf{e}_r \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 s_\theta^2 \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\theta \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 s_\theta c_\theta \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\varphi \left(r \ddot{\varphi} s_\theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} s_\theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} c_\theta \right).
\end{aligned}$$

Znów część wyrazów daje się prosto zinterpretować: człon $-r \dot{\theta}^2$ w składowej a_r jest oczywiście przyspieszeniem dośrodkowym ruchu po wielkim kole (po południku), a człon $r \ddot{\theta}$ w składowej a_θ jest przyspieszeniem liniowym takiego ruchu; ruch po równoleżniku

¹⁵W popularnym u nas (przynajmniej na naszym warszawskim Wydziale Fizyki) podręczniku mechaniki autorstwa G. Białkowskiego wzory na składowe przyspieszenia (wzór 2.12 s. 44) są podane z błędami: w składowej a_r brak czynnika s_θ^2 , a w składowej a_θ opuszczony został ostatni człon z $\dot{\varphi}^2$.

daje też przyspieszenie dośrodkowe, ale promień równoleżnika zależy od kąta θ i jest równy rs_θ - przyspieszenie to jest jednak skierowane do środka leżącego w płaszczyźnie równoleżnikowej (a nie ku początkowi układu) i wobec tego rozkłada się z czynnikiem s_θ na kierunek $\mathbf{e}_r$ i z czynnikiem c_θ na kierunek $\mathbf{e}_\theta$ - co wyjaśnia pochodzenie ostatnich członów składowych a_r i a_θ ; wreszcie, pierwszy człon składowej a_φ jest oczywistym przyspieszeniem liniowym ruchu po równoleżniku.

Można to trochę uogólnić i znacznie uprościć znajdowanie składowych prędkości w układzie krzywoliniowym. Niech ξ^1, ξ^2, ξ^3 będą trzema współrzędnymi krzywoliniowego układu. Oznacza to, że dane są wzory

$$\begin{aligned}x &= x(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \\y &= y(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \\z &= z(\xi^1, \xi^2, \xi^3).\end{aligned}$$

W naturalny sposób z układem takim stowarzyszone są trzy wektory $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, dane wzorem¹⁶

$$\mathbf{i}_j(\xi) = \mathbf{e}_a \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j},$$

gdzie $x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$, a $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_z$, są trzema kartezjańskimi wektorami tworzącymi układ ortonormalny: $(\mathbf{e}_a | \mathbf{e}_b) \equiv \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab}$. Wektory $\mathbf{i}_j$ są, jak łatwo zrozumieć, styczne do krzywych wytyczanych w trójwymiarowej przestrzeni, gdy zmienia się tylko parametr ξ^j przy ustalonych pozostałych dwu pozostałych ξ . W ogólnym przypadku wektory te nie tworzą układu ortonormalnego: macierz ich iloczynów skalarnych

$$(\mathbf{i}_j | \mathbf{i}_k) = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^b}{\partial \xi^k} (\mathbf{e}_a | \mathbf{e}_b) = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k},$$

definiuje tensor metryczny $g_{jk}(\xi)$:

$$g_{jk}(\xi) \equiv (\mathbf{i}_j | \mathbf{i}_k) = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^a}{\partial \xi^k}.$$

Tensor ten jest w ogólnym przypadku niediagonalny. W trójwymiarowej przestrzeni istnieje jednak 11 układów współrzędnych krzywoliniowych (wśród nich cylindryczny, sferyczny, paraboliczny, etc.), wyróżniających się tym, że stowarzyszone z nimi wektory $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ są (w każdym punkcie) wzajemnie prostopadłe. Tensor metryczny ma więc w tych układach postać

$$g_{jk}(\xi) = h_j^2(\xi) \delta_{jk}.$$

Współczynniki h_i nazywają się współczynnikami Lamé. W takich układach krzywoliniowych można stworzyć łatwo stowarzyszone z nim wektory $\mathbf{e}_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$ stanowiące

¹⁶Jak zwykle obowiązuje tu konwencja sumacyjna wujka Alpercika i po wskaźnikach powtarzających się na dwu różnych poziomach (na górze i na dole) jest zawsze domyślne sumowanie.

w każdym punkcie układ ortonormalny (bazę ortonormalną). Wystarczy tylko podzielić dane w sposób naturalny wektory $\mathbf{i}_j$ przez ich długości h_j :

$$\mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{i}_j}{h_j}.$$

Dowolny wektor $\mathbf{V}$ (“zaczepiony” w danym punkcie, tzn. należący do przestrzeni stycznej w tym punkcie) można rozłożyć albo w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{i}_j$, albo w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}_j V_{(\mathbf{i}_k)}^j = \mathbf{e}_j V_{(\mathbf{e}_k)}^j \equiv \mathbf{e}_j \bar{V}^j.$$

(Dwie pierwsze postacie wektora $\mathbf{V}$ są tu zapisane w notacji z mojego słynnego skryptu do algebry; ostatnia postać jest wzięta z Gravitation and Cosmology S. Weinberga.) Jasne jest więc, że $\bar{V}^j \equiv V_{(\mathbf{e}_k)}^j = h_j V_{(\mathbf{i}_k)}^j$. W przypadku układu sferycznego $\xi^1 = r$, $\xi^2 = \theta$, $\xi^3 = \varphi$, składowymi wektorów $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ w bazie wersorów kartezjańskich ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) są

$$\begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi \\ s_\theta s_\varphi \\ c_\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r c_\theta c_\varphi \\ r c_\theta s_\varphi \\ -r s_\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -r s_\theta s_\varphi \\ r s_\theta c_\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

skąd $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r s_\theta$ i wektory $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, są dane przez unormowanie tych wypisanych wyżej (tj. podzielenie każdego z nich przez odpowiedni czynnik h), czyli wzorami, które zostały wypisane już wcześniej “spod dużego palucha” (a w istocie wykorzystując właśnie podany tu sposób).

Składowe wektora prędkości w bazie ortonormalnej¹⁷ tworzonej przez wektory $\mathbf{e}_j$ stwarzające z jednym z owych 11 układów krzywoliniowych można teraz otrzymać bez żadnych rachunków:¹⁸

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_a \dot{x}^a = \mathbf{e}_a \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{d\xi^j}{dt} = \mathbf{i}_j \frac{d\xi^j}{dt} = \sum_j \mathbf{e}_j \left(h_j \frac{d\xi^j}{dt} \right).$$

Tak więc w układzie sferycznym $v_r = h_r \dot{r} = \dot{r}$, $v_\theta = h_\theta \dot{\theta} = r \dot{\theta}$ i $v_\varphi = h_\varphi \dot{\varphi} = r s_\theta \dot{\varphi}$. Jak widać, nie wymaga to odwracania wzorów wiążących wersory $\mathbf{e}_j$ wersorami kartezjańskimi $\mathbf{e}_a$.

Zasadne jest pytanie, czy ta sama metoda upraszcza znalezienie składowych krzywoliniowych wektora przyspieszenia. Niestety nie za bardzo. Zobaczmy:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_a \ddot{x}^a = \mathbf{e}_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{d\xi^j}{dt} \right) = \mathbf{e}_a \left(\frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^j \partial \xi^k} \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k + \frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \ddot{\xi}^j \right).$$

¹⁷Przypomnijmy jednak, że to jest tylko takie dążenie do wygody oraz siła przyzwyczajenia, które powodują, że w problemach fizycznych jakie rozpatruje się w mechanice korzysta się na ogół z baz ortonormalnych - w istocie bazą może być dowolny układ liniowo niezależnych wektorów rozpinających całą przestrzeń wektorową. Dlatego na zaawansowanym poziomie, np. w Ogólnej teorii względności, jako bazy używa się bardziej “naturalnych” wektorów $\mathbf{i}_j$.

¹⁸Po ostatniej równości piszemy tu jawnie znak sumy, bo wprowadzenie czynników Lamé zakłóca konwencję sumacyjną Einsteina - wskaźnik j po którym biegnie suma powtarza się trzykrotnie.

Z drugiego członu w nawiasie daje się tak jak poprzednio wyciągnąć przed nawias macierz $\partial x^a / \partial \xi^j$, która w połączeniu z wektorem $\mathbf{e}_a$ da wektor $\mathbf{i}_j$, ale z pierwszego członu nie. Wszystko co można zrobić, to napisać

$$\mathbf{a} = \sum_j \mathbf{e}_j h_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^k + \ddot{\xi}^j \right).$$

Macierz $\partial \xi^j / \partial x^a$ stojąca w pierwszym członie jest odwrotna do macierzy $D_j^a \equiv \partial x^a / \partial \xi^j$:

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \xi^j} = \delta_a^b, \quad \frac{\partial x^a}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^a} = \delta_i^j.$$

Otrzymany wzór na $\bar{a}^j$ (używając notacji Weinberga) zgadza się z tym, co już wiemy w przypadku układu sferycznego: kawałki z drugą pochodną ξ^j mają tam postać $h_j \ddot{\xi}^j$ (bez sumowania po j). Widać też, że jeśli kartezjańskie współrzędne x^a położenia są nieliniowymi funkcjami współrzędnych ξ^j , we wzorach na $\bar{a}^j$ muszą wystąpić człony z iloczynami pierwszych pochodnych współrzędnych ξ^j . Jawne ich otrzymanie jest jednak pracochłonne. Po pierwsze trzeba odwrócić macierz D_j^a . To jeszcze daje się w miarę łatwo zrobić. Wprawdzie jest to macierz zmiany bazy łącząca bazę ortonormalną z bazą nieortonormalną, $\mathbf{i}_j = \mathbf{e}_a D_j^a$ ($\mathbf{i}_j = \mathbf{e}_a [R_{(\mathbf{e}_a \leftarrow \mathbf{i}_j)}]_j^a$ w notacji z mojego skryptu do algebry) ale, w przypadku owych 11 specjalnych układów współrzędnych, baza $\mathbf{i}_j$ wiąże się prosto (bo tylko przez współczynniki Lamé) z bazą ortonormalną $\mathbf{e}_j$. Zatem (sumowanie jest tu po a , ale nie po j !)

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_a \left(\frac{\partial x^a}{\partial \xi^j} \frac{1}{h_j} \right) \equiv \mathbf{e}_a (D_j^a h_j^{-1}),$$

a stojąca tu w nawiasie macierz zmiany bazy R (lub $[R_{(\mathbf{e}_a \leftarrow \mathbf{e}_j)}]_j^a$ w mojej algebraicznej notacji) jako łącząca ze sobą dwie bazy ortonormalne musi być macierzą ortogonalną i jej odwrotność R^{-1} jest dana po prostu przez transpozycję: $R^{-1} = R^T$. Zatem

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{e}_j [R^T]_a^j = \mathbf{i}_j (h_j^{-1} [R^T]_a^j).$$

Stojąca tu w nawiasach okrągłych macierz jest właśnie szukaną macierzą $[D^{-1}]_a^i$ odwrotną do D_i^a .

W przypadku układu sferycznego macierz R jest macierzą stworzoną z postawionych “na sztorc” składowych (w bazie wersorów kartezjańskich) wektorów $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ i $\mathbf{e}_\varphi$. Biorąc jej transpozycję i następnie przemnażając j -ty wiersz macierzy R^T przez h_j^{-1} otrzymujemy

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi & s_\theta s_\varphi & c_\theta \\ c_\theta c_\varphi / r & c_\theta s_\varphi / r & -s_\theta / r \\ -s_\varphi / (r s_\theta) & c_\varphi / (r s_\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak łatwo sprawdzić, jest to rzeczywiście macierz odwrotna do

$$D = \begin{pmatrix} s_\theta c_\varphi & r c_\theta c_\varphi & -r s_\theta s_\varphi \\ s_\theta s_\varphi & r c_\theta s_\varphi & r s_\theta c_\varphi \\ c_\theta & -r s_\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Można teraz spróbować otrzymać składowe przyspieszenia w układzie sferycznym.

$$a_r = h_r \left(\ddot{r} + s_\theta c_\varphi \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^l + s_\theta s_\varphi \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^l + c_\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^l \right).$$

Ponieważ $h_r = 1$ daje to (od razu uwzględniamy, że $x_{rr} = y_{rr} = z_{rr} = 0$)

$$\begin{aligned} a_r = \ddot{r} + s_\theta c_\varphi \left(2x_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + 2x_{r\varphi} \dot{r} \dot{\varphi} + 2x_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + x_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + x_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \right) \\ + s_\theta c_\varphi \left(2y_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + 2y_{r\varphi} \dot{r} \dot{\varphi} + 2y_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + y_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + y_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \right) \\ + c_\theta \left(2z_{r\theta} \dot{r} \dot{\theta} + 2z_{r\varphi} \dot{r} \dot{\varphi} + 2z_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + z_{\theta\theta} \dot{\theta}^2 + z_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2 \right). \end{aligned}$$

Jak widać nie jest to bardzo przyjemne... Ale cierpliwie różniczkując możemy dojść do celu:

$$\begin{aligned} a_r = \ddot{r} + s_\theta c_\varphi \left(2c_\theta c_\varphi \dot{r} \dot{\theta} - 2s_\theta s_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} - 2rc_\theta s_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - rs_\theta c_\varphi \dot{\theta}^2 - rs_\theta c_\varphi \dot{\varphi}^2 \right) \\ + s_\theta c_\varphi \left(2c_\theta s_\varphi \dot{r} \dot{\theta} + 2s_\theta c_\varphi \dot{r} \dot{\varphi} + 2rc_\theta c_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - rs_\theta s_\varphi \dot{\theta}^2 - rs_\theta s_\varphi \dot{\varphi}^2 \right) \\ + c_\theta \left(-2s_\theta \dot{r} \dot{\theta} - rc_\theta \dot{\theta}^2 \right), \end{aligned}$$

i po poskładaniu wszystkiego do kupy otrzymać

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - rs_\theta^2 \dot{\varphi}^2.$$

Otrzymanie a_θ i a_φ tą metodą pozostawimy już czytelnikowi.

Najszybszy jednak sposób otrzymania przyspieszeń w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych polega na odwołaniu się do równań Lagrange'a II-go rodzaju: ponieważ otrzymanie wzorów na prędkości jest, jak wynika z przeprowadzonych wyżej rozważań, bardzo proste, wystarczy wyrazić przez nie energię kinetyczną $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ i napisać lagrangian cząstki swobodnej $L = T$; wyprowadzone z niego równania Eulera - Lagrange'a dadzą natychmiast szukane wzory na przyspieszenia. Np. w układzie sferycznym

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right),$$

i równania Eulera - Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= m(r\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta), \\ m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) &= mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ m(r^2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r^2\dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ są to równania ruchu cząstki swobodnej, $m\mathbf{a} = 0$, składowe przyspieszenia muszą być proporcjonalne do wyrażeń, które się dostaje po przeniesieniu wszystkich członów na jedną stronę i podzieleniu przez m . W ustaleniu czynników proporcjonalności można się posłużyć analizą wymiarową (przyspieszenia muszą mieć wymiar $[L][T]^{-2}$ i pewnym wyczuciem (fizycznym zdrowym rozsądkiem). Drugie z wypisanych wyżej równań daje a_θ po podzieleniu przez czynnik r (analiza wymiarowa); trzecie zaś po podzieleniu przez $r \sin \theta$ (człon z $\ddot{\varphi}$ musi dawać związane ze zmianą $\dot{\varphi}$ przyspieszenie styczne do równoleżnika o promieniu $r \sin \theta$).

Zadanie 1.9

Wiedząc, że podczas płaskiego ruchu cząstki kąt pomiędzy kierunkiem jej wektora wodzącego $\mathbf{r}$ i wektorem jej prędkości $\mathbf{v}$ jest stały (i równy α) znaleźć we współrzędnych biegunowych:

- a) wzór na tor cząstki,
- b) długość toru w funkcji położenia cząstki.

Przyjąć jako warunki początkowe $\varphi(0) = 0$ i $r(0) = r_0$. Zależność szybkości $|\mathbf{v}(t)|$ od czasu może być dowolna.

Rozwiązanie:

Jeśli $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ jest wektorem wodzącym (czyli wektorem położenia), a $\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$, wektorem prędkości, to cosinus kąta α pomiędzy nimi jest równy

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}}.$$

Stąd (pamiętając, że $\dot{r}/\dot{\varphi} = dr/d\varphi$) otrzymujemy natychmiast równanie różniczkowe wyznaczające tor w postaci $r = r(\varphi)$:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Warto tu się zastanowić nad znakiem (po drodze podnosiliśmy coś do kwadratu i wyciągali pierwiastek - znak mógł się zgubić). Jest on jednak poprawny: jeśli $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, to wektor prędkości jest tak skierowany, że odległość r powinna rosnąć ze wzrostem φ i rzeczywiście kotangens jest wtedy dodatni;¹⁹ gdy $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, to r rośnie ale wtedy, gdy φ maleje (kąt φ jest liczony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) i rzeczywiście ctg jest wtedy ujemny. Z kolei, gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, to r maleje, gdy kąt rośnie i ctg jest ujemny, tak jak powinien. Rozwiązaniem uzyskanego równania różniczkowego jest spirala

$$r(\varphi) = r(\varphi_0) \exp \{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha\}.$$

Gdy chodzi o długość toru, to widać (patrz przypis niżej) że wystarczy rozpatrzyć tylko przypadki $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, kiedy to tor jest spiralą rozwijającą się i jego długość rośnie ze wzrostem φ nieograniczenie, oraz przypadek $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, gdy tor jest zacieśniającą się spiralą i powinien mieć skończoną długość nawet wtedy, gdy $\varphi \rightarrow \infty$. Przyjmując więc, że $\dot{\varphi} > 0$ obliczmy długość toru $s(t)$ jako funkcję czasu przechodząc po drodze do $s(\varphi(t))$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t dt' |\mathbf{v}(t')| = \int_0^t dt' \sqrt{v_r^2(t') + v_\varphi^2(t')} = \int_0^t dt' \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} \\ &= \int_0^t dt' \dot{\varphi} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right]^{1/2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right]^{1/2} \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi [r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + r^2]^{1/2} = \frac{1}{\sin \alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi r(\varphi), \end{aligned}$$

¹⁹A co, gdy $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$? Powinno być tak samo, tzn. odległość r też powinna rosnąć, bo na rysunku sytuacja wygląda tak samo, ale $\operatorname{ctg} \alpha$ jest w tm zakresie kątów ujemny... No tak, ale wtedy ze wzrostem r kąt φ nie rośnie, tylko maleje więc równanie znów jest poprawne!

gdzie skorzystaliśmy ze związku $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ i wzoru na $dr/d\varphi$. Całkując otrzymujemy

$$s(t) = \frac{r(\varphi_0)}{\sin \alpha} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha} e^{(\varphi - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi(t)} = \frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha} [e^{(\varphi(t) - \varphi_0) \operatorname{ctg} \alpha} - 1],$$

Wzór można uprościć przyjmując, że $\varphi_0 = 0$. $\operatorname{ctg} \alpha$ jest dodatni, gdy $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i długość toru jest wtedy nieograniczona, gdy kąt φ rośnie nieograniczenie. Jeśli zaś $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ (czyli, gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), długość toru jest skończona, gdy $\varphi \rightarrow \infty$:

$$s(\infty) = -\frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha},$$

(oczywiście, gdy $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ to $\cos \alpha < 0$ i długość toru jest dodatnia). Przypadek $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jest szczególny: odległość r pozostaje stała, równa $r(\varphi_0)$. Długość toru jest oczywiście nieskończona jeśli φ rośnie nieograniczenie, ale jeśli rozpatrzeć długość toru od φ_0 do $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, to w granicy $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ uzyskany wzór daje oczywiście $s = 2\pi r(\varphi_0)$:

$$s(\varphi = 2\pi) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{r(\varphi_0)}{\cos \alpha} \left[1 + 2\pi \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2}(2\pi \operatorname{ctg} \alpha)^2 + \dots - 1 \right] = 2\pi r(\varphi_0).$$

Wreszcie przypadki $\alpha = 0$ lub π są szczególne w tym znaczeniu, że wektor prędkości jest skierowany wzdłuż wektora wodzącego i kąt φ pozostaje stały.²⁰ Nie można więc w tym przypadku napisać równania toru w postaci $r = r(\varphi)$. Możliwy jest tylko parametryczny opis toru (naturalnym parametrem jest tu czas) $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t) = \operatorname{const} = \varphi_0$.

²⁰Dobrze jest przepisać uzyskane równanie różniczkowe w (zalecanej przeze mnie na Matmie II) postaci $dr \operatorname{tg} \alpha = r d\varphi$. Wtedy widać, że gdy $\alpha = 0$ lub π , zmiana r nie pociąga za sobą zmiany kąta φ .

Zadanie 2.5

Na ciało o masie m i prędkości początkowej $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ działa tylko siła oporu

$$\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa |\mathbf{v}|^\alpha \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \kappa, \alpha > 0.$$

Zbadać, jak czas trwania takiego ruchu i jego zasięg zależą od wykładnika α .

Rozwiązanie:

Ponieważ na ciało działa tylko jedna siła, która ma zawsze ten sam kierunek, co chwilowa prędkość ciała (i przeciwny do niej zwrot), dobrze jest wybrać oś x w kierunku $\mathbf{v}_0$. Problem staje się wtedy jednowymiarowy i redukuje się do rozwiązywania równania

$$m\dot{v}(t) = -\kappa v^\alpha(t), \quad \text{czyli} \quad \dot{v}(t) = -\frac{\kappa}{m} v^\alpha(t),$$

z warunkami początkowymi $v(0) = v_0$ ($v_0 > 0$) oraz, bez straty ogólności, $x(0) = 0$. Rozdzielenie zmiennych prowadzi do całki

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^\alpha} = -\frac{\kappa}{m} t,$$

która, jako całka z funkcji potęgowej, jeśli $\alpha \neq 1$, daje

$$\frac{1}{1-\alpha} [v^{1-\alpha}(t) - v_0^{1-\alpha}] = -\frac{\kappa}{m} t,$$

czyli, po “odkręceniu”,

$$v(t) = v_0 \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Wynik dla $\alpha = 1$, która to wartość α jest, jak widać, wyróżniona (uzasadnione jest więc nazwanie jej wartością krytyczną), można dostać albo obliczając bezpośrednio całkę z $\alpha = 1$, albo, co jest bardziej kształcące, dokonując w powyższym wzorze przejścia granicznego $\alpha \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \ln \left[1 + (\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right] \right\} \\ &= v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \exp \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \left[(\alpha - 1) \frac{\kappa}{m} t - \frac{1}{2} (\alpha - 1)^2 \frac{\kappa^2}{m^2} t^2 + \dots \right] \right\} = v_0 e^{-(\kappa/m)t}, \end{aligned}$$

(Pod logarytmem można już było spokojnie położyć $v_0^{\alpha-1} = 1$).

Z otrzymanych wzorów tych widać, że jeśli $\alpha < 1$, to czas trwania ruchu jest skończony: ciało zatrzymuje się po czasie

$$t_{\text{max}} = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} > 0.$$

Zasięg ruchu, jest w takim przypadku, rzecz jasna, skończony.

Jeśli zaś $\alpha \geq 1$, to ruch trwa wiecznie (co nie znaczy jeszcze, jak zobaczymy niżej, że zasięg jego jest nieskończony) i asymptotycznie $v(t) \propto 1/t^{\frac{1}{\alpha-1}}$ (lub $v(t) \propto e^{-(\kappa/m)t}$, gdy $\alpha = 1$). Wynik ten może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwny: przecież wydaje się, że dla większych wartości α siła oporu jest większa! I istotnie tak jest, ale dla dużych prędkości;²¹ jednak dla kwestii, czy siła oporu spowoduje całkowite zatrzymanie się ciała, decydująca jest wielkość siły oporu dla prędkości małych, nie zaś dużych, a w sposób oczywisty jeśli $(v/v_{\text{char}}) < 1$, gdzie v_{char} jest jakąś prędkością charakterystyczną, to $(v/v_{\text{char}})^{\alpha_1} > (v/v_{\text{char}})^{\alpha_2}$, gdy $\alpha_1 < \alpha_2$.

Zależność przebytej drogi x od czasu jest dana całką

$$x(t) = \int_0^t dt' v(t') = v_0 \int_0^t dt' \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

gdzie wielkość $\tau \equiv (m/\kappa)(v_0^{1-\alpha}/(1-\alpha)) = t_{\text{max}}$ jest, gdy $\alpha < 1$, tożsamy z czasem trwania ruchu t_{max} , dla $\alpha > 1$ zaś $|\tau|$ jest po prostu pewnym czasem charakterystycznym. Otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \tau \int_0^{t/\tau} d\xi (1 - \xi)^{\frac{1}{1-\alpha}} = v_0 \tau \frac{-1}{1 + \frac{1}{1-\alpha}} (1 - \xi)^{1 + \frac{1}{1-\alpha}} \Big|_0^{t/\tau} \\ &= v_0 \tau \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right] = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2 - \alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right]. \end{aligned}$$

Ze wzoru tego od razu widać, że 2 jest drugą krytyczną wartością wykładnika α . Oczywiście jeśli $\alpha < 1$, zasięg d jest skończony i wynosi

$$d = x(t_{\text{max}}) = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2 - \alpha}.$$

Otrzymany wzór na $x(t)$ pozostaje słuszny także przy $\alpha = 1$ (gdy ruch trwa wiecznie), co można sprawdzić albo całkując bezpośrednio wzór na $v(t)$ z $\alpha = 1$, lub też dokonując

²¹Jak zawsze, aby orzec, czy wielkość wymiarowa jest duża, czy mała, trzeba powiedzieć, w porównaniu z czym. W związku z tym zauważmy, że wymiar współczynnika κ w podanym wzorze na siłę oporu zmienia się z α ; aby operować współczynnikiem o wymiarze niezależnym od α , należy wzór ten zapisać w postaci

$$\mathbf{F}_{\text{op}} = -\kappa' \frac{|\mathbf{v}|^\alpha}{v_{\text{char}}^\alpha} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

w której $\kappa' \equiv \kappa v_{\text{char}}^\alpha$ ma już wymiar $[M][L][T]^{-2}$ niezależny od α . Pojawia się wtedy prędkość charakterystyczna v_{char} i to porównanie z nią decyduje, czy prędkość $v(t)$ jest duża czy mała.

przejścia granicznego we wzorze na $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{\kappa} v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ 1 - \left[1 - (1 - \alpha) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right]^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right\} \\ &= \frac{m}{\kappa} v_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \ln \left[1 - (1 - \alpha) \frac{\kappa}{m} v_0^{\alpha-1} t \right] \right) \right\} \\ &= \frac{m}{\kappa} v_0 (1 - e^{-(\kappa/m)t}) . \end{aligned}$$

co dla $t = \infty$ daje $d_{\alpha=1} = (m/\kappa)v_0$. Zasięg ruchu pozostaje skończony aż do $\alpha = 2$, gdyż dla $1 < \alpha < 2$ wykładnik $(2 - \alpha)/(1 - \alpha)$ jest ujemny podobnie jak i τ i, gdy $t \rightarrow \infty$,

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (t/|\tau|)]^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}} \right\} \rightarrow \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} .$$

Dla $\alpha = 2$ wzór na $x(t)$ jest osobliwy i konieczne jest znowu przejście graniczne

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{\kappa} \lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{t}{|\tau|} \right)^{\frac{2-\alpha}{1-\alpha}} \right\} \\ &= \frac{m}{\kappa} \lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{v_0^{2-\alpha}}{2-\alpha} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{2-\alpha}{1-\alpha} \ln \left(1 + \frac{t}{|\tau|} \right) \right] \right\} . \end{aligned}$$

Po rozwinięciu funkcji exponens otrzymujemy stąd

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{t}{|\tau|} \right) = \frac{m}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{\kappa}{m} v_0 t \right) .$$

Zasięg jest więc wtedy nieskończony: przebyta droga rośnie wolno, jak logarytm czasu, ale jednak rośnie nieograniczenie. Oczywiście zasięg jest też nieskończony dla wszystkich $\alpha > 2$ i wtedy rośnie już z czasem potęgowo:

$$x(t) = \frac{m}{\kappa} \frac{v_0^{2-\alpha}}{\alpha-2} \left[\left(1 + \frac{t}{|\tau|} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} - 1 \right] \rightarrow \text{const.} \times \left(\frac{t}{|\tau|} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} .$$

Zadanie 2.21

Punktowa masa m porusza się pionowo w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$. Siła oporu działająca na nią jest dana wzorem $\mathbf{F} = -\lambda|\mathbf{v}|\mathbf{v}$. Znaleźć zależność prędkości i położenia masy m od czasu w przypadku, gdy jej ruch rozpoczął się z zerową prędkością na pewnej wysokości. Podać jak zmieniają się te wielkości na samym początku ruchu i po dostatecznie długim czasie. Przedyskutować jakościowo także przypadki niezerowej prędkości początkowej i jej dwu możliwych kierunków (w górę i w dół).

Rozwiązanie:

Jeśli masa m porusza się w dół, a tak będzie w przypadku zerowej prędkości początkowej, to równanie wyznaczające zależność jej prędkości od czasu ma postać

$$\frac{dv}{dt} = g - \kappa v^2, \quad \kappa \equiv \frac{\lambda}{m}.$$

Oś z układu odniesienia, wzdłuż której odbywa się ruch została tu skierowana w dół. Równanie to można scałkować rozdzielając zmienne

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{g - \kappa v^2} = \frac{1}{g} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{1 - (\sqrt{\kappa/g} v)^2} = \frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \int_{\eta_0}^{\eta(t)} \frac{d\eta}{1 - \eta^2}.$$

Wprowadzona tu została zmienna $\eta = v\sqrt{\kappa/g}$. Całkę wykonuje się rozkładając wyrażenie podcałkowe na UAMki proste:²²

$$\int_0^t dt = \frac{1}{2\sqrt{g\kappa}} \left(\int_{\eta_0}^{\eta(t)} \frac{d\eta}{1 + \eta} + \int_{\eta_0}^{\eta(t)} \frac{d\eta}{1 - \eta} \right) = \frac{1}{2\sqrt{g\kappa}} [\ln(1 + \eta) - \ln|1 - \eta|]_{\eta_0}^{\eta(t)},$$

co prowadzi do wzoru

$$\ln\left(\frac{1 + \eta}{|1 - \eta|}\right) = 2\sqrt{g\kappa}t + 2\Delta_0,$$

w którym $2\Delta_0 \equiv \ln(1 + \eta_0) - \ln|1 - \eta_0|$. Aby wywikłać stąd zależność prędkości od czasu, trzeba zdecydować (z powodu występowania pod logarytmem modułu), czy wartość η jest większa, czy mniejsza od 1. Jeśli ruch zaczął się od zerowej prędkości początkowej, to, przynajmniej przez jakiś czas (ale zaraz zobaczymy, że zawsze) wartość η pozostaje mniejsza od 1. Zatem w takim przypadku

$$\frac{1 + \eta}{1 - \eta} = \exp(2\sqrt{g\kappa}t + 2\Delta_0),$$

i po odwikłaniu dostajemy

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \operatorname{th}(\sqrt{g\kappa}t + \Delta_0).$$

²²Korzystając w razie konieczności z porad specjalistów z Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Wzór ten pokazuje, że jeśli początkowa prędkość v_0 była równa zeru bądź dodatnia ale mniejsza od prędkości (nazwijmy ją graniczną) $v_{\text{gr}} \equiv \sqrt{g/\kappa}$, będzie ona z czasem rosła dochodząc do v_{gr} asymptotycznie (oczywiście fizycznie wcześniej masa m wyrznie w ziemię), ale nigdy jej nie przekroczy. Jest to oczywiste z samej postaci wyjściowego równania różniczkowego, którego prawa strona zeruje się przy $v = v_{\text{gr}}$ - wartość ta jest tzw. punktem stałym równania; ponieważ równanie to jest pierwszego rzędu (czyli wymaga tylko jednego warunku początkowego), rozwiązanie $v(t) = v_{\text{gr}}$ dzieli przestrzeń pozostałych rozwiązań na dwie klasy: w jednej klasie zawsze $v(t) > v_{\text{gr}}$, w drugiej zaś $v(t) < v_{\text{gr}}$. Gdyby prędkość początkowa v_0 była dodatnia i większa od v_{gr} , "zdejmując" moduł w przekształceniach powyżej trzeba by zamiast $1 - \eta$ napisać $\eta - 1$ i w rezultacie otrzymalibyśmy jako rozwiązanie

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \frac{1}{\text{th}(\sqrt{g\kappa}t + \Delta_0)}.$$

Prędkość $v(t)$ dochodziłaby wtedy do prędkości granicznej od góry.

Zakładając, że $v_0 = 0$, znajdziemy teraz położenie masy m w funkcji czasu:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \int_0^t dt' v(t') = z_0 + \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \int_0^t dt' \frac{\text{sh}(\sqrt{g\kappa}t')}{\text{ch}(\sqrt{g\kappa}t')} \\ &= z_0 + \frac{1}{\kappa} \ln[\text{ch}(\sqrt{g\kappa}t)]. \end{aligned}$$

Gdy czas dąży do nieskończoności, prędkość staje się równa v_{gr} i wzór ten powinien dawać liniowy przyrost drogi z czasem. Jest tak rzeczywiście:

$$z(t) - z_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{1}{2} (e^{\sqrt{g\kappa}t} + e^{-\sqrt{g\kappa}t}) \right] \approx \sqrt{\frac{g}{\kappa}} t - \frac{1}{\kappa} \ln 2.$$

Ujemna stała bierze się z tego, że masa m nie porusza się cały czas prędkością v_{gr} ; wynika stąd pewna strata dystansu (reprezentowana właśnie przez czynnik $-(1/\kappa) \ln 2$) w stosunku do ciała, które od początku poruszałoby się z prędkością v_{gr} od $t = 0$.

Możemy też sprawdzić, jak przebyta przez masę m droga przyrasta zaraz po starcie, tj. dla czasów bliskich zeru. Argument $\xi \equiv \sqrt{g\kappa}t$ funkcji kosinus hiperboliczny jest wtedy mały ($\ll 1$) i korzystając ze wzorów na rozwinięcie funkcji cosh i rozwinięcie logarytmu mamy

$$z(t) - z_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{24} \xi^4 + \dots \right),$$

(rozwinięcie kosinusa hiperbolicznego jest takie jak kosinusa, tylko wszystkie znaki są dodatnie, co wynika z tego, że $\cos(i\xi) = \text{ch}\xi$) i teraz korzystając z rozwinięcia $\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots$ mamy

$$z(t) - z_0 = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{24} \xi^4 + \dots - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \xi^2 + \dots \right)^2 \right\} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} \xi^4 + \dots \right).$$

Tak więc, gdy $t \ll 1/\sqrt{g\kappa}$,

$$z(t) - z_0 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{12}g^2\kappa t^4 + \dots$$

W pierwszym przybliżeniu, kiedy prędkość jest jeszcze niewielka, siła oporu nie gra roli (jest znikoma) i w pierwszym przybliżeniu masa m spada swobodnie, “po szkolnemu”; w następnym przybliżeniu dochodzi poprawka opóźniająca spadek, proporcjonalna do t^4 .

Przy okazji warto zobaczyć, jak ten sam wynik dla $t \ll 1/\sqrt{g\kappa}$ można uzyskać rozwiązując wyjściowe równanie różniczkowe metodą Banacha. Zapiszmy równanie w postaci

$$\frac{dv}{dt} = g - \kappa v^2,$$

i potraktujmy całą jego prawą stronę jak zaburzenie (oczywiście żeby tak można było zrobić mała musi być prędkość początkowa v_0). Pierwszym przybliżeniem rozwiązania, czyli rozwiązaniem zerowego rzędu jest $v^{(0)}(t) = v_0$ (po prostu!). Następnie szukamy rozwiązania pierwszego rzędu, $v^{(1)}(t)$, całkując powyższe równanie z prawą stroną obliczoną z rozwiązania zerowego rzędu:

$$\frac{dv^{(1)}(t)}{dt} = g - \kappa(v^{(0)})^2,$$

co da

$$v^{(1)}(t) = v_0 + (g - \kappa v_0^2)t.$$

Następnie szukamy rozwiązania drugiego rzędu obliczając prawą stronę ze znalezionej wyżej rozwiązania rzędu pierwszego

$$\frac{dv^{(2)}(t)}{dt} = g - \kappa [v_0 + (g - \kappa v_0^2)t]^2,$$

itd. Kładąc dla prostoty $v_0 = 0$ mamy tu równanie

$$\frac{dv^{(2)}(t)}{dt} = g - \kappa g^2 t^2,$$

którego rozwiązaniem jest

$$v^{(2)}(t) = gt - \frac{1}{3}\kappa g^2 t^3,$$

i które po scałkowaniu jeszcze raz da otrzymane już wyżej przybliżenie $z(t)$, które jest słuszne, gdy $t \ll 1/\sqrt{g\kappa}$.

Na koniec zauważmy jeszcze, że gdyby prędkość początkowa v_0 była ujemna (skierowana w górę), należałoby rozwiązywać równanie

$$\frac{dv}{dt} = g + \kappa v^2,$$

Równanie to nie ma punktu stałego, ale przy $v_0 < 0$, dyktuje ono wzrost $v(t)$ od v_0 do zera. W chwili t , w której prędkość stanie się równa zero równanie to przestaje obowiązywać i należy od tego momentu rozwiązywać poprzednie równanie z warunkiem początkowym $v = 0$.

Zadanie 2.6

Zbadać możliwe ruchy jednowymiarowego oscylatora harmonicznego z tłumieniem będące rozwiązaniami równania

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = 0,$$

gdzie $\gamma > 0$, $k > 0$ (czynniki 2 w drugim wyrazie został wprowadzony dla rachunkowej wygody). Rozpatrzeć wszystkie możliwe przypadki.

Rozwiązanie:

Równanie

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

gdzie $\lambda \equiv \gamma/m$, $\omega_0^2 \equiv k/m$ jest różniczkowym równaniem liniowym drugiego rzędu. Zgodnie z ogólnymi zasadami powinno ono mieć dwa liniowo niezależne rozwiązania, a najogólniejsze rozwiązanie jest kombinacją liniową tych dwu rozwiązań z dowolnymi współczynnikami. Występują w nim zatem dwie stałe dowolne. Zgodnie z tradycją fizyczną przekazaną nam w Feynmana wykładach z Fizyki, rozwiązań szukamy w postaci

$$z(t) = e^{i\alpha t},$$

tj. szukamy funkcji spełniającej wypisane wyżej równanie ale przyjmującej wartości zespolone. Ponieważ równanie jest liniowe o rzeczywistych współczynnikach, spełniać je będzie osobno zarówno część rzeczywista jak i urojona zespolonego rozwiązania $z(t)$ i którąkolwiek z nich można wziąć jako rozwiązanie wyjściowego rzeczywistego równania. Podstawiając ten tzw. Ansatz (liczba mnoga die Ansätze, gdyby ktoś nie wiedział) do rozwiązywanego równania otrzymujemy warunek na α (czyli inaczej równanie charakterystyczne tego równania liniowego)

$$-\alpha^2 + 2i\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0.$$

Rozwiązaniami tego warunku są

$$\alpha_{\pm} = i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Zatem ogólnym zespolonym rozwiązaniem jest

$$z(t) = \mathbb{C}_1 e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mathbb{C}_2 e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t}.$$

$\mathbb{C}_{1,2}$ są dwiema dowolnymi zespolonymi stałymi. Jeśli $\omega_0^2 - \lambda^2 < 0$, tj. jeśli wykładniki eksponensów są czysto rzeczywiste, wzięcie części rzeczywistej (lub urojonej) $x(t)$ zespolonego rozwiązania $z(t)$ sprowadza się po prostu do wzięcia $\text{Re } \mathbb{C}_1$ i $\text{Re } \mathbb{C}_2$ ($\text{Im } \mathbb{C}_1$ i $\text{Im } \mathbb{C}_2$)

jako dwu stałych rzeczywistych. Gdy zaś $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$, aby wydzielić część rzeczywistą (lub urojoną) tego rozwiązania, wygodniej jest, przeddefiniowując stałe, przepisać je w postaci²³

$$z(t) = \mathbb{C} e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mathbb{C}^* e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} \\ + \mathbb{B} e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} - \mathbb{B}^* e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t}.$$

Pierwsza linia tak zapisanego zespolonego rozwiązania $z(t)$ jest czysto rzeczywista, a druga czysto urojona. Zatem jako rozwiązanie rzeczywiste $x(t)$ możemy wziąć np. $\operatorname{Re} z(t)$, czyli

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(\mathbb{C} e^{+i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mathbb{C}^* e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} \right).$$

Powyższe rozwiązanie $x(t)$ zależy, tak jak powinno, od dwóch stałych dowolnych, którymi są część rzeczywista i część urojona $\mathbb{C}$.

Tak więc, w zależności od wzajemnego stosunku ω_0^2 i λ^2 , możliwe są trzy przypadki

- Gdy $\omega_0^2 > \lambda^2$, rozwiązanie można zapisać w postaci

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

gdzie $A = \mathbb{C} + \mathbb{C}^* = 2\operatorname{Re} \mathbb{C}$, $B = i(\mathbb{C} - \mathbb{C}^*) = -2\operatorname{Im} \mathbb{C}$, a $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

- Gdy $\omega_0^2 < \lambda^2$, piszemy $\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -i\kappa$ oraz (w pierwotnej formie rozwiązania z $\mathbb{C}_1$ i $\mathbb{C}_2$) $\operatorname{Re} \mathbb{C}_1 = \frac{1}{2}(A + B)$, $\operatorname{Re} \mathbb{C}_2 = \frac{1}{2}(A - B)$, co sprowadza część rzeczywistą $\operatorname{Re} z(t)$ rozwiązania do postaci

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \operatorname{ch} \kappa t + B \operatorname{sh} \kappa t).$$

- Gdy $\omega_0^2 = \lambda^2$, dwa znalezione rozwiązania stają się wzajemnie proporcjonalne czyli liniowo zależne i trzeba znaleźć jeszcze jedno liniowo niezależne rozwiązanie, gdyż inaczej ogólne rozwiązania zależałoby tylko od jednej tylko (rzeczywistej) stałej dowolnej, co nie pozwalałoby spełnić warunków początkowych (z ogólnej teorii równań różniczkowych wiadomo, że najogólniejsze rozwiązanie musi mieć dwie stałe dowolne). Okazuje się, że ogólnym rozwiązaniem jest wtedy

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A + B t).$$

Że jest to istotnie rozwiązanie, można sprawdzić wstawiając je do wyjściowego równania (w którym należy położyć $\omega_0^2 = \lambda^2$).²⁴ Wynik ten, jak zobaczymy niżej, można też otrzymać dokonując odpowiedniego przejścia granicznego.

²³Choć nie jest to do niczego potrzebne, zanotujmy, że $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} + \mathbb{B}$, $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}^* - \mathbb{B}^*$ czyli $\mathbb{C} = \frac{1}{2}(\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2)$, a $\mathbb{B} = \frac{1}{2}(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2)$.

²⁴Istotnie: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \lambda^2 x = e^{-\lambda t}(\lambda^2 A - 2\lambda B + \lambda^2 B t) + 2\lambda e^{-\lambda t}(-\lambda A + B - \lambda B t) + \lambda^2 e^{-\lambda t}(A + B t) = 0$.

Dowolne stałe rzeczywiste A i B w powyższych ogólnych rozwiązaniach są wyznaczone przez zadane warunki początkowe. Jeśli są nimi

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

to, jak łatwo sprawdzić,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t \right], \\ x(t) &= e^{-\lambda t} [x_0 + (v_0 + \lambda x_0) t], \\ x(t) &= e^{-\lambda t} \left[x_0 \operatorname{ch} \kappa t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa t \right], \end{aligned}$$

gdy, odpowiednio, $\omega_0^2 > \lambda^2$, $\omega_0^2 = \lambda^2$ i $\omega_0^2 < \lambda^2$.

Mając rozwiązania dla dwóch skrajnych przypadków zależne od warunków początkowych łatwo zobaczyć, że rozwiązanie w przypadku $\omega_0^2 = \lambda^2$ można otrzymać przez przejście graniczne. Np. biorąc w pierwszym rozwiązaniu granicę $\omega \rightarrow 0$ (czyli $\omega_0^2 \rightarrow \lambda^2$) widzimy, że $\cos \omega t \rightarrow 1$, a drugi wyraz w tej granicy daje

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{v_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t = (v_0 + \lambda x_0) t,$$

i otrzymujemy rozwiązanie dla przypadku $\omega_0^2 = \lambda^2$. W podobny sposób można to rozwiązanie otrzymać w granicy $\kappa \rightarrow 0$ z trzeciego rozwiązania. Przejścia granicznego można dokonać dopiero po wyrażeniu stałych dowolnych przez warunki początkowe, gdyż, jak widać, współczynniki tych liniowo niezależnych rozwiązań nie pozostają stałe przy zmienianiu ω lub κ .

Tylko w przypadku, gdy $\omega_0^2 > \lambda^2$, tj. gdy siła oporu nie jest zbyt duża, ruch wykazuje charakter quasi-periodyczny: kolejne zera funkcji $x(t)$ (przechodzenie oscylatora przez położenie równowagi) występują regularnie, w odstępach czasu $\Delta t = \frac{1}{2}T$, gdzie $T = 2\pi/\omega$. Kolejne maksima funkcji $|x(t)|$ występują zaś, gdy $\dot{x}(t) = 0$ i są nieco przesunięte w stosunku do położenia, jakie miałyby przy niewystępowaniu siły oporu. Np. jeśli (dla prostoty) $x_0 = 0$ i $x(t) = (v_0/\omega)e^{-\lambda t} \sin \omega t$, maksymalne wychylenia, tj. maksymalne wartości $|x(t)|$ przypadają w tych momentach, w których znika $\dot{x}(t)$, czyli gdy

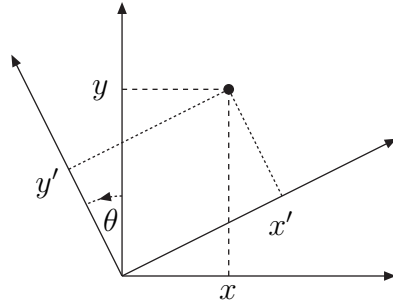
$$e^{-\lambda t}(\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t) = 0,$$

tj., w których $\operatorname{tg} \omega t = \omega/\lambda$; jeśli siła oporu jest słaba, $\lambda \ll \omega$, przypadają one niemal dokładnie wtedy, kiedy $\omega t = \pi/2 + n\pi$; jeśli zaś $\lambda \sim \omega$ lub $\lambda > \omega$, chwile te są nieco wcześniejsze (co zrozumiałe, bo siła oporu powoduje wcześniejsze wytracenie prędkości).

W przypadku, gdy $\omega_0^2 < \lambda^2$ (a $x_0 = 0$) wychylenie oscylatora $x(t)$ jest tylko jednego znaku (zależnego od znaku prędkości początkowej v_0) i $|x(t)|$ ma tylko jedno maksimum występujące w chwili, gdy $\dot{x}(t) = 0$, czyli gdy

$$\operatorname{th}(\kappa t) = \frac{\kappa}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 1.$$

Jest bowiem jasne, iż równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.



Rysunek 24: Obrót układu współrzędnych o kąt θ .

Zadanie 2.7

Pokazać, że tor ruchu dwuwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego, czyli leżący na płaszczyźnie tor ruchu cząstki o masie m poddanej działaniu siły sprężystej $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$ jest elipsą. Jaki warunek muszą spełniać częstości ω_1 i ω_2 nieizotropowego trójwymiarowego oscylatora o sile $\mathbf{F} = -m(\omega_1^2 x \mathbf{e}_x + \omega_2^2 y \mathbf{e}_y + \omega_3^2 z \mathbf{e}_z)$, by tor jego ruchu był krzywą zamkniętą?

Rozwiązanie:

Równania ruchu dwuwymiarowego izotropowego oscylatora

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

najłatwiej rozwiązać wprowadzając zmienną zespoloną $\xi = x + iy$. Rozwiązaniem równania $\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$ jest wtedy

$$\xi(t) = \mathbb{A}_+ e^{i\omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\omega t} = |\mathbb{A}_+| e^{i\omega t + i\delta_+} + |\mathbb{A}_-| e^{-i\omega t + i\delta_-} = e^{i\theta} (|\mathbb{A}_+| e^{i\omega t + i\delta} + |\mathbb{A}_-| e^{-i\omega t - i\delta}),$$

przy czym zespolone stałe całkowania $\mathbb{A}_\pm$ zależą od warunków początkowych. W ostatnim kroku fazy δ_+ i δ_- stałych $\mathbb{A}_\pm$ zostały zapisane w formie $\delta_+ = \theta + \delta$, $\delta_- = \theta - \delta$. Podstawiając następnie $|\mathbb{A}_\pm| = \frac{1}{2}(A \pm B)$, można wyrażenie w nawiasie napisać jako

$$\frac{A}{2} (e^{i\omega t + i\delta} + e^{-i\omega t - i\delta}) + i \frac{B}{2i} (e^{i\omega t + i\delta} - e^{-i\omega t - i\delta}) = A \cos(\omega t + \delta) + iB \sin(\omega t + \delta).$$

Możemy teraz zinterpretować to jako $\xi' \equiv x'(t) + iy'(t)$, gdyż jeśli układ $\mathcal{O}'$ jest względem układu $\mathcal{O}$ obrócony o kąt θ tak, jak na rysunku 24, to $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$, czyli właśnie $\xi = e^{i\theta} \xi'$. Zatem w układzie obróconym o kąt θ tor jest dany równaniem $(x'/A)^2 + (y'/B)^2 = 1$, które jest właśnie równaniem elipsy.

Jeśli rozwiązanie nieizotropowego oscylatora zapisać w postaci $x(t) = A_x \cos(\omega_1 t + \delta_x)$, $y(t) = A_y \cos(\omega_2 t + \delta_y)$, $z(t) = A_z \cos(\omega_3 t + \delta_z)$, to jest jasne, że tor będzie krzywą zamkniętą, gdy można dobrać wielokrotności okresów ruchów wzdłuż poszczególnych osi tak, by były sobie równe, czyli gdy istnieje okres T taki, że

$$\omega_i T = 2\pi n_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Tor będzie więc krzywą zamkniętą, gdy $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = n_1 : n_2 : n_3$.

Zadanie 2.8

Znaleźć ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m , stałej sprężystości $k = m\omega_0^2$ i współczynniku siły tłumiącej $2\gamma = 2m\lambda$ pobudzanego siłą zewnętrzną o harmonicznym charakterze zależnościami od czasu

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \delta).$$

Przedyskutować zależność amplitudy wychyleń oscylatora od częstości Ω siły wymuszającej oraz korelację maksimów wychyleń oscylatora z maksimami siły. Zakładając, że $\lambda \neq 0$ i że ruch trwa już dostatecznie długo, by zależność ruchu od warunków początkowych stała się nieistotna (tj. że $t \gg 1/\lambda$), obliczyć uśrednioną po okresie siły wymuszającej moc przekazywaną przez nią oscylatorowi i zbadać jej zależność od częstości Ω . Co się dzieje z tą pobieraną przez oscylator energią?

Rozwiązanie:

Równanie Newtona, wyznaczające ruch oscylatora ma postać

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t + \delta).$$

Jego najogólniejsze rozwiązanie jest sumą najogólniejszego rozwiązania równania jednorodnego (tj. powyższego równania z siłą $F(t)$ równą zero) oraz jakiegokolwiek rozwiązania (tzw. rozwiązania szczególnego) powyższego równania z siłą $F(t)$. Najogólniejsze rozwiązania (w zależności od wzajemnego stosunku λ do ω_0) równania jednorodnego zostały znalezione w Zadaniu 2.6. Znaleźć rozwiązanie szczególne jest najprościej przepisując powyższe równania w zmiennej zespolonej $z(t)$ i modyfikując jego prawą stronę:

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i(\Omega t + \delta)}.$$

Ponieważ równanie to jest liniowe, a współczynniki prawej jego strony są rzeczywiste, część rzeczywista $z(t)$ będzie spełniać właśnie to równanie, które chcemy rozwiązać (część urojona $z(t)$ będzie zaś spełniać równanie z siłą $F(t) = F_0 \sin(\Omega t + \delta)$). Podstawiamy następnie do tego równania

$$z(t) = \mathbb{A} e^{i\Omega t},$$

z amplitudą $\mathbb{A}$ będącą liczbą zespoloną i widzimy, że jest ono spełnione, jeśli

$$\mathbb{A} = \frac{F_0}{m} \frac{e^{i\delta}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega}.$$

Szczególne (niezależne od żadnych stałych dowolnych) rozwiązanie wyjściowego równania ma zatem postać

$$x_{sz}(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{F_0}{m} \frac{e^{i(\Omega t + \delta)}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega} \right) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \cos(\Omega t + \delta - \varphi).$$

φ jest fazą mianownika $\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\lambda\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} e^{i\varphi}$ zespolonej amplitudy. Jest ona dana wzorem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2},$$

albo, co wygodniejsze, bo nie wymaga zmieniania gałęzi arcusa tangensa przy przechodzeniu przez $\Omega^2 = \omega_0^2$, wzorami

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.$$

Ponieważ, jak widać, $\sin \varphi$ jest nieujemny, faza φ należy do przedziału $[0, \pi]$.

Alternatywną (ale równoważną) postać rozwiązania szczególnego uzyskujemy pisząc

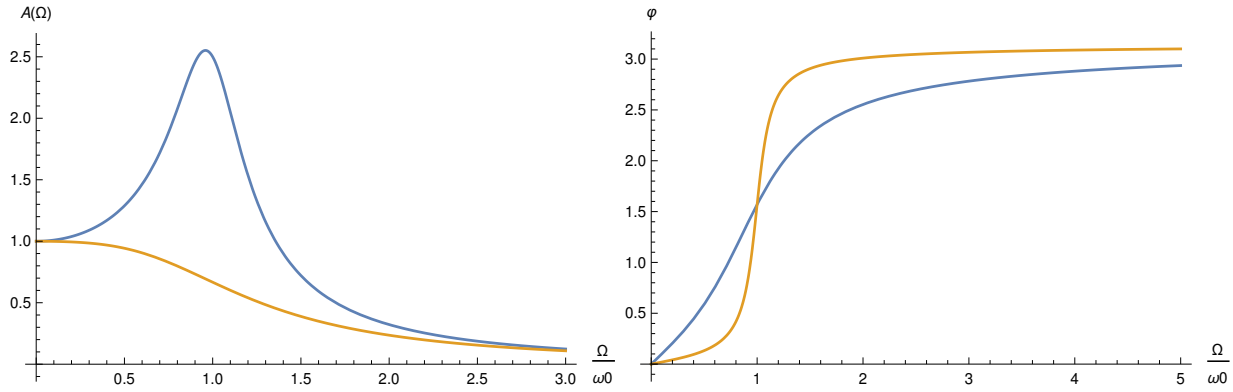
$$\begin{aligned} x_{sz}(t) &= \operatorname{Re} \left(\frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} e^{i(\Omega t + \delta)} \right) \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \delta) + 2\lambda\Omega \sin(\Omega t + \delta)]. \end{aligned}$$

Wprawdzie pełne rozwiązanie równania ruchu wymaga dodania do znalezionej tu rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego jeszcze ogólnego rozwiązania równania jednorodnego zależnego od dwóch dowolnych stałych (dopiero wtedy można narzucić na rozwiązanie warunki początkowe - zobacz Zadanie 2.9), to, jeśli tylko siła oporu (współczynnik λ) nie znika, efekty tego ogólnego rozwiązania, a z nim zależność ruchu od warunków początkowych, będą z czasem maleć do dowolnie małej wielkości. Rozpatrując ruch oscylatora w chwilach $t \gg \lambda^{-1}$, można się ograniczyć wtedy do badania samego szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego, gdyż $x(t) \approx x_{szcz}(t)$.

Zatem gdy $t \gg \lambda^{-1}$, amplituda A drgań oscylatora (czyli maksymalne wychylenie) jest równa

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}.$$

Gdy siła oporu nie jest zbyt duża, amplituda ma maksimum w punkcie, w którym mianownik ma minimum, a jeszcze lepiej, tam, gdzie minimum ma wyrażenie pod pierwiastkiem czyli tam, gdzie znika pochodna po x funkcji $f(x) = (x - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2x$, tj. przy częstotliwości $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, zwanej *częstotliwością rezonansową*. Częstota ta, jak widać, jest niższa niż częstota własna ω_0 oscylatora. Oczywiście, gdy $\omega_0^2 \leq 2\lambda^2$, amplituda $A(\Omega)$ jest monotonicznie malejącą funkcją częstotliwości Ω . Wykres amplitudy wychyleń oscylatora jako funkcji częstotliwości siły wymuszającej jest pokazany na lewym panelu rysunku 25. W obu przypadkach, zarówno, gdy $\omega_0^2 \leq 2\lambda^2$, jak i gdy $\omega_0^2 > 2\lambda^2$, amplituda spada do zera, gdy $\Omega \rightarrow \infty$: oscylator mający bezwładność ($m \neq 0$) nie zdąża reagować znaczącym wychyleniem na następujące niemal natychmiast po sobie pochodzące od siły pchnięcia w przeciwnych kierunkach. Gdy $\Omega = 0$, rozwiązanie $x_{szcz}(t)$ redukuje się do stałej $x_{szcz} = (F_0/m\omega_0^2) \cos \delta$,



Rysunek 25: Po lewej: wykres amplitudy wychyleń oscylatora (w jednostkach $F_0/m\omega_0^2$) w funkcji częstości Ω siły wymuszającej dla $\lambda/\omega_0 = 0.2$ (krzywa niebieska z wyraźnym maksimum) i 0.75 (krzywa czerwona). Po prawej: wykres fazy φ w funkcji Ω/ω_0 oscylatora dla $\lambda/\omega_0 = 0.5$ (krzywa niebieska) i 0.1 (krzywa czerwona).

co odpowiada spoczynkowi oscylatora w punkcie przesunętym w stosunku do centrum siły sprężystej; siła sprężysta $F_{\text{spr}} = -m\omega_0^2 x_{\text{szcz}}$ jest w tym położeniu równoważona przez siłę zewnętrzną $F_0 \cos \delta$.

Faza φ zadaje opóźnienie maksymalnych wychyleń oscylatora w stosunku do maksymalnych wartości siły pobudzającej (jeśli siła ta ma maksimum w chwili t_F , to wychylenie maksymalne występuje w chwili $t_F + \varphi/\Omega$). Faza ta, jak wynika z podanego wzoru, jest bardzo mała, gdy częstość Ω siły pobudzającej jest mała (w stosunku do λ) - oscylator mimo działania siły oporu, “nadaża” za siłą pobudzającą. Przy $\Omega = \omega_0$ faza φ jest równa $\pi/2$ (w chwilach, gdy siła jest maksymalna, wychylenie oscylatora zeruje się) i dąży do π , gdy $\Omega \rightarrow \infty$ (oscylator jest wtedy z siłą w przeciwfazie). Zależność fazy φ od tłumienia λ ilustruje prawy panel rysunku 25. Przy $\lambda = 0$ zależność fazy φ od częstości Ω siły degeneruje się do $\varphi = 0$, gdy $\Omega < \omega_0$ i do $\varphi = \pi$, jeśli $\Omega > \omega_0$. Rozwiązanie $x_{\text{szcz}}(t)$ pozostaje jednak ciągłą funkcją Ω (co widać z przytoczonej wyżej alternatywnej formy rozwiązania) i przybiera wtedy postać

$$x_{\text{sz}}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \Omega^2|} \lim_{\text{tg} \varphi \rightarrow 0} \cos(\Omega t + \delta) \cos \varphi = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \delta).$$

Trzeba jednak pamiętać, że gdy $\lambda = 0$, rozpatrywanie samego tylko rozwiązania szczególnego traci sens, bo zależna od stałych dowolnych (czyli od warunków początkowych) część pełnego rozwiązania nie zanika z czasem.

Ponieważ w stanie ustalonym (gdy zanikła już pamięć układu o warunkach początkowych) ruch układu jest okresowy, można obliczyć średnią (po okresie $T = 2\pi/\Omega$) moc pobieraną przezeń od siły wymuszającej $F(t)$. Chwilowa jej moc jest równa $P_F(t) = F(t)\dot{x}(t)$, a uśredniona jest dana całką

$$\overline{P}_F = \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{x}(t) F(t).$$

Bez straty ogólności przyjmijmy tu $\delta = 0$. Wówczas

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad \dot{x}(t) = -\frac{F_0}{m} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \varphi).$$

Potrzebną całkę oblicza się najszybciej, gdy funkcje trygonometryczne zostaną zapisane przez eksponensy:

$$\begin{aligned} \overline{P}_F &= -\frac{F_0^2}{Tm} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \int_0^T dt \sin(\Omega t - \varphi) \cos \Omega t \\ &= -\frac{F_0^2}{Tm} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \frac{1}{4i} \int_0^T dt [e^{i\Omega t - i\varphi} - e^{-i\Omega t + i\varphi}] [e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}] \\ &= -\frac{F_0^2}{Tm} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \frac{T}{4i} (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \frac{F_0^2}{2m} \frac{\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Mimo iż chwilowa moc pobierana przez oscylator od siły wymuszającej może być ujemna ($\dot{x}(t) \propto \sin(\Omega t + \delta - \varphi)$ może być przeciwnego znaku niż $F(t) \propto \cos(\Omega t + \delta)$), uśredniona po okresie moc pobierana jest zawsze dodatnia bo, jak już zauważyliśmy, faza φ należy do przedziału $[0, \pi]$. Po podstawieniu tu wzoru na fazę

$$\sin \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}},$$

otrzymujemy

$$\overline{P} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\lambda\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}.$$

Moc pobierana (średnio w okresie) przez oscylator jest mała przy małych częstościach Ω siły wymuszającej i spada również do zera, gdy częstość ta staje się bardzo duża (w porównaniu z częstością własną ω_0 oscylatora). Maksimum osiąga, jak łatwo sprawdzić szukając maksimum funkcji

$$f(x) = \frac{x}{(x - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2 x},$$

przy $\Omega = \omega_0$ (a nie przy częstości rezonansowej, jak można by sądzić) i jest tam równa $\overline{P}_F^{\max} = F_0^2/4m\lambda$. Oczywiście, ponieważ ruch oscylatora jest stanem ustalonym, pobierana przezeń od siły wymuszającej moc musi w całości być tracona wskutek działania siły oporu. Istotnie, chwilowa moc tej siły, dana wzorem $P_\lambda(t) = -2\lambda m \dot{x}^2(t)$ (jak widać jest ona zawsze ujemna - siła oporu w każdej chwili, a nie tylko w średniej, powoduje stratę energii oscylatora), po uśrednieniu po okresie

$$\overline{P}_\lambda = -\frac{2\lambda m}{T} \int_0^T dt \dot{x}^2(t) = -\frac{2\lambda m}{T} \frac{F_0^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2} \int_0^T dt \sin^2(\Omega t - \varphi),$$

ponieważ średnia po okresie funkcji $\sin^2$ jest równa $\frac{1}{2}$ (reguła, którą warto pamiętać), jest dokładnie równa wziętej z przeciwnym znakiem uśrednionej mocy $\overline{P}_F$.

Zadanie 2.9

Dokonując odpowiednich przybliżeń w ścisłym wzorze na zależność od czasu położenia rozpatrywanego w zadaniu 2.8 oscylatora (i przyjmując, że faza δ siły wymuszającej jest równa zero) przedyskutować jakościowo charakter jego ruchu w różnych reżimach (tj. dla różnych stosunków wielkości ω_0 , Ω i λ), jeśli w chwili $t = 0$ oscylator spoczywał w swoim położeniu równowagi ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$). W szczególności rozpatrzyć przypadek bez tłumienia ($\lambda = 0$), oraz przypadki $0 < \lambda \ll |\omega_0 - \Omega|$ i $|\omega_0 - \Omega| \ll \lambda$.

Rozwiązanie:

Aby zbadać zachowanie się oscylatora w różnych reżimach trzeba najpierw wypisać kompletne rozwiązanie uwzględniające warunki początkowe $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, które oznaczają, że w chwili $t = 0$, gdy siła pobudzająca jest maksymalna, oscylator znajduje się w w spoczynku w położeniu równowagi. Przyjmiemy też, że $\omega_0^2 > \lambda^2$, czyli że tłumienie oscylatora jest słabe. Ogólna postać zależnego od dwu stałych dowolnych rozwiązania jest następująca (przypomnijmy, że $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$):

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\lambda\Omega \sin \Omega t].$$

Przyjęte warunki początkowe, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ prowadzą do równań

$$A + \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} = 0, \\ -\lambda A + \omega B + \frac{F_0}{m} \frac{2\lambda\Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} = 0.$$

Ich rozwiązaniami są

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}, \quad B = -\frac{F_0}{m\omega} \frac{\lambda(\Omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}.$$

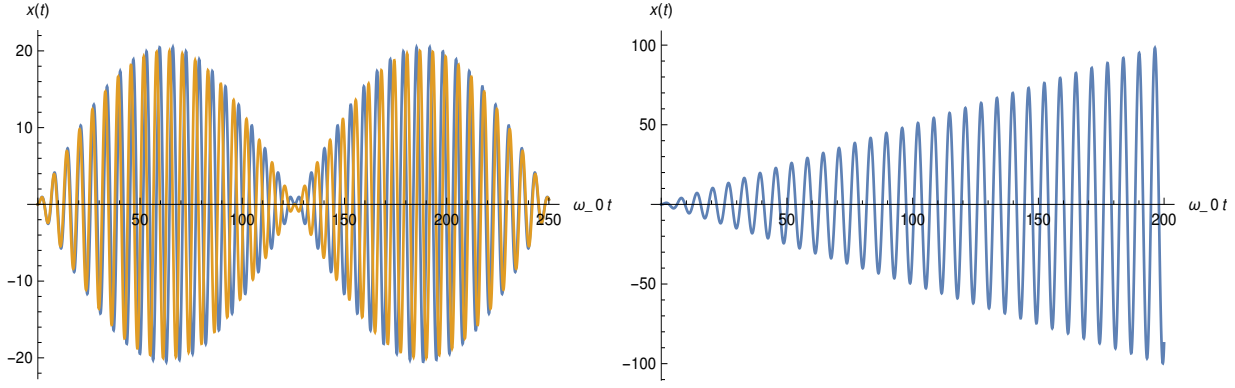
Pełne rozwiązanie z przyjętymi warunkami początkowymi ma więc postać:

$$x(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} \left\{ (\omega_0^2 - \Omega^2) (\cos \Omega t - e^{-\lambda t} \cos \omega t) + 2\lambda\Omega \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega^2 + \omega_0^2}{2\Omega\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \right) \right\}.$$

Można teraz zbadać różne przypadki.

1) Zbadajmy najpierw ruch w przypadku, gdy tłumienie nie występuje, tj., gdy $\lambda = 0$ (wtedy $\omega = \omega_0$). Wypisane wyżej rozwiązanie redukuje się wtedy do

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t).$$



Rysunek 26: Wychylenia (w jednostkach $F_0/m\omega_0^2$) oscylatora bez tłumienia ($\lambda = 0$) pobudzanego siłą harmoniczną $F(t) = F_0 \cos((\omega_0 + \varepsilon)t)$ w funkcji $\omega_0 t$. Po lewej: $\varepsilon/\omega_0 = -0.05$; ścisły wzór - linia niebieska; wzór przybliżony - linia czerwona. Po prawej w przypadku ścisłego rezonansu $\Omega = \omega_0$.

Szczególnie interesujący jest przypadek ruchu wymuszanego przez siłę o częstości Ω bliskiej częstości własnej ω_0 oscylatora. W przekształconej²⁵ postaci powyższego wzoru²⁶

$$x(t) = -\frac{2F_0/m}{(\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega)} \sin\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\right),$$

można, gdy $\Omega = \omega_0 + \varepsilon \approx \omega_0$, zastąpić $\omega_0 + \Omega$ przez $2\omega_0$. Daje to

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0\varepsilon} \sin\omega_0 t \sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right).$$

Wychylenie oscylatora zmienia się wtedy niemal periodycznie, jak $\sin\omega_0 t$, ale amplituda jest modulowana przez wolnozmienny czynnik $\sin(\frac{1}{2}\varepsilon t)$. Zachowanie to ilustruje lewy panel

²⁵Wykorzystujemy tu wzór

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

(nie trzeba go szukać po Internetach... wystarczy pamiętać, że taki wzór istnieje i ma w jednej funkcji połowę sumy kątów, a w drugiej połowę różnicy; ponieważ po lewej kosinusy nie mają w zapisie przez eksponenty czynnika i w mianowniku, po lewej musi być albo iloczyn dwóch sinusów, albo dwóch kosinusów (żeby nie było i w mianowniku) ale lewa strona zmienia znak przy zamianie $\alpha \leftrightarrow \beta$, więc to muszą być sinusy, a ogólny znak łatwo dopasować kładąc np. $\alpha = 0$ i $\beta = \pi$, czy coś takiego.

²⁶Alternatywnie można by próbować od razu położyć $\Omega = \omega_0 + \varepsilon$, pisząc

$$\cos((\omega_0 + \varepsilon)t) - \cos\omega_0 t = \cos\omega_0 t \cos\varepsilon t - \sin\omega_0 t \sin\varepsilon t - \cos\omega_0 t,$$

i użyć argumentu, że $\cos\varepsilon t \approx 1$, dzięki czemu pierwszy i ostatni człon się zredukują i zostanie tylko $-\sin\omega_0 t \sin\varepsilon t$. Takie przybliżenie jest jednak słuszne tylko dla czasów t takich, że $|\varepsilon t| \ll 1$ i dość szybko się załamuje. W rezultacie otrzymany w ten sposób wzór daje dwukrotnie krótszy okres modulacji ($T_{\text{mod}} = 2\pi/\varepsilon$ zamiast $T_{\text{mod}} = 4\pi/\varepsilon$). Ścisłą granicę $\Omega = \omega_0$ otrzymuje się, oczywiście, poprawną.

rysunku 26. W granicy ścisłego rezonansu, gdy $\Omega = \omega_0$ otrzymuje się

$$x(t) \approx \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \omega_0 t \sin \omega_0 t.$$

Amplituda wychyleń narasta wtedy z czasem liniowo (zob. prawy panel rysunku 26).

2) Drugi przypadek to sytuacja, gdy $\lambda \ll |\Omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Tłumienie jest słabe, ale niezerowe, a odchylenie częstości siły wymuszającej od częstości własnej oscylatora jest zawsze większe niż parametr λ (granicy $|\Omega - \omega_0| \rightarrow 0$ w tym reżimie nie można zatem osiągnąć).

W tym przypadku w pełnym rozwiązaniu można opuścić człony z sinusami (bo są proporcjonalne do parametru λ , który może być dowolnie mały) i zastąpić ω przez ω_0 :

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} (\omega_0^2 - \Omega^2) (\cos \Omega t - e^{-\lambda t} \cos \omega_0 t).$$

Ponadto można pominąć czynnik $\lambda^2\Omega^2$ w mianowniku i, wprowadzając $\varepsilon = \Omega + \omega_0$, sprowadzić powyższy wzór do

$$x(t) \approx -\frac{F_0/m}{2\omega_0\varepsilon} (\cos \omega_0 t \cos \varepsilon t - \sin \omega_0 t \sin \varepsilon t - e^{-\lambda t} \cos \omega_0 t).$$

Żeby łatwiej dostrzec jakościowy charakter ruchu, dobrze jest wyrażenie w nawiasie przedstawić w postaci $A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, tj. w postaci ruchu harmonicznego z (wolno) zmienną z czasem amplitudą i (wolno) zmienną z czasem fazą. Przypuszczamy bowiem, że po dostatecznie długim czasie ruch oscylatora powinien się jakoś ustabilizować. Trzeba zatem tak dobrać $A(t)$ i $\varphi(t)$, by

$$\begin{aligned} A(t) \cos \varphi(t) &= \cos \varepsilon t - e^{-\lambda t}, \\ A(t) \sin \varphi(t) &= \sin \varepsilon t. \end{aligned}$$

Łatwo zobaczyć, że rozwiązaniem tego problemu są

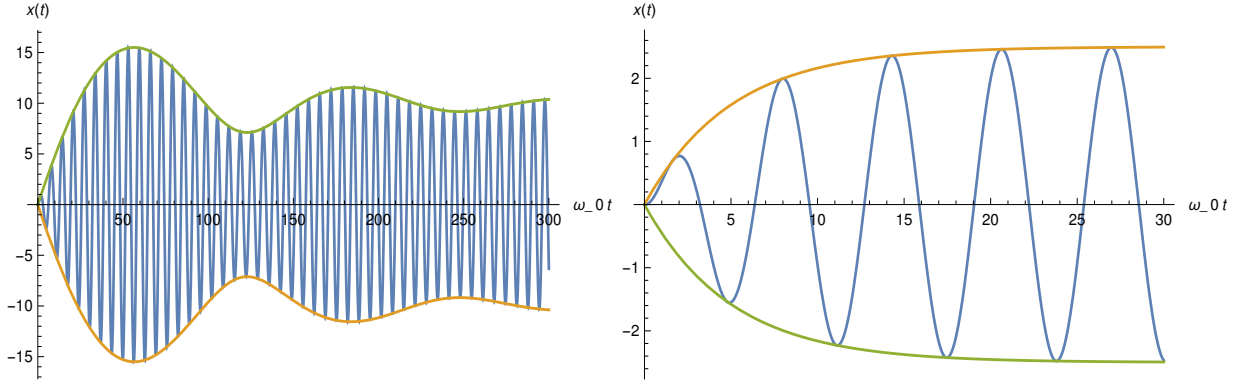
$$A(t) = \sqrt{1 - 2e^{-\lambda t} \cos \varepsilon t + e^{-2\lambda t}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sin \varepsilon t}{\cos \varepsilon t - e^{-\lambda t}}.$$

Zatem

$$x(t) \approx -\frac{F_0/m}{2\omega_0\varepsilon} \sqrt{1 - 2e^{-\lambda t} \cos \varepsilon t + e^{-2\lambda t}} \cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Amplituda wychYLENIA dąży, gdy $t \rightarrow \infty$ do $F_0/2m\omega_0\varepsilon$, ale “po drodze” wykazuje lokalne maksima i minima wypadające, gdy

$$\cos \varepsilon t + \frac{\varepsilon}{\lambda} \sin \varepsilon t = e^{-\lambda t}.$$



Rysunek 27: Wychylenia (w jednostkach $F_0/m\omega_0^2$) oscylatora z tłumieniem pobudzanego siłą harmoniczną $F(t) = F_0 \cos((\omega_0 + \varepsilon)t)$ w funkcji $\omega_0 t$. Po lewej: $\varepsilon/\omega_0 = -0.05$, $\lambda/\omega_0 = 0.01$; linie czerwona i zielona pokazują przebieg modulującego czynnika $A(t)/2|\varepsilon|$. Po prawej: $\varepsilon/\omega_0 = -0.01$, $\lambda/\omega_0 = 0.2$; linie czerwona i zielona pokazują przebieg modulującego czynnika $A(t)/2\lambda$. Wykresy zostały otrzymane z przybliżonych wzorów podanych w tekście; optycznie nie różnią się jednak od otrzymywanych ze ścisłego rozwiązania.

Maksima te, z których najwyższe jest pierwsze, mogą, jeśli $|\varepsilon/\lambda| \gg 1$, znacznie przekraczać asymptotyczną wartość amplitudy, co widać, gdy się ją zapisze eliminując z niej czynnik $e^{-\lambda t}$ z pomocą wypisanego wyżej warunku wyznaczającego ekstremum:

$$A_{\max/\min} = \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon t + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \sin^2 \varepsilon t}.$$

Typową zależność od czasu wychylenia oscylatora w tym reżimie pokazuje lewy panel rysunku 27.

3) Trzeci przypadek zachodzi, gdy $|\omega_0 - \Omega| \ll \lambda \ll \omega_0$, co oznacza, że tłumiony oscylator jest bardzo blisko rezonansu (i granicę ścisłego rezonansu można osiągnąć). W tym przypadku w pełnym rozwiązaniu można pominąć człony z kosinusami (bo są mnożone przez $\omega_0^2 - \Omega^2$, a zostawić należy te z sinusami. Ponadto, w mianowniku na przedzie można po prostu położyć $\omega_0^2 = \Omega^2$ i przybliżyć przez 1 czynnik $(\Omega^2 + \omega_0^2)/2\Omega\omega$. Po położeniu $\Omega = \omega_0 + \varepsilon$ otrzymuje się wtedy

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{2\lambda\omega_0} (\sin \omega_0 t \cos \varepsilon t + \cos \omega_0 t \sin \varepsilon t - e^{-\lambda t} \sin \omega t).$$

Jeśli jeszcze w ostatnim sinusie przybliżyć ω przez ω_0 , to można z pomocą takiej samej sztuczki, jak w poprzednim przypadku przedstawić przybliżone rozwiązanie w postaci

$$x(t) \approx \frac{F_0/m}{2\lambda\omega_0} A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

w której $A(t)$ i $\varphi(t)$ są dane tymi samymi wzorami, co w poprzednim przypadku (można tu jednak pod pierwiastkiem położyć $\varepsilon = 0$, co sprowadzi cały czynnik modulujący $A(t)$

do $1 - e^{-\lambda t}$). Typową zależność od czasu wychylenia oscylatora w tym reżimie pokazuje prawy panel rysunku 27.

W sytuacji, gdy $\lambda \sim |\Omega - \omega_0|$ trudno jest napisać jakieś przybliżenie ścisłego rozwiązania, które by czyniło charakter ruchu łatwo widocznym. Niemniej porównując oba panele rysunku 27 można oczekiwać, że przy przechodzeniu od $\lambda \ll |\Omega - \omega_0|$ do $|\Omega - \omega_0| \ll \lambda$ przez reżim, w którym $\lambda \sim |\Omega - \omega_0|$, “falowania” obwiedni (krzywych czerwonej i zielonej) powinny po prostu maleć.

Zadanie 2.11

Podać rozwiązanie równania ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m , częstości ω_0 i współczynniku tłumienia $2\gamma = 2m\lambda$ pobudzanego siłą $F(t)$ o dowolnej zależności od czasu.

Rozwiązanie:

Najogólniejsze rozwiązanie równania

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

gdzie $f(t) = F(t)/m$, ma postać sumy z dowolnymi współczynnikami dwu liniowo niezależnych rozwiązań $x_1(t)$ i $x_2(t)$ równania jednorodnego (z $f(t) = 0$) i jakiegokolwiek (tzw. szczególnego) rozwiązania równania niejednorodnego. Gdyby to było równanie pierwszego rzędu, szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego można by było znaleźć metodą uzmiennienia stałej w rozwiązaniu równania jednorodnego. Tu jednak mamy do czynienia z równaniem drugiego rzędu i jeśli przyjmiemy, że

$$x_{szcz}(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t),$$

to po wstawieniu tego $x_{sz}(t)$ do wyjściowego równania otrzymamy

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 x_1 + 2\dot{C}_1 \dot{x}_1 + C_1 \ddot{x}_1 + 2\lambda(\dot{C}_1 x_1 + C_1 \dot{x}_1) + \omega_0^2 C_1 x_1 + \\ \ddot{C}_2 x_2 + 2\dot{C}_2 \dot{x}_2 + C_2 \ddot{x}_2 + 2\lambda(\dot{C}_2 x_2 + C_2 \dot{x}_2) + \omega_0^2 C_2 x_2 = f(t). \end{aligned}$$

Nawet po wykorzystaniu tego, że x_1 i x_2 spełniają równanie jednorodne pozostaje jedno różniczkowe równanie na dwie nieznane funkcje (C_1 i C_2), i to równanie drugiego rzędu z zależnymi od czasu współczynnikami:

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 x_1 + 2\dot{C}_1 \dot{x}_1 + 2\lambda\dot{C}_1 x_1 + \\ \ddot{C}_2 x_2 + 2\dot{C}_2 \dot{x}_2 + 2\lambda\dot{C}_2 x_2 = f(t). \end{aligned}$$

Z kłopotu wybawia nas to, że wystarczy znaleźć jedno *jakiegokolwiek* rozwiązanie równania niejednorodnego. Możemy więc narzucić na C_1 i C_2 jakieś dodatkowe warunki pozwalające uprościć powyższe równanie. Okazuje się, że właściwą sztuczką jest zażądanie, by C_1 i C_2 nie były od siebie niezależne, lecz by spełniały związek

$$\dot{C}_1 x_1 + \dot{C}_2 x_2 = 0.$$

Związek taki oznacza, że także

$$\ddot{C}_1 x_1 + \dot{C}_1 \dot{x}_1 + \ddot{C}_2 x_2 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 = 0.$$

Wykorzystanie narzuconego warunku upraszcza równanie do równania pierwszego rzędu:

$$\dot{C}_1 \dot{x}_1 + \dot{C}_2 \dot{x}_2 = f(t).$$

Narzucony związek pozwala ponadto uzyskać zamknięte równania na C_1 i C_2 : podstawiając do powyższego równania

$$\dot{C}_2 = -\frac{x_1}{x_2} \dot{C}_1, \quad \text{lub} \quad \dot{C}_1 = -\frac{x_2}{x_1} \dot{C}_2,$$

otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{x_2}{\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2} f(t), \\ \dot{C}_2 &= \frac{x_1}{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1} f(t), \end{aligned}$$

które już łatwo scałkować.²⁷

W przypadku rozpatrywanego równania, dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego są²⁸

$$x_1(t) = e^{-\lambda t} \cos \omega t, \quad x_2(t) = e^{-\lambda t} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2},$$

i łatwo znaleźć, że $\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = -\omega e^{-2\lambda t}$. Po wstawieniu tych rozwiązań do powyższych wzorów znajdujemy, że

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{\omega} \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \sin \omega \tau, \\ C_2 &= \frac{1}{\omega} \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \cos \omega \tau, \end{aligned}$$

Zatem szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego ma postać

$$\begin{aligned} x_{\text{szcz}}(t) &= -\frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \cos \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \sin \omega \tau \\ &\quad + \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

Dolne granice całek są tu dowolne - różne ich wybory dają funkcje $C_1(t)$ i $C_2(t)$ różniące się o stałe, co daje rozwiązania $x_{\text{szcz}}(t)$ różniące się od siebie o pewną kombinację liniową rozwiązań $x_1(t)$ i $x_2(t)$ równania jednorodnego. Ponieważ pełne (najogólniejsze) rozwiązanie wyjściowego równania ma postać

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t + A_2 e^{-\lambda t} \sin \omega t - \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \cos \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \sin \omega \tau \\ &\quad + \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{\lambda \tau} \cos \omega \tau \\ &= A_1 e^{-\lambda t} \cos \omega t + A_2 e^{-\lambda t} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin[\omega(t-\tau)], \end{aligned}$$

²⁷Przy okazji: wspólny mianownik tych wyrażeń nazywa się *wrońskianem* od Józefa Marii Hoene Wrońskiego - polskiego fizyka, matematyka i filozofa, jednego z przedstawicieli polskiego mesjanizmu. Pamiętamy: Mickiewicz, Towiański i te sprawy. Zob. Görgy Spiro "Mesjasze". Choć, jak twierdzi Miłosz (w "Ziemi Ulro"), Hoene-Wroński "wierszoklety i jego mistycznej bandy" nie znoślił...

²⁸Ograniczamy się tu do przypadku $\omega_0^2 > \lambda^2$ - zob. Zadanie 2.6

więc wybór dolnych granic całek (czy też jednej całki, w ostatnim wariancie wzoru, który zakłada, że dolne granice obu całek są takie same) sprowadza się do przededefiniowania dowolnych stałych A_1 i A_2 , które wyznacza się z warunków początkowych. Jeśli warunki początkowe są zadane np. w $t = 0$, to wygodnym wyborem dolnych granic całek jest zero, gdyż wówczas²⁹ $x(0) = A$ i $\dot{x}(0) = \omega B - \lambda A$.

Innym sposobem uzyskania tego rozwiązania jest sprowadzenie wyjściowego równania różniczkowego drugiego rzędu (z niejednorodnością) do układu dwu równań liniowych pierwszego rzędu z niejednorodnością. Do znalezienia rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego można wtedy zastosować zwykłą metodę (już nie wymagającą sztuczek z wrońskianami) uziemienniania stałej, której rolę gra wtedy dwuwymiarowy wektor. (Sposób ten jest przedstawiony w moim skrypcie do analizy).

Jeszcze jedną ważną metodą znalezienia rozwiązania szczególnego jest metoda wykorzystująca funkcję Greena. W przypadku rozpatrywanego równania jest to funkcja $G(t - t')$ spełniająca równanie

$$\ddot{G} + 2\lambda\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t'),$$

w którym funkcja po prawej stronie jest deltą Diraca, czyli “funkcją”³⁰ równą zero wszędzie oprócz punktu $t = t'$, w którym przyjmuje ona wartość nieskończoną, tak iż dla dowolnego $a > 0$

$$\int_{-a}^a dt \delta(t) = 1, \quad \text{lub inaczej:} \quad \int_{-a}^a dt h(t) \delta(t) = h(0).$$

Rozwiązanie $x_{\text{szcz}}(t)$ równania $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ jest wtedy dane wzorem

$$x_{\text{szcz}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t').$$

Rzeczywiście: działając na obie strony tej równości operatorem różniczkowym $d^2/dt^2 + 2\lambda d/dt + \omega_0^2$ dostajemy po lewej odpowiednie pochodne x_{szcz} , a po prawej, wprowadziwszy ten operator pod znak całki i zadziaławszy nim na $G(t - t')$, dostajemy pod całką po dt' iloczyn $\delta(t - t')f(t')$; zgodnie z podaną wyżej właściwością funkcji delta, całka da wtedy $f(t)$. Aby znaleźć taką funkcję Greena wygodnie jest zapisać ją w postaci transformaty

²⁹Różniczkowanie $x_{\text{szcz}}(t)$ po t daje dwa wyrazy, ale oba one przy takim wyborze dolnej granicy całki znikają w $t = 0$: jeden bierze się z różniczkowania po t funkcji podcałkowej - wyraz ten znika ponieważ górną granicę całki kładziemy potem równą zero - a drugi z różniczkowania po t w górnej granicy całki; w wyniku tej operacji dostajemy funkcję podcałkową wziętą w punkcie, który był górną granicą całki, a to znów da zero, bo $\sin \omega(t - t) = 0$.

³⁰Ściśle rzecz biorąc delta Diraca jest dystrybucją, tj. funkcjonałem liniowym $F[h(t)]$ na przestrzeni funkcji $h(t)$, czyli mówiąc językiem praktycznym, maszynką, do której wrzuca się funkcję $h(t)$ i otrzymuje w rezultacie liczbę według przepisu, który jest liniowy względem funkcji $h(t)$. Przepis $F[h(t)] = h(0)$ definiuje deltę Diraca jako taką właśnie dystrybucję.

Fouriera³¹ z nieznaną na razie funkcją $\tilde{G}(\Omega)$:

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{G}(\Omega) e^{-i\Omega(t-t')}.$$

Ponieważ

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(t-t')},$$

równanie na funkcję $G(t - t')$ przyjmuje postać

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\lambda \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{G}(\Omega) e^{-i\Omega(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(t-t')},$$

czyli, po “wjechaniu” z operatorem różniczkowym pod całkę i zadziałaniu nim na funkcję eksponens,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \tilde{G}(\Omega) (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\lambda\Omega) e^{-i\Omega(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(t-t')}.$$

Widać, że równanie będzie spełnione, jeśli

$$\tilde{G}(\Omega) = -\frac{1}{\Omega^2 - \omega_0^2 + 2i\lambda\Omega} \equiv -\frac{1}{[\Omega + i\lambda + \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}][\Omega + i\lambda - \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}]}.$$

Dopóki $\lambda \neq 0$, osobliwości mianownika znajdują się poza osią rzeczywistą, po której biegnie całkowanie po $d\Omega$. Leżą one pod nią³² w punktach $\Omega_{\pm} = -i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \equiv -i\lambda \pm \omega$ płaszczyzny zespolonej zmiennej Ω . Umożliwia to jawne obliczenie całki metodą residuów.

³¹Ponieważ G jest funkcją zmiennej mającej interpretację czasu, przedstawiamy ją jako całkę z minusem w wykładniku funkcji eksponens. Transformaty Fouriera funkcji zmiennych przestrzennych, np. $\psi(\mathbf{x})$, przedstawiamy zaś w postaci całek z plusem w wykładniku:

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Konwencja w przypadku funkcji zmiennych przestrzennych $\mathbf{x}$ jest uzasadniona interpretacją transformaty Fouriera w mechanice kwantowej: reprezentuje one rozkład funkcji falowej $\psi(\mathbf{x})$ cząstki reprezentującej kwantowomechaniczny stan tejsze na funkcje falowe $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ stanów będących stanami własnymi operatora pędu, który ma postać $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$; funkcja $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ jest funkcją własną tego operatora z wartością własną $\hbar\mathbf{k}$. Odwrotny znak wykładnika w przypadku funkcji zmiennej mającej interpretację czasu bierze się oczywiście ze Szczególnej Teorii Względności: wykładnik funkcji $e^{-i\Omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ jest, jeśli $\hbar\Omega$ i $\hbar\mathbf{k}$ transformują się przy przejściu do innego układu odniesienia tak jak energia i pęd, niezmiennikiem. Wreszcie czynniki 2π w mianownikach całek są jak najbardziej właściwe w kontekście fizyki statystycznej: $d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3$ jest objętością elementarnej komórki przestrzeni pędowej. Tak więc wszystkie inne konwencje w jakich matematycy, a niestety często i fizycy, zapisują transformaty Fouriera (inne znaki w wykładnikach, czynniki 2π w innych miejscach lub, horrendum!, jakieś $\sqrt{2\pi}$) powinny być przez studentów fizyki wytupane i wybuczane!

³²Jak się łatwo zorientować, jest tak także i wtedy, gdy $\lambda^2 > \omega_0^2$, tj. gdy ω jest wielkością urojona.

Zgodnie z lematem Jordana,³³ gdy $t - t' > 0$, kontur całkowania należy domknąć dużym półokręgiem w dolnej półpłaszczyźnie (całka po tylko tym półokręgu znika w granicy nie-skończonego jego promienia). Oba punkty osobliwe, w których funkcja podcałkowa ma bieguny proste, leżą wewnątrz tego konturu. Otrzymujemy wtedy wyrażenie

$$\frac{-2\pi i}{2\pi} \left\{ \frac{-e^{-\lambda(t-t')} e^{-i\omega(t-t')}}{2\omega} + \frac{-e^{-\lambda(t-t')} e^{i\omega(t-t')}}{-2\omega} \right\}$$

które można zwinąć do sinusa. Jeśli zaś $t - t' < 0$ kontur całkowania należy domknąć dużym półokręgiem w górnej półpłaszczyźnie. Ponieważ wewnątrz konturu całkowania niema w tym przypadku żadnych osobliwości, całka daje zero. Zatem

$$G(t - t') = \theta(t - t') \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-t')} \sin \omega(t - t').$$

Funkcja $\theta(t - t')$ Heviside'a jest równa 1, gdy $t - t' > 0$ i zero, gdy $t - t' < 0$.

Rozwiązanie szczególne jest więc dane przez

$$x_{szcz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t - t') \frac{F(t')}{m\omega} e^{-\lambda(t-t')} \sin \omega(t - t') = \int_{-\infty}^t dt' \frac{F(t')}{m\omega} e^{-\lambda(t-t')} \sin \omega(t - t').$$

Funkcja $\theta(t - t')$ "obcina" górną granicę całki po dt' . Rozwiązanie to odpowiada znalezionemu poprzednio w przypadku szczególnego wyboru $(-\infty)$ dolnej granicy występującej tam całki.³⁴

³³Zob. mój skrypt z całkami zespolonymi.

³⁴Warto tu jeszcze uczynić następujący komentarz. Jeśli $\lambda \neq 0$, czyli gdy w układzie występuje tłumienie powodujące asymetrię względem zmiany kierunku czasu, tj. nieodwracalność ruchu (puszczony od tyłu film z nagrany takim ruchem ukaże ruch, który w sposób oczywisty jest "niefizyczny" i funkcja $x_{wspak}(t) = x_{szcz}(-t)$ go reprezentująca nie spełnia równania ruchu $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(-t)$). Funkcja Greena jest w takim przypadku całkowicie przyczynowa. Wyraża się to funkcją $\theta(t - t')$ równą zero gdy $t < t'$: na $x_{szcz}(t)$ w chwili t dane całką

$$x_{szcz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') f(t'),$$

wpływa tylko przebieg siły $f(t')$ w chwilach wcześniejszych od t .

Jeśli $\lambda = 0$, funkcja podcałkowa we wzorze na funkcję $G(t - t')$ ma osobliwości na osi rzeczywistej, czyli na drodze całkowania. Aby znaleźć $G(t - t')$, trzeba nadać całce sens, podając jakiś sposób ominięcia tych osobliwości. Sposobów jest kilka: można np. przesunąć oba bieguny infitezymalnie pod oś rzeczywistą, co da przyczynową funkcję Greena, tak jak wtedy, gdy $\lambda \neq 0$. Można też przesunąć oba nad oś, co da funkcję antyprzyczynową, równą zero gdy $t > t'$ - wartość $x_{szcz}(t)$ w chwili t będzie wtedy wyznaczona przez zachowanie się siły w przyszłości, ale ponieważ równanie ruchu jest teraz niezmiennicze względem odwrócenia czasu, przyszłość jest nieodróżnialna od przeszłości. Można wreszcie przesunąć jeden biegun pod oś, a drugi nad; prowadzi to do tzw. feynmanowskiej funkcji Greena, szeroko wykorzystywanej w kwantowej teorii pola (propagator feynmanowski!). Oczywiście wszystkie funkcje Greena uzyskane z różnych przepisów spełniają równanie $\ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t - t')$ - różnią się one o jakieś rozwiązanie ΔG równania jednorodnego $\Delta \ddot{G} + \omega_0^2 \Delta G = 0$.

Rozwiązanie z funkcją Greena można także otrzymać mniej “apriorycznie”, argumentując, że każdą siłę $F(t)$ można przedstawić w postaci superpozycji sił różnych harmoniczných zależnościach od czasu, czyli po prostu w postaci całki Fouriera

$$\frac{F(t)}{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{m} e^{-i\Omega t}.$$

Amplitudy $\tilde{F}(\Omega)/m$ są dane przez odwrotną transformatę:

$$\frac{\tilde{F}(\Omega)}{m} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{F(t)}{m} e^{i\Omega t}.$$

Ponieważ funkcja $F(t)$ jest rzeczywista, zespolone amplitudy $\tilde{F}(\Omega)$ spełniają związek $\tilde{F}^*(\Omega) = \tilde{F}(-\Omega)$. Z Zadania 2.8 znamy już rozwiązanie równania

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{\tilde{F}(\Omega)}{m} e^{-i\Omega t}.$$

Ma ono postać:

$$z(t, \Omega) = \frac{\tilde{F}(\Omega)}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\lambda\Omega} e^{-i\Omega t}.$$

(w porównaniu z Zadaniem 2.8 został tu zmieniony znak Ω). Rozwiązanie równania z dowolną siłą $F(t)/m$ musi więc być, dzięki liniowości, superpozycją takich rozwiązań, tj. całką po Ω :

$$z_{szcz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\lambda\Omega} e^{-i\Omega t}.$$

Wstawiając tu transformatę $\tilde{F}(\Omega)/m$ siły wyrażoną przez całkę z samej siły $F(t)$ i zamieniając kolejność całkowań otrzymujemy³⁵

$$x_{szcz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{F(t')}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\lambda\Omega} e^{i\Omega t'} e^{-i\Omega t},$$

co jest tym samym, co dostaliśmy metodą funkcji Greena. Aby to zobaczyć, wystarczy napisać

$$x_{szcz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{F(t')}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{-e^{-i\Omega(t-t')}}{[\Omega + i\lambda - \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}][\Omega + i\lambda + \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}]},$$

i wykonać całkę po $d\Omega$ metodą residuów, by otrzymać ($\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$)

$$x_{szcz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{F(t')}{m\omega} \theta(t - t') e^{-\lambda(t-t')} \sin[\omega(t - t')].$$

³⁵Powinniśmy tu jeszcze wziąć część rzeczywistą: $x_{szcz}(t) = \text{Re}(z_{szcz}(t))$, ale jak łatwo się zorientować (co potwierdza wynik końcowy), ponieważ $\tilde{F}^*(\Omega) = \tilde{F}(-\Omega)$, rozwiązanie $z_{szcz}(t)$ jest już samo z siebie rzeczywiste.

Zadanie 2.14

Rozwiązując równanie Newtona z siłą Lorentza $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, przedyskutować ruch cząstki o ładunku elektrycznym q i masie m w stałych i jednorodnych, wzajemnie prostopadłych polach: elektrycznym $\mathbf{E}$ i magnetycznym $\mathbf{B}$, w zależności od prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$ cząstki. Sprawdzić otrzymane rozwiązanie $\mathbf{r}(t)$ w przypadku znikania pola magnetycznego lub elektrycznego. Przedyskutować także wszystkie możliwe typy rzutów toru cząstki na płaszczyznę prostopadłą do pola magnetycznego w zależności od rzutu prędkości cząstki na tę płaszczyznę w chwili wybranej za początkową.

Rozwiązanie:

Równanie Newtona determinujące ruch cząstki ma (w tym nienormalnym układzie SI) postać

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = q (\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}).$$

Aby rozpisać je na poszczególne składowe, wybieramy (zgodnie z wielowiekową tradycją) oś z kartezyjskiego układu odniesienia tak, by pokrywała się z kierunkiem pola magnetycznego, a oś y kierujemy wzdłuż pola elektrycznego:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E, \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_z B.$$

Ponieważ pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ są stałe i jednorodne, możemy, bez straty ogólności, wybrać początek tego układu odniesienia w punkcie, w którym cząstka znajduje się w chwili $t = 0$. Warunkami początkowymi są więc

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{oraz} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Jeżeli $\mathbf{v}(t) = \mathbf{e}_x \dot{x} + \mathbf{e}_y \dot{y} + \mathbf{e}_z \dot{z}$, to

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \\ \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x B \dot{y} - \mathbf{e}_y B \dot{x}.$$

Rozpisane na składowe równanie Newtona ma więc postać

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_B \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\omega_B \dot{x} + \omega_B \frac{E}{B}, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Zostało tu wprowadzone tradycyjne oznaczenie tzw. częstości cyklotronowej

$$\omega_B \equiv \frac{qB}{m}.$$

Ponieważ trzecie równanie jest niezależne od dwu pierwszych, jego rozwiązanie jest oczywiste (uwzględniamy tu, że $z(0) = 0$): $z(t) = v_0^z t$. Zauważmy przy tym, że zadanie można

byłoby uogólnić odrzucając warunek prostopadłości pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$: można by wtedy przyjąć $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$: można by wtedy przyjąć $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$ i $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E + \mathbf{e}_z E^z$; dwa pierwsze równania wyznaczające ruch cząstki w płaszczyźnie xy pozostałyby wtedy bez zmian, a trzecie przybrałoby postać $\ddot{z} = qE^z/m$, nadal niezależną od dwu pozostałych i rozwiązaniem jego byłaby funkcja $z(t) = v_0^z t + (qE^z/2m)t^2$.

Dwa pierwsze równania można rozwiązać kilkoma sposobami. Tu podamy dwa z nich.

Sposób pierwszy: Drugie z równań, $\ddot{y} = -\omega_B \dot{x} + \omega_B(E/B)$, można przepisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{y} + \omega_B x - \omega_B \frac{E}{B} t \right) = 0,$$

z której wynika, iż

$$\dot{y}(t) + \omega_B x(t) - \omega_B \frac{E}{B} t = C_y.$$

Stałą C_y można natychmiast wyznaczyć z warunków początkowych obliczając lewą stronę powyższej równości dla $t = 0$. Ponieważ $x(0) = 0$, znajdujemy w ten sposób $C_y = v_0^y$. Podstawiając teraz tak znalezione $\dot{y}(t)$ do pierwszego równania, otrzymujemy zamknięte równanie różniczkowe drugiego rzędu na $x(t)$

$$\ddot{x} + \omega_B^2 x = \omega_B^2 \frac{E}{B} t + \omega_B v_0^y.$$

Jest to oczywiście równanie oscylatora harmonicznego o częstości ω_B poddanego działaniu zależnej od czasu “siły pobudzającej” $F(t) = m(\omega_B^2(E/B)t + \omega_B v_0^y)$. Ponieważ jednak owa siła jest od czasu zależna liniowo, byłoby mało praktyczne korzystać z wyprowadzonego w Zadaniu 2.11 ogólnego rozwiązania tego równania. (Ale jak ktoś chce, to proszę bardzo - to może być pożyteczne ćwiczenie.) Zamiast tego lepiej posłużyć się tu znaną sztuczką i przepisać to równanie w zmodyfikowanej postaci

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(x - \frac{E}{B} t - \frac{v_0^y}{\omega_B} \right) + \omega_B^2 \left(x - \frac{E}{B} t - \frac{v_0^y}{\omega_B} \right) = 0,$$

czyli w postaci $\ddot{\xi} + \omega_B^2 \xi = 0$ z $\xi(t) = x(t) - (E/B)t - (v_0^y/\omega_B)$, w której rozwiązanie jest już oczywiste: $\xi(t) = A \cos \omega_B t + D \sin \omega_B t$, czyli

$$x(t) = \frac{v_0^y}{\omega_B} + \frac{E}{B} t + A \cos \omega_B t + D \sin \omega_B t.$$

Warunki początkowe $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0^x$ pozwalają od razu wyznaczyć stałe A i D : $A = -v_0^y/\omega_B$, $D = v_0^x/\omega_B - E/B\omega_B$, co prowadzi do

$$x(t) = \frac{E}{B} t + \frac{v_0^y}{\omega_B} (1 - \cos \omega_B t) + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_B t.$$

Mając już jawne rozwiązanie $x(t)$, można teraz wrócić do równania na $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = v_0^y + \omega_B \frac{E}{B} t - \omega_B x(t).$$

Wstawiając tu znalezione $x(t)$, otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt} y = v_0^y \cos \omega_B t - \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_B t,$$

które już jest łatwo scałkować. Zauważmy jednak, że po prawej stronie tego równania nie występuje człon liniowy w t . Oznacza to, że $v^y(t) = \dot{y}(t)$ nie rośnie liniowo z czasem, mimo, że to właśnie w tym kierunku (na płaszczyźnie xy) na cząstkę działa stała siła pochodząca od pola elektrycznego $\mathbf{E}$! Całkując powyższe równanie, otrzymujemy

$$y(t) = C + \frac{v_0^y}{\omega_B} \sin \omega_B t + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \cos \omega_B t,$$

a stałą całkowania C ustalamy z warunku $y(0) = 0$: $C = -(v_0^x - E/B)/\omega_B$.

Sposób drugi: Dwa równania

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_B \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_B \dot{x} &= \omega_B \frac{E}{B}, \end{aligned}$$

po pomnożeniu drugiego przez i dodajemy do siebie stronami. Wprowadzamy przy tym zespoloną zmienną

$$\xi(t) = x(t) + iy(t),$$

na którą w ten sposób otrzymujemy równanie

$$\ddot{\xi} + i\omega_B \dot{\xi} = i\omega_B \frac{E}{B}.$$

Równanie to przepisujemy w równoważnej postaci

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\xi - \frac{E}{B} t \right) + i\omega_B \frac{d}{dt} \left(\xi - \frac{E}{B} t \right) = 0.$$

Na zespoloną zmienną $\eta(t) \equiv \xi(t) - (E/B)t$ mamy zatem równanie

$$\frac{d}{dt} (\dot{\eta} + i\omega_B \eta) = 0, \quad \text{czyli} \quad \dot{\eta} + i\omega_B \eta = \mathbb{C}.$$

Ma ono oczywiste rozwiązanie

$$\eta(t) = -i \frac{\mathbb{C}}{\omega_B} + \mathbb{D} e^{-i\omega_B t}.$$

Stąd

$$\xi(t) \equiv x(t) + iy(t) = \frac{E}{B}t - i\frac{\mathbb{C}}{\omega_B} + \mathbb{D}(\cos \omega_B t - i \sin \omega_B t).$$

Zespolone stałe $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ wyznaczamy teraz z warunków początkowych $\xi(0) = 0$ oraz $\dot{\xi}(0) = v_0^x + iv_0^y$. Daje to równania

$$\begin{aligned} -i\frac{\mathbb{C}}{\omega_B} + \mathbb{D} &= 0, \\ \frac{E}{B} - i\omega_B \mathbb{D} &= v_0^x + iv_0^y, \end{aligned}$$

czyli

$$\mathbb{D} = \frac{i}{\omega_B} \left(-\frac{E}{B} + v_0^x + iv_0^y \right), \quad \mathbb{C} = -\frac{E}{B} + v_0^x + iv_0^y.$$

Obydwoma metodami dostajemy zatem te same rozwiązania

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{B}t + \frac{v_0^y}{\omega_B}(1 - \cos \omega_B t) + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_B t, \\ y(t) &= \frac{v_0^y}{\omega_B} \sin \omega_B t + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) (-1 + \cos \omega_B t), \\ z(t) &= v_0^z t. \end{aligned}$$

Od razu zauważmy, iż z rozwiązania tego wynika, że jeśli $v_0^y = 0$, a $v_0^x = E/B$, to rzut cząstki na płaszczyznę xy przemieszcza się ruchem jednostajnym prostoliniowym wzdłuż osi x ze stałą prędkością $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x(E/B)$. Jest to możliwe, gdyż siła $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ma wtedy dokładnie kierunek siły $q\mathbf{E}$, tę samą co ona wartość, ale przeciwny zwrot. Siły te więc całkowicie się równoważą.

W ramach kontroli poprawności uzyskanego rozwiązania zbadamy jeszcze inne przypadki graniczne.

- **$\mathbf{B} = \mathbf{0}$.** W tym przypadku powinniśmy (na płaszczyźnie xy) otrzymać ruch jednostajnie przyspieszony w kierunku osi y i jednostajny w kierunku osi x . Pamiętając, że $\omega_B \propto B$, rozwijamy funkcje $\sin \omega_B t$ i $\cos \omega_B t$ i bierzemy granicę $\omega_B \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{B}t + \frac{v_0^y}{\omega_B} \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\omega_B^2 t^2 + \dots \right) + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) (\omega_B t + \dots) \\ &= \frac{E}{B}t + v_0^x t - \frac{E}{B}t + \mathcal{O}(\omega_B t^2) \longrightarrow v_0^x t. \end{aligned}$$

i podobnie

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{v_0^y}{\omega_B}(\omega_B t + \dots) + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) (-1 + 1 - \frac{1}{2}\omega_B^2 t^2 + \dots) \\ &= v_0^y t + \frac{1}{2} \frac{E}{B\omega_B} \omega_B^2 t^2 + \mathcal{O}(\omega_B t) \longrightarrow v_0^y t + \frac{qE}{2m} t^2. \end{aligned}$$

- $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Rozwiązania (na płaszczyźnie xy) redukują się w tym przypadku do

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{v_0^y}{\omega_B}(1 - \cos \omega_B t) + \frac{v_0^x}{\omega_B} \sin \omega_B t, \\y(t) &= \frac{v_0^y}{\omega_B} \sin \omega_B t + \frac{v_0^x}{\omega_B}(-1 + \cos \omega_B t).\end{aligned}$$

Pozwalają one znaleźć tor ruchu cząstki (przenosimy wyrazy bez funkcji trygonometrycznych na lewą stronę, podnosimy oba tak otrzymane równania stronami do kwadratu i dodajemy stronami do siebie):

$$\left(x - \frac{v_0^y}{\omega_B}\right)^2 + \left(y + \frac{v_0^x}{\omega_B}\right)^2 = \frac{v_0^{x2} + v_0^{y2}}{\omega_B^2}.$$

Torem ruchu jest więc w tym przypadku okrąg o promieniu $R = m|\mathbf{v}_{0\perp}|/q|\mathbf{B}|$, gdzie $\mathbf{v}_{0\perp}$ jest prostopadłą do pola magnetycznego składową prędkości początkowej. Położenie środka okręgu zależy od wartości składowych v_0^x i v_0^y . Długość $|\mathbf{v}_{0\perp}|$ tej prędkości nie ulega w trakcie ruchu zmianie, gdyż działająca na ładunek siła wytwarzana przez pole magnetyczne, będąc zawsze prostopadłą do chwilowej prędkości ładunku, nie wykonuje pracy:

$$W_B = \int dt \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}_B = \int dt \mathbf{v}(t) \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Okresem obiegu cząstki po okręgu jest $T = 2\pi/\omega_B$. Jeśli składowa v_0^z prędkości początkowej nie jest zerowa (ale pole elektryczne $\mathbf{E}$ nie ma składowej wzdłuż pola $\mathbf{B}$), cząstka porusza się po linii śrubowej (której rzutem na płaszczyznę xy jest okrąg) o skoku $l = v_0^z T$. Jeśli zaś pole elektryczne $\mathbf{E}$ ma niezerową składową wzdłuż pola $\mathbf{B}$, skok linii śrubowej rośnie liniowo z czasem.

W ogólnym przypadku, gdy niezerowe są oba pola ruch cząstki na płaszczyźnie xy jest złożeniem ruchu po okręgu z *dryfem* w kierunku osi x z prędkością równą $\mathbf{V}_{\text{dryf}} = \mathbf{e}_x(E/B)$. Aby się o tym przekonać można, tak jak w przypadku zerowego pola $\mathbf{E}$, dodać stronami podniesione do kwadratu równania, co da

$$\left(x - \frac{E}{B}t - \frac{v_0^y}{\omega_B}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{\omega_B}\left(v_0^x - \frac{E}{B}\right)\right)^2 = \frac{v_0^{y2}}{\omega_B^2} + \frac{1}{\omega_B^2}\left(v_0^x - \frac{E}{B}\right)^2.$$

Otrzymany związek x z y nie jest wprawdzie równaniem toru w ścisłym sensie, gdyż czas t nie został zeń całkowicie wyeliminowany, ale pozwala przekonać się o słuszności powyższej interpretacji: przedstawia on bowiem okrąg, którego środek przesuwają się równolegle do osi x ze stałą prędkością $\mathbf{V}_{\text{dryf}} = \mathbf{e}_x(E/B)$.

Jakościowo (i dość nieprecyzyjnie) powstawanie dryfu można zrozumieć tak. Jeśli cząstka naładowana (dodatnio) porusza się w płaszczyźnie xy po okręgu zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to w okolicach “godz. 9” jest przyspieszana przez pole elektryczne, a

w okolicach “godz. 3” jest przez to pole opóźniana. W rezultacie, w okolicach “godz. 12”, gdy porusza się w prawo ma większą prędkość niż w okolicach “godz. 6”, gdy porusza się w lewo. Skutkiem tego w czasie obiegi całego okręgu przemieści się trochę w prawo.

Ten sam wniosek można także otrzymać, jak teraz pokażemy, rozpatrując ten ruch względem układu poruszającego się w kierunku osi x z odpowiednio dobraną prędkością. Równanie Newtona $m \mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{mech}}$ jest niezmiennicze względem transformacji Galileusza, przy czym występujące w nim zwykłe siły “mechaniczne” $\mathbf{F}_{\text{mech}}$ (zaliczając do takich również siły grawitacji traktowanej po newtonowsku, czyli nierelatywistycznie) są takie same w dwu układach poruszających się jeden względem drugiego z prędkością $\mathbf{V}$. Siły elektromagnetyczne zachowują się jednak w zasadzie inaczej, gdyż teoria Maxwella jest niezmiennicza względem transformacji Lorentza, a nie Galileusza. W związku z tym, aby dowiedzieć się, jakie pola elektromagnetyczne $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ i $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ występują w układzie poruszającym się, gdy w układzie nieruchomym występują pola $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ i $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, przytoczymy tu dla bezpieczeństwa pełne relatywistyczne wzory i “przykroimy” je do małych względnych prędkości $\mathbf{V}$. Wzory te (w układzie SI) mają postać:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{V}}{c} \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{E} \right), \\ \mathbf{B}' &= \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{V}}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \right) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{V}}{c} \left(\frac{\mathbf{V}}{c} \cdot \mathbf{B} \right),\end{aligned}$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Po lewej stronie pola $\mathbf{E}'$ i $\mathbf{B}'$ są tu wzięte w czasoprzestrzennym punkcie $(t', \mathbf{r}')$, a pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ po prawej stronie w punkcie $(t, \mathbf{r})$ związanym z $(t', \mathbf{r}')$ transformacją Lorentza (ponieważ w naszym problemie pola są stałe i jednorodne, jest to tu nieistotne). Z dokładnością do wyrazów małych, gdy $|\mathbf{V}|/c \ll 1$ (a $\gamma \approx 1$) można te wzory przybliżyć przez

$$\mathbf{E}' \approx \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' \approx \mathbf{B},$$

a czas t' utożsamić z t . W układzie poruszającym się z prędkością $\mathbf{V}$ równanie Newtona będzie miało zatem postać ($\mathbf{v}'$ jest prędkością cząstki w primowanym układzie odniesienia)

$$m \frac{d}{dt'} \mathbf{v}' \approx m \frac{d}{dt} \mathbf{v}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \approx q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}).$$

Ponieważ po prawej stronie $\mathbf{v}' + \mathbf{V} \approx \mathbf{v}$, więc rzeczywiście w rozpatrywanym przybliżeniu prawa strona równania Newtona nie zmienia się (tj. siła jest taka sama, jak w układzie pierwotnym bo występująca w sile Lorentza prędkość $\mathbf{v}$ jest tą, jaką cząstka miała w tamtym układzie). Jeśli wybierzemy

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2},$$

to wówczas (ogólnie)

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E} + \mathbf{B} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2}.$$

Przy prostopadłych (w wyjściowym układzie odniesienia) polach $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ drugi człon w powyższym wzorze znika i w układzie poruszającym się z prędkością $\mathbf{V}$ o wartości $|\mathbf{V}| = E/B$ pole $\mathbf{E}$ zostaje wyeliminowane i ruch, jak już to analizowaliśmy, jest ruchem po okręgu.

Przeanalizujemy teraz charakter toru cząstki na płaszczyźnie xy w zależności od jej prędkości początkowej. Aby uprościć to zadanie, przyjmiemy, że $v_0^y = 0$. Nie ogranicza to ogólności, gdyż prędkość

$$\dot{y}(t) = v_0^y \cos \omega_B t + \left(\frac{E}{B} - v_0^x \right) \sin \omega_B t,$$

nieuchronnie zeruje się co jakiś czas (równanie $\dot{y}(t) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, bo funkcja $\sin \omega_B t$ jest okresowa i przyjmuje wszystkie możliwe wartości od $-\infty$ do $+\infty$). Zatem wybór $v_0^y = 0$ jest w gruncie rzeczy wyborem chwili od której liczony jest czas t . Przy tym uproszczeniu, równania, które trzeba analizować, to³⁶

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{B} t + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_B t, \\ y(t) &= \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) (-1 + \cos \omega_B t). \end{aligned}$$

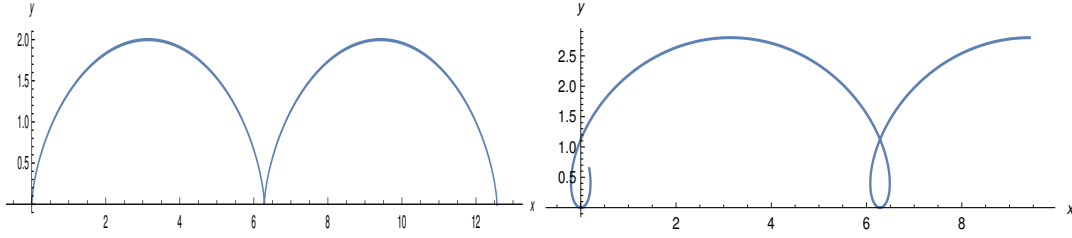
Możemy teraz rozpatrzeć różne przypadki (zgodnie z tym, co powiedzieliśmy wyżej, przypadki te wyczerpują zbiór wszystkich możliwości ruchu w skrzyżowanych polach $\mathbf{B}$ i $\mathbf{E}$; każdy ruch jest klasyfikowany podług wartości, jaką przyjmuje x -owa składowa prędkości w chwili, gdy zeruje się jej y -kowa składowa).

- $v_0^x = 0$. Rozwiązania upraszczają się do

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{B} t - \frac{E}{B\omega_B} \sin \omega_B t, \\ y(t) &= \frac{E}{B\omega_B} (1 - \cos \omega_B t). \end{aligned}$$

Tor ruchu jest w tym przypadku najpospolitszą cykloidą. Jest to krzywa płaska jaką zakresła punkt na obwodzie koła toczącego się po płaszczyźnie. Jest więc to ciąg z lekka spłaszczonych łuków opartych na prostej $y = 0$ (zmienna y nigdy nie jest ujemna) - coś jak warszawskie Arkady Kubickiego (zob. lewy panel rysunku 28); dwa sąsiednie łuki w miejscu stykania się ze sobą i z prostą tworzą dziubek. Charakter zmiany współrzędnych x i y w okolicach takich dziubków można wydobyć patrząc na powyższe wzory w granicy $t \sim 0$:

$$x(t) \approx \frac{E}{6B} \omega_B^2 t^3, \quad y(t) \approx \frac{E}{2B} \omega_B t^2.$$



Rysunek 28: Rzut na płaszczyznę xy toru cząstki naładowanej dodatnio poruszającej się w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, ($E, B > 0$). Położenia x i y są tu mierzone w jednostkach $E/B\omega_B$. Po lewej: $v_0^x = 0$ - torem są Arkady Kubickiego. Po prawej: $v_0^x = -0.4$ (w jednostkach E/B).

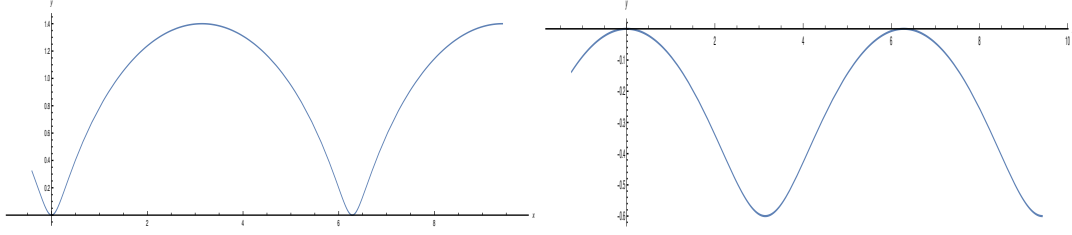
Wynika z tych przybliżeń, że gdy t rośnie od zera, rosną zarówno x jak i y , ale y rośnie szybciej - stąd ostrość “dziubków” (dzięki periodyczności ruchu w zmiennej y , ten sam charakter ma przechodzenie przez kolejne “dziubki”).

- $v_0^x < 0$. Rozwijając ściśle wzór na $x(t)$ wokół $t = 0$ znajdujemy, że $x(t) \approx v_0^x t$ - dla małych dodatnich t współrzędna x jest ujemna, czyli w swoim ruchu wzdłuż osi x punkt przez chwilę się cofa (w chwili $t = 0$ punkt jest w $x = 0$). Jest to jednak efekt chwilowy (wiemy, że w sumie występuje dryf do przodu i że jest on niezależny od wartości v_0^x). Ponadto, ponieważ $v_0^x < 0$, zmienna y nigdy nie jest ujemna. Wynika stąd, że “dziubki” arkad Kubickiego wygładzają się, tj. przechodzą w precelki. Oczywiście w punktach największego wzniesienia, tj. tam, gdzie $\dot{y} = 0$ i $y > 0$, czyli gdy $\cos \omega_B t = -1$ ($\omega_B t = \pi(2n + 1)$), prędkość w kierunku osi x nie znika, $\dot{x} = 2(E/B) - v_0^x > 0$ (na dole zaś, gdy $\dot{y} = 0$ i $x = 0$, tj. gdy $\cos \omega_B t = 1$ dla $\omega_B t = 2n\pi$, jak już stwierdziliśmy, prędkość w tym kierunku jest ujemna, $\dot{x} = v_0^x < 0$). Wielkość precelków oraz maksymalny ich zasięg w kierunku y są oczywiście tym większe, im bardziej ujemna jest wartość v_0^x (gdy $-v_0^x \gg E/B$ rzut toru przypomina raczej kolejne okręgi nieznacznie tylko przesunięte względem siebie w kierunku dryfu).
- $0 < v_0^x < E/B$. W tym przypadku zmienna $y(t)$ nadal nigdy nie jest ujemna, (bo $v_0^x - E/B < 0$) i narasta, gdy $t \gtrsim 0$ jak

$$y(t) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{E}{B} - v_0^x \right) \omega_B t + \dots,$$

W punktach o $y = 0$ (czyli, gdy $\cos \omega_B t = 1$) $\dot{x} = v_0^x > 0$; także w punktach najwyższego wzniesienia nad oś x -ów (gdy $\cos \omega_B t = -1$) $\dot{x} = 2(E/B) - v_0^x > 0$ (w istocie prędkość $\dot{x}(t)$ jest stale dodatnia i zmienia się w zakresie od v_0^x do $2(E/B) - v_0^x$). Najwyższe wzniesienie, czyli maksymalna wartość $y(t)$ maleje jednak ze wzrostem v_0^x i, gdy $v_0^x = E/B$, staje się ono równe zero, $y(t) \equiv 0$ - ruch przechodzi wtedy w analizowany już dryf.

³⁶Najlepiej mierzyć v_0^x w jednostkach E/B , x i y w jednostkach $E/B\omega_B$, a czas w jednostkach $1/\omega_B$; wtedy wzory, które analizujemy mają postać $x = t + (v - 1) \sin t$, $y = (1 - v)(1 - \cos t)$.



Rysunek 29: Rzut na płaszczyznę xy toru cząstki naładowanej dodatnio poruszającej się w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, ($E, B > 0$). Położenia x i y są tu mierzone w jednostkach $E/B\omega_B$. Po lewej: $v_0^x = 0.3$ (w jednostkach E/B) - dziubki Arkad Kubickiego się wygładzają. Po prawej: $v_0^x = 1.3$ (w jednostkach E/B) - wygładzone arkady przesuwają się poniżej osi y .

- $E/B < v_0^x < 2(E/B)$. W tym przypadku z kolei zmienna $y(t)$ nigdy nie jest dodatnia, prędkość $\dot{x}(t)$ jest też stale dodatnia. Jakościowo ruch wygląda podobnie jak w poprzednim przypadku, tj. dla $0 < v_0^x < E/B$, tylko wygładzone “cokoły” arkad są poniżej osi y i są przesunięte w prawo. Dokładniej: tory odpowiadające $0 < v_0^x < E/B$ i $E/B - v_0^x$ są względem siebie przesunięte o $2E/B\omega_B$ wzdłuż osi y i o $\pi E/B\omega_B$ wzdłuż osi x .
- $v_0^x = 2(E/B)$. W tym przypadku powstają dziubki w punktach o minimalnej (maksymalnie ujemnej) wartości zmiennej $y(t)$, czyli tam, gdzie $\dot{y} = 0$ i $y < 0$ - prędkość $\dot{x}$ jest tam równa zero (oczywiście $\dot{x} = v_0^x$ tam, gdzie $\dot{y} = 0$ i $y = 0$). Tor więc przypomina znów Arkady Kubickiego, tylko przesunięte w dół o $-2(E/B)/\omega_B$ i w prawo o $\pi E/B\omega_B$.
- $v_0^x > 2(E/B)$. Tor ponownie robi precelki, tj. $\dot{x} < 0$ tam, gdzie $\dot{y} = 0$ i $y < 0$.

Ściśle rzecz biorąc tylko krzywa “Arkady Kubickiego” nazywa się cykloidą; krzywe wygładzone i te z precelkami noszą inną zawiłą nazwę, która mi uleciała z głowy. Wszystkie te krzywe można jednak otrzymać jako tory wytaczane na płaszczyźnie przez punkt znajdujący się na kole toczącym się bez poślizgu po prostej równoległej do osi x . Jeśli koło toczy się po osi x , a punkt znajduje się na jego obwodzie, dostajemy cykloidę (“Arkady Kubickiego”). Jeśli punkt jest bliżej środka koła, otrzymujemy wygładzone cokoły arkad. Wreszcie, gdy punkt jest dalej od środka koła niż obwód, który toczy się po prostej, dostajemy precelki.

Przypomnienie

Jeśli siła $\mathbf{F}$ występująca w równaniu Newtona

$$\frac{d}{dt} m\mathbf{v} = \mathbf{F},$$

wyznaczającym ruch jednej cząstki jest potencjalna, tj.

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x}),$$

i potencjał $V(\mathbf{x})$ nie zależy jawnie od czasu, to

$$0 = \mathbf{v} \cdot \left(\frac{d}{dt} m\mathbf{v} - \mathbf{F} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 \right) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla V(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 \right) + \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}).$$

Stąd równanie Newtona ma w takim przypadku całkę pierwszą

$$\frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{x}) = E.$$

Stała E jest energią całkowitą (kinetyczną plus potencjalną). W przypadku ruchu jedno-wymiarowego wykorzystanie tej całki - tzw. całki pierwszej energii - sprowadza problem znalezienia ruchu do kwadratury (tj. do wykonania jednej całki):

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int dt = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},$$

Znak $\pm$ jest znakiem prędkości. Ruch może się odbywać tylko w obszarze, w którym $E \geq V(x)$. Punkty x_i , w których zachodzi równość $V(x_i) = E$ nazywają się *punktami zwrotnymi*. Cząstka poruszająca się w kierunku takiego punktu nie może go przekroczyć: albo po dojściu doń znak jej prędkości zmienia się na przeciwny i zaczyna się ona odeń oddalać (należy przy tym naogół “ręcznie” zmienić znak w powyższym wzorze), albo dociera do tego punktu zwrotnego dopiero w granicy $t \rightarrow \infty$. Z kolei punkty $\mathbf{x}_0$, w których $V'(\mathbf{x}_0) = 0$ (ogólniej, punkty $\mathbf{x}_0$, w których $\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) są punktami równowagi - znika z nich siła działająca na cząstkę. Jeśli $V''(\mathbf{x}_0) > 0$ (forma kwadratowa $\partial_i \partial_j V$ jest w $\mathbf{x}_0$ dodatnio określona), punkt $\mathbf{x}_0$ jest punktem równowagi trwałej.

W mechanice lagrangeowskiej, jeśli układ ma jeden stopień swobody, tzn. do podania jego położenia potrzebna jest tylko jedna współrzędna uogólniona $q(t)$, a jego lagrangian $L = L(q, \dot{q})$ nie zależy jawnie od czasu, wykorzystanie całki pierwszej, jaką jest “hamiltonian” (który często, choć nie zawsze, jest całkowitą energią mechaniczną układu mierzoną w układzie inercyjnym)

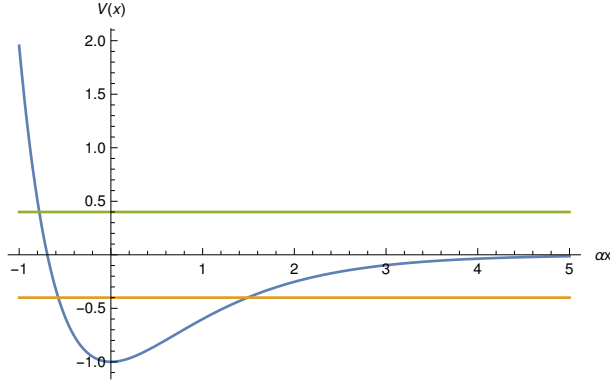
$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h = \text{const},$$

pozwała sprowadzić rozwiązanie problemu do podobnej kwadratury.

Często również w przypadku układów o większej liczbie stopni swobody istnienie innych wielkości zachowanych (stałych ruchu) pozwala sprowadzić rozwiązanie problemu do kwadratury. Typowym przykładem jest tu ruch masy m w polu siły centralnej (zob. rozdział 10), tj. siły potencjalnej $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r(dV(r)/dr)$, której potencjał zależy tylko od $r = |\mathbf{r}|$. Układ taki ma a priori 3 stopnie swobody; stałość w tym przypadku wektora momentu pędu $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ pozwala jednak ograniczyć ruch do płaszczyzny (dwa stopnie swobody), a stałość jego składowej prostopadłej do tej płaszczyzny pozwala wyeliminować jeszcze jedną zmienną i z pomocą całki pierwszej energii sprowadzić rozwiązanie do kwadratury. Stałości momentu pędu $\mathbf{L}$ dowodzi się różniczkując go po czasie:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}},$$

i wykorzystując równanie ruchu $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. Ponieważ $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, gdy $\mathbf{F} = -\mathbf{e}_r(dV/dr)$, otrzymujemy że $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$.



Rysunek 30: Krzywa niebieska: potencjał Morse’a $V(x)$ (na pionowej osi odłożono V/V_0). Przecięcie tej krzywej z linią zieloną (odpowiadającą $V = E > 0$) wyznacza punkt zwrotny x_- , a jej przecięcia z linią czerwoną ($V = E < 0$) wyznacza punkty zwrotne x_- i x_+ .

Zadanie 3.1

Znaleźć jednowymiarowy ruch cząstki o masie m w potencjale Morse’a

$$V(x) = V_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad V_0, \alpha > 0.$$

W przypadku ruchu z ujemną całkowitą energią E wyznaczyć jego okres. Pokazać, że gdy $\varepsilon \equiv V_0 - |E| \ll V_0$, ruch jest w przybliżeniu harmoniczny i sprawdzić, że częstość tego ruchu harmonicznego (czyli także okres) można znaleźć rozwijając potencjał wokół minimum. W przypadku $E > 0$, pokazać, że dla $t \rightarrow \pm\infty$ ruch jest niemal ruchem jednostajnym. Podać odpowiadającą tej granicy asymptotyczną postać $x(t)$.

Rozwiązanie:

Ruch może się odbywać jedynie w obszarze, w którym $E > V(x)$. Punkty zwrotne $x_{\mp}$, w których $E = V(x_{\mp})$, znajdujemy, podstawiając $z = e^{-\alpha x}$, z równości $E/V_0 = z^2 - 2z$:

$$z_{\mp} = 1 \pm \sqrt{1 + E/V_0}.$$

Ponieważ zmienna $z = e^{-\alpha x}$ musi być dodatnia, dwa rozwiązania istnieją tylko, gdy $E < 0$, tj. gdy $\sqrt{1 + E/V_0} < 1$; Jeśli $E \geq 0$, rozwiązaniem jest tylko z_- . Znajdujemy więc, że

$$e^{\alpha x_{\mp}} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + E/V_0}} = \frac{1 \mp \sqrt{1 + E/V_0}}{-E/V_0},$$

czyli:

$$x_- = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{V_0^2 + V_0 E} - V_0}{E} \right), \quad \text{gdy } E \geq 0,$$

$$x_{\mp} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{V_0 \mp \sqrt{V_0^2 - V_0 |E|}}{|E|} \right), \quad \text{gdy } E < 0.$$

Gdy $E = 0$, wzięcie granicy daje $x_- = -(1/\alpha) \ln 2$ (punkt x_+ istniejący, gdy $E \rightarrow 0^-$, ucieka wtedy do $+\infty$).

Dzięki zasadzie zachowania energii, zależność $x(t)$ wyznaczana przez równanie Newtona (które jest równaniem drugiego rzędu) jest, ponieważ badany ruch jest jednowymiarowy, dana jedną całką

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})}}.$$

Znaki $\pm$ odpowiadają dwu możliwym kierunkom prędkości $\dot{x}(t)$. Znalezione wyżej punkty zwrotne są punktami, w których zeruje się wyrażenie pod pierwiastkiem. Wyznaczają one dopuszczalne zakresy całkowania (wybory $x(t_0)$ i $x(t)$). Po podstawieniu $y = e^{\alpha x}$ otrzymujemy (przechodzimy tu dla wygody do całki nieoznaczonej traktując t_0 jak stałą całkowania)

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \pm \frac{1}{\alpha} \int \frac{dy}{\sqrt{E y^2 + 2V_0 y - V_0}}.$$

Oczywiście domyślnie zakres całkowania w zmiennej y pozostaje nadal ograniczony do obszaru, w którym wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne.

Zbadamy najpierw ruch zachodzący z $E > 0$, gdy jest tylko jeden punkt zwrotny x_- . Wprowadzając oznaczenie $a \equiv V_0/E > 0$, przepisujemy ostatnią równość w postaci

$$\sqrt{\frac{2\alpha^2 E}{m}}(t - t_0) = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2ay - a}} = \pm \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - b^2}},$$

po dokonaniu w całce podstawienia

$$z = y + a \quad b^2 \equiv a + a^2.$$

Całka jest standardowa. Po przeskalowaniu zmiennej, $\xi = z/b$, podstawiamy $\xi = \text{ch } \theta$ i otrzymujemy:³⁷

$$\sqrt{\frac{2\alpha^2 E}{m}}(t - t_0) = \pm \text{Arch}\left(\frac{z}{b}\right) \equiv \pm \ln\left(\frac{z}{b} + \sqrt{\frac{z^2}{b^2} - 1}\right).$$

³⁷Równoważność dwu postaci wyniku łatwo ustalić: jeśli $\text{Arch } \xi = \theta$, to $\text{ch } \theta = \xi$, a zatem, przy oznaczeniu $t \equiv e^\theta$,

$$\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \xi, \quad \text{czyli} \quad t^2 - 2\xi t + 1 = 0.$$

Stąd $(\text{Arch } \xi)_\pm = \theta_\pm = \ln(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$. Są oczywiście dwa rozwiązania, gdyż funkcja $\text{ch } \theta$ jest funkcją parzystą; łatwo więc zobaczyć, że $\theta_- = -\theta_+$, bo $\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) + \ln(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = \ln 1 = 0$. Tym samym w rozwiązaniu wyżej można wziąć dowolne z tych dwu rozwiązań, bo i tak przed całym wyrażeniem występuje $\pm$.

Odwikłując i wracając do zmiennej y mamy stąd

$$y + a = \sqrt{a + a^2} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2\alpha^2 E}{m}} (t - t_0) \right).$$

Pamiętając, że $a = V_0/E$, a $y = \exp(\alpha x)$, otrzymujemy ostatecznie ruch w postaci

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{V_0}{E} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{E}{V_0}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2\alpha^2 E}{m}} (t - t_0) \right) \right] \right\}.$$

Widać, że $x(t_0) = x_-$, tj. w chwili $t = t_0$ cząstka osiąga punkt zwrotny i w tejże chwili, co także widać, $\dot{x}(t_0) = 0$ - prędkość zeruje się, gdyż w punkcie zwrotnym musi ona zmienić znak na przeciwny. Widać też, że dla dużych wartości $|t - t_0|$ funkcja $\operatorname{ch}(\sqrt{2\alpha^2 E/m}(t - t_0))$ staje się niemal czystą funkcją $\frac{1}{2} \exp(\sqrt{2\alpha^2 E/m}|t - t_0|)$, a zatem (-1 można pominąć, gdy kosinus hiperboliczny jest duży)

$$x(t) \approx \sqrt{\frac{2E}{m}} |t - t_0| + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_0^2}{E^2} + \frac{V_0}{E}} \right), \quad \text{gdy} \quad |t - t_0| \gg \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

Ruch przechodzi wtedy w ruch jednostajny. W taki sam sposób ruch jednostajny (dla wszystkich czasów) daje granica $\alpha \rightarrow \infty$, w której zanika potencjał $V(x)$.

W przypadku ruchu o $E < 0$ przekształcamy związek całkowy (taki sam, jak poprzednio) w związek

$$\sqrt{\frac{2\alpha^2 |E|}{m}} (t - t_0) = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2ay - a - y^2}},$$

którym teraz parametr $a = V_0/|E|$. Zatem

$$\sqrt{\frac{2\alpha^2 |E|}{m}} (t - t_0) = \pm \int \frac{dz}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

gdzie teraz $z = y - a$ i $b^2 = a^2 - a$, przy czym wciąż $b^2 > 0$, gdyż $a > 1$ (ruch może zachodzić tylko tam, gdzie $|E| < V_0$). Ponownie traktując t_0 jak stałą całkowania możemy przyjąć, że całka daje funkcję $\arccos$ i po prostych przekształceniach otrzymujemy (dzięki parzystości funkcji cosinus znaki $\pm$ dają to samo), że

$$z = y - a = \sqrt{a^2 - a} \cos \left(\sqrt{\frac{2\alpha^2 |E|}{m}} (t - t_0) \right),$$

czyli ostatecznie

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - V_0 |E|} \cos \left(\sqrt{2\alpha^2 |E|/m} (t - t_0) \right)}{|E|} \right\}.$$

Zależność położenia od czasu jest okresowa. Okresem T ruchu jest³⁸

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2|E|\alpha^2}}.$$

Ruch nie jest więc harmoniczny, bo jego częstość zależy od całkowitej energii (w ruchu harmonicznym częstość jest niezależna od energii), czyli od amplitudy odchylenia od położenia równowagi, którym tu jest punkt $x = 0$ (punkt, w którym znika pierwsza pochodna $V(x)$). Łatwo zobaczyć, że punkty, w których zeruje się $\dot{x}(t)$ (w punktach tych sinus znika, a cosinus jest równy ∓ 1) pokrywają się z wyznaczonymi wcześniej punktami zwrotnymi $x_{\mp}$.

Gdy wychylenia z położenia równowagi $x = 0$ są niewielkie, tj. gdy $\varepsilon \equiv V_0 - |E| \ll V_0$, ruch staje się w przybliżeniu harmoniczny, a okres takiego ruchu jest w przybliżeniu równy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\alpha^2 V_0}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{V_0}\right)^{-1/2} \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\alpha^2 V_0}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2V_0}\right).$$

Pierwszy (główny) wyraz w częstości $\omega = 2\pi/T$ można oczywiście znaleźć rozwijając potencjał $V(x)$ wokół położenia równowagi

$$V(x) = -V_0 + \frac{1}{2} 2V_0\alpha^2 x^2 - V_0\alpha^3 x^3 + \frac{7}{12} V_0\alpha^4 x^4 + \dots$$

i przyrównując $2V_0\alpha^2$ do $m\omega^2$. Sposób obliczenia poprawki do okresu zależnej od energii ε jest treścią Zadania 3.7. Oczywiście, gdy wychylenia są małe, ściśle rozwiązanie można przybliżyć następująco

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{\varepsilon/V_0} \cos\left(\sqrt{2\alpha^2 V_0/m}(t - t_0)\right)}{1 - \varepsilon/V_0} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha^2 V_0}} \cos\left(\sqrt{2\alpha^2 V_0/m}(t - t_0)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Widać, że zależność amplitudy A drgań jest, tak jak powinna być, związana z całkowitą energią mechaniczną ruchu ε (w której energia potencjalna jest liczona od “dna” potencjału) wzorem $A = \sqrt{2\varepsilon/m\omega^2}$.

³⁸Argument cosinusa można więc zapisać w postaci $(2\pi/T)(t - t_0)$, z której widać, że przy $n \in \mathbb{Z}$, $x(t_0 + nT) = x_+$, a $x(t_0 + (2n+1)T/2) = x_-$.

Zadanie 3.6

Znaleźć w pierwszym przybliżeniu zmianę δT okresu T jednowymiarowego ruchu cząstki o masie m spowodowaną małą zmianą $\delta V(x)$ wiążącego tę cząstkę w ograniczonym obszarze potencjału $V(x)$, przy niezminionej całkowitej energii E ruchu. Zakładamy tu, że zmiana $\delta V(x)$ potencjału nie zmienia jakościowo charakteru ruchu (cząstka nadal pozostaje uwięziona w ograniczonym obszarze). Obliczyć w tym przybliżeniu δT , gdy $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, a $\delta V(x) = \frac{1}{4}m\beta x^4$, gdzie $\beta > 0$. Sprawdzić ten wynik na przykładzie potencjału z Zadania 3.2

Rozwiązanie:

Jeśli x_1 i x_2 są punktami zwrotnymi ruchu okresowego cząstki w potencjale $V(x)$, to

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},$$

a po zmianie potencjału

$$\frac{T + \delta T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x) - \delta V(x)}}.$$

Przy zmianie potencjału (przy ustalonej energii E ruchu) przesunięciu ulegają w ogólności także punkty zwrotne. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{2} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \left\{ \int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x) - \delta V(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right\} \\ &\equiv \sqrt{\frac{m}{2}} \left(F[x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, V + \delta V] - F[x_1, x_2, V] \right). \end{aligned}$$

W pierwszym przybliżeniu zmianę δT powinno się dać otrzymać z tego wzoru dokonując rozwinięcia pierwszej całki wokół $V(x)$, x_1 oraz x_2 .

Konieczny tu jest pewien komentarz. Mamy do czynienia z rozwijaniem nie funkcji, lecz funkcjonału, czyli odwzorowania z przestrzeni funkcji $V(x)$ w $\mathbb{R}$. W istocie bowiem (przy ustalonej energii ruchu) $x_{1,2} = x_{1,2}[V]$. Zatem bardziej prawidłowy byłby zapis $F[x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, V + \delta V] = \tilde{F}[V + \delta V]$, a rozwijanie należałoby więc tu rozumieć w sensie funkcjonalnym:

$$\begin{aligned} \tilde{F}[V + \delta V] - \tilde{F}[V] &= \int_{x_1}^{x_2} dx \delta V(x) \frac{\delta \tilde{F}[V]}{\delta V(x)} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \delta V(x) \left\{ \frac{\delta F[x_1, x_2, V]}{\delta V(x)} + \frac{\partial F[x_1, x_2, V]}{\partial x_1} \frac{\delta x_1[V]}{\delta V(x)} + \frac{\partial F[x_1, x_2, V]}{\partial x_2} \frac{\delta x_2[V]}{\delta V(x)} \right\}. \end{aligned}$$

Z praktycznego punktu widzenia można jednak potraktować $F[x_1, x_2, V]$ jak “funkcjofunkcjonał”, tj. funkcję x_1 i x_2 oraz funkcjonał $V(x)$ i rozwijać w tych trzech zmiennych niezależnie (zawsze, jeśli to konieczne, można na końcu odpowiednio skorelować zmiany

δx_1 i δx_2 ze zmianą $\delta V(x)$). Okaze się bowiem, że (przy odpowiednim potraktowaniu - zob. niżej) przesunięcia $\delta x_{1,2}$ punktów zwrotnych nie wpływają na zmianę okresu T .

Zgodnie z powyższymi uwagami, chciałoby się zatem napisać:

$$\begin{aligned} & F[x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, V + \delta V] - F[x_1, x_2, V] \\ &= \delta x_1 \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1, x_2, V} + \delta x_2 \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{x_1, x_2, V} + \int_{x_1}^{x_2} dx \delta V(x) \left. \frac{\partial}{\partial V} \frac{1}{\sqrt{E - V}} \right|_{x_1, x_2, V} + \dots \end{aligned}$$

Pojawia się tu jednak kłopot:

$$\delta x_1 \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1, x_2, V} = -\delta x_1 \frac{1}{\sqrt{E - V(x_1)}},$$

(pochodna funkcji F po x_1 będącym dolną granicą całki jest po prostu równa minus funkcji podcałkowej obliczonej w x równym x_1 . Ale w tym punkcie właśnie $E - V(x) = 0$! Tak samo nieskończoność da wyraz z pochodną F po x_2 . Konieczny jest więc jakiś chwyt, bo oczywiście wyjściowe wyrażenie na δT jest zupełnie "zdrowe" i żadne nieskończoności w nim nie występują.

Chwyt polega na napisaniu wzoru na δT w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{2} &= 2\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \int_{x_1 + \delta x_1}^{x_2 + \delta x_2} dx \sqrt{E - V(x) - \delta V(x)} - \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{E - V(x)} \right\} \\ &\equiv 2\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial E} \left(G[x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, V + \delta V] - G[x_1, x_2, V] \right). \end{aligned}$$

Zysk jest podwójny: po pierwsze nie wystąpią teraz nieskończoności, a po drugie

$$\delta x_1 \left. \frac{\partial G}{\partial x_1} \right|_{x_1, x_2, V} = -\delta x_1 \sqrt{E - V(x_1)} = 0.$$

Tak samo znika przyczynek do δT od przesunięcia punktu x_2 ! Otrzymujemy zatem prosty wzór:

$$\frac{\delta T}{2} = -\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\delta V(x)}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Wzór ten można zapisać inaczej, dokonując zamiany zmiennych $x = x_0(t)$, gdzie $x_0(t)$ jest po prostu funkcją zadającą ruch cząstki od x_1 w $t = 0$ do x_2 w $t = T/2$ w potencjale niezaburzonej $V(x)$, i korzystając z tego, że

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx_0(t)}{\sqrt{E - V(x_0(t))}} = dt.$$

Po takiej zamianie zmiennych otrzymujemy wzór

$$\frac{\delta T}{2} = -\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{T/2} dt \delta V(x_0(t)),$$

lub

$$\delta T = -\frac{\partial}{\partial E} \oint dt \delta V(x_0(t)),$$

gdzie kółeczko na całce oznacza całkowanie po całym okresie T ruchu niezaburzonego (ta druga, bardziej ozdobna postać wzoru jest jednak mało użyteczna praktycznie).

W przypadku, gdy $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, a $\delta V(x) = \frac{1}{4}m\beta x^4$ ruch $x_0(t)$ cząstki o masie m i ustalonej energii E w potencjale $V(x)$ od $x_1 = -\sqrt{2E/m\omega^2}$ do $x_2 = +\sqrt{2E/m\omega^2}$ (punkty zwrotne wyznaczone przez równość $V(x_{1,2}) = E$) jest dany wzorem

$$x_0(t) = -\sqrt{2E/m\omega^2} \cos \omega t.$$

Zatem

$$\frac{\delta T}{2} = -\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{\pi/\omega} dt \frac{1}{4}m\beta \frac{4E^2}{m^2\omega^4} \cos^4 \omega t = -\frac{2\beta E}{m\omega^5} \int_0^\pi d\theta \cos^4 \theta.$$

Całka daje

$$\int_0^\pi d\theta \cos^4 \theta = \frac{1}{16} \int_0^\pi d\theta (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 = \frac{3\pi}{8},$$

(po podniesieniu nawiasu do czwartej potęgi niezerowy wynik daje tylko całka ze środkowego wyrazu $6e^{i0}$; pozostałe wyrazy dają całki po pełnym okresie, które znikają) i

$$\delta T = -\frac{3\pi\beta E}{2m\omega^5}.$$

Można też wykonać bezpośrednio całkę we wzorze

$$\frac{\delta T}{2} = -\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{4}m\beta \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{x^4}{\sqrt{E - V(x)}}.$$

Mathematica daje³⁹

$$\begin{aligned} \int dx \frac{x^4}{\sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}} &= -\frac{1}{2m^2\omega^4} x \sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} (3 + m\omega^2 x^2) \\ &+ \frac{3E^2}{\sqrt{2}m^{5/2}\omega^5} \operatorname{arctg} \left(\frac{x \sqrt{m\omega^2/2}}{\sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}} \right). \end{aligned}$$

Przy obliczeniu tego wyrażenia w granicach x_2 i x_1 pierwszy człon daje zero, a argument arctg jest równy odpowiednio $+\infty$ i $-\infty$ i po prostych przekształceniach otrzymuje się ten sam wynik, co poprzednio. Bez *Mathematici* wymaga to jednak sporo cierpliwości...

³⁹Pewnie po odpowiednim przeskalowaniu bestia i tak podstawia $y = \sin \theta$, tylko potem wraca do wyjściowej zmiennej...

Wynik ten można sprawdzić na przykładzie potencjału

$$V(x) = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2(x/a)} = -V_0 + \frac{1}{2} \frac{2V_0}{a^2} x^2 - \frac{2V_0}{3a^4} x^4 + \dots$$

badanego w Zadaniu 3.2. Z porównania widać, że należy przyjąć $\omega = \sqrt{2V_0/ma^2}$ oraz $\beta = -(8V_0/3ma^4)$. Podstawienie do otrzymanego wzoru na zmianę okresu daje

$$\delta T = -\frac{3\pi E}{2m} \left(-\frac{8V_0}{3ma^4} \right) \frac{m^2 a^4}{4V_0^2} \sqrt{\frac{ma^2}{2V_0}} = \frac{\pi E}{V_0} \sqrt{\frac{ma^2}{2V_0}},$$

co (po utożsamieniu E z ε) jest dokładnie poprawką do okresu otrzymaną w Zadaniu 3.2 z rozwiązania ścisłego.

Zadanie 3.7

Znaleźć zmianę δT okresu T jednowymiarowego ruchu cząstki o masie m spowodowaną małą zmianą $\delta V(x) = \frac{1}{3}m\gamma x^3$ potencjału $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ wiążącego cząstkę w ograniczonym obszarze przy niezmiennionej całkowitej energii mechanicznej E ruchu. Wykorzystując ten wynik znaleźć pierwszą poprawkę (tj. poprawkę proporcjonalną do energii E ruchu), o którą różni się okres ruchu w potencjale Morse'a (Zadanie 3.1) od okresu ruchu w potencjale oscylatora harmonicznego o odpowiedniej częstości i porównać wynik z poprawką otrzymaną z odpowiedniego rozwinięcia okresu wyznaczonego ze ścisłego rozwiązania. Wyrazić także zmianę δT okresu, gdy potencjał jest dokładnie równy $V(x) + \delta V(x)$ w postaci nieskończonego szeregu i przypadku potencjału ściśle równego $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{3}m\gamma x^3$ powiedzieć, kiedy ten szereg jest zbieżny.

Rozwiązanie:

W przypadku poprawki $\delta V(x) = \frac{1}{3}m\gamma x^3$ do potencjału oscylatora harmonicznego trzeba ścisły wzór na zmianę $\delta T/2$ (połowy) okresu z Zadania 3.6 rozwinąć do drugiego rzędu. Istotnie, pierwsza poprawka w tym przypadku znika:

$$\frac{\delta T}{2} = -\frac{\partial}{\partial E} \int_0^{\pi/\omega} dt \frac{1}{3}m\gamma \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{3/2} (-\cos^3 \omega t) \propto \int_0^\pi d\theta \cos^3 \theta = 0.$$

Spróbujemy więc napisać ogólny wzór na rozwinięcie poprawki $\delta T/2$ do połowy okresu według potęg δV . Rozwinięcie to powinno mieć ogólną postać:

$$\frac{\delta T}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} dx f_n(x) (\delta V(x))^n.$$

Aby ustalić postać współczynnika $f_n(x)$, trzeba znów wykazać się sprytem. Przepisujemy mianowicie ścisły wzór

$$\frac{\delta T}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \left\{ \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x) - \delta V(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right\},$$

w równoważnej formie⁴⁰

$$\frac{\delta T}{2} = \frac{2^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \left\{ \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} dx [E - V(x) - \delta V(x)]^{\frac{2n-1}{2}} - \int_{x_1}^{x_2} dx [E - V(x)]^{\frac{2n-1}{2}} \right\},$$

i następnie rozwijając wyrażenie w nawiasie klamrowym do n -tego rzędu włącznie bierzemy z niego tylko wyraz, w którym występuje n -ta potęga δV (pozostałe wyrazy odrzucamy). Tak jak poprzednio (Zadanie 3.6) branie n -tego wyrazu rozwinięcia tego wzoru w przyrostach δV oraz $\delta x_{1,2}$ (tzn. branie takich wyrazów, w których suma potęg δx_1 , δx_2 i δV jest równa n) wymaga obliczania $[E - V(x)]^{\frac{2k-1}{2}}$, z $1 \leq k \leq n-1$ w punkcie $x = x_1$

⁴⁰ $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$, jak by ktoś nie wiedział...

lub $x = x_2$, co zawsze daje zero i zostaje zawsze tylko ten jeden wyraz,⁴¹ w którym jest $(-\delta V)^n$. n -ty zaś, szukany, wyraz rozwinięcia funkcjonalnego w δV daje⁴²

$$G[V + \delta V] = \dots \frac{1}{n!} \int_{x_1}^{x_2} dy_1 \delta V(y_1) \dots \int_{x_1}^{x_2} dy_n \delta V(y_n) \frac{\delta^n G[V]}{\delta V(y_1) \dots \delta V(y_n)} + \dots$$

Znaleziony w ten sposób wyraz wykorzystujemy w wypisanym wyżej wzorze na rozwinięcie $\delta T/2$ według potęg δV . Prowadzi to natychmiast do wzoru (drugą jego postać otrzymuje się dokonując takiego samego podstawienia, jak w Zadaniu 3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{2} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{[\delta V(x)]^n}{\sqrt{E - V(x)}} \\ &= \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_0^{T/2} dt [\delta V(x_0(t))]^n. \end{aligned}$$

wyrażającego całkowitą zmianę okresu, tj. $\delta T = T[V + \delta V] - T[V]$, w postaci nieskończonego szeregu. Szereg ten oczywiście może być niezbieżny: np. w rozważanym tu przypadku poprawki $\delta V(x) = \frac{1}{3}m\gamma x^3$ do $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, musi on być rozbieżny dla energii E wyższych od pewnej krytycznej energii E_{cr} (będącej funkcją m , ω i γ), gdyż poprawka δV zmienia globalny charakter potencjału - nie rośnie on już do $+\infty$ w obu kierunkach - co umożliwia cząstce o energii wyższej niż $V_{\text{max}} \equiv V(x_{\text{max}}) + \delta V(x_{\text{max}}) = m\omega^6/6\gamma^2$, gdzie $x_{\text{max}} = -\omega^2/\gamma$, ucieczkę do nieskończoności; ruch cząstki o takiej energii nie jest okresowy i pytanie o poprawkę δT nie ma już wtedy sensu (zob. rysunek 31). Oznacza to także, że już dla E bliskich E_{cr} , kiedy to, jak wiadomo z Zadań 3.4 i 3.5 okres T rośnie do nieskończoności, szereg może nie być zbieżny; mogłoby też się zdarzyć tak, że dla wszystkich wartości energii szereg ten jest tylko szeregiem asymptotycznym.

Biorąc wyraz z $n = 2$ (jak ustaliliśmy, wyraz z $n = 1$ daje tu zero), otrzymujemy

$$\frac{\delta T}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} \int_0^{\pi/\omega} dt \frac{1}{9} m^2 \gamma^2 \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^3 \cos^6 \omega t = \frac{1}{2} \frac{6}{9} E m^2 \gamma^2 \frac{8}{m^2 \omega^7} \int_0^\pi d\theta \cos^6 \theta.$$

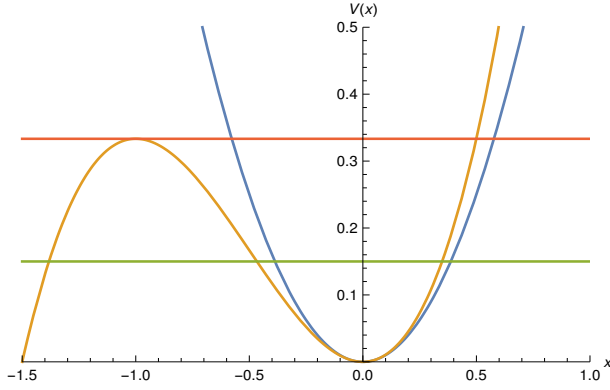
Ogólnie (całkę obliczamy, tak jak w Zadaniu 3.6)

$$\int_0^\pi d\theta \cos^{2k} \theta = \frac{\pi}{2^{2k}} \binom{2k}{k} = \frac{\pi}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{k!k!}, \quad \int_0^\pi d\theta \cos^{2k+1} \theta = 0.$$

⁴¹Wyższe wyrazy rozwinięcia tego wzoru, tj. te z potęgami δV wyższymi niż n -ta będą już osobliwe. Na tym polega właśnie sztuczka: aby znaleźć wyraz z $(\delta V)^n$ rozwijamy wzór z n -tą pochodną po energii E .

⁴²Korzystamy tu ze standardowego wzoru rachunku funkcjonalnego

$$\begin{aligned} \frac{\delta G[V]}{\delta V(y)} &= \frac{\delta}{\delta V(y)} \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{G}(V(x)) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left. \frac{\partial \mathcal{G}(V)}{\partial V} \right|_{V=V(x)} \frac{\delta V(x)}{\delta V(y)} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left. \frac{\partial \mathcal{G}(V)}{\partial V} \right|_{V=V(x)} \delta(x - y) = \left. \frac{\partial \mathcal{G}(V)}{\partial V} \right|_{V=V(y)}. \end{aligned}$$



Rysunek 31: Potencjały $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ (krzywa niebieska) i $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ (krzywa pomarańczowa). Na pionowej osi odłożono $V(x)/(m\omega^2/2)$. Poziomymi liniami: zieloną i czerwoną zaznaczono dwie możliwe całkowite energie E ruchu: dla pierwszej szereg, którym wyraża się poprawka do okresu może być zbieżny; dla drugiej, równej E_{cr} już nie.

Całka z $\cos^6 \theta$ wynosi więc $5\pi/16$ i ostatecznie

$$\delta T = \frac{5}{3} \frac{\pi \gamma^2 E}{m\omega^7} = \frac{5\pi}{18} \frac{E}{\omega V_{\text{max}}}.$$

Potencjał Morse'a

$$V(x) = V_0 (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) = -V_0 + \frac{1}{2}(2V_0\alpha^2)x^2 - (V_0\alpha^3)x^3 + \frac{7}{12}V_0\alpha^4x^4 + \dots,$$

z Zadania 3.1 odpowiada potencjałowi oscylatora harmonicznego o $\omega = \sqrt{2V_0\alpha^2/m}$ z poprawkami (w pierwszym nietrywialnym przybliżeniu) $\delta_3 V(x) = \frac{1}{3}m\gamma x^3$ z $\gamma = -3V_0\alpha^3/m$ oraz $\delta_4 V(x) = \frac{1}{4}m\beta x^4$ z $\beta = 7V_0\alpha^4/3m$. Nietrudno się zorientować, że zarówno poprawka $\delta_3 V(x)$ w użyta drugim rzędzie rozwinięcia wzoru na $\delta T/2$ (rozpatrywanego w tym Zadaniu) jak i poprawka $\delta_4 V(x)$ użyta w pierwszym rzędzie tegoż rozwinięcia dają poprawkę proporcjonalną do pierwszej potęgi E , czyli tego samego rzędu, i muszą zatem być uwzględnione razem.

$$\delta T = \frac{\pi E}{m\omega^5} \left(\frac{5}{3} \frac{\gamma^2}{\omega^2} - \frac{3}{2} \beta + \dots \right) = \frac{\pi E}{m\omega^5} \left(\frac{5 \cdot 9}{6} - \frac{7}{2} \right) \frac{V_0\alpha^4}{m} = \frac{\pi E}{V_0} \sqrt{\frac{m}{2V_0\alpha^2}}.$$

Zgadza się to dokładnie (po utożsamieniu E z ε) z rozwinięciem ścisłego wzoru na okres ruchu w potencjale Morse'a. W rozpatrywanym tu przypadku wiemy z rozwiązania ścisłego, że okres T można rozwinąć w szereg zbieżny dla wszystkich $\varepsilon < V_0$ (jest to rozwinięcie funkcji $(1 - \varepsilon/V_0)^{-1/2}$). Zatem także szereg otrzymywany z rozwinięcia wzoru na $\delta T/2$ będzie zbieżny, z tym, że w kolejnych rzędach trzeba by uwzględnić wszystkie wyrazy dające daną potęgę E (tj. ε), których jest coraz więcej (pochodzą one z całek z $[\delta_3 V(x) + \delta_4 V(x) + \delta_5 V(x) + \dots]^n$; do wyrazu z daną potęgą E rozwinięcia δT przyczynki wnoszą całki z różnymi n i różnymi iloczynami $\delta_k V(x)$).

W przypadku potencjału równego ściśle $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{3}m\gamma x^3$ rozwiązanie ściśle nie istnieje ale można zato wypisać ogólny wyraz rozwinięcia wzoru na $\delta T/2$. Po pierwsze, jest jasne, że w rozwinięciu tym znikają wszystkie wyrazy z nieparzystymi n , gdyż

$$\int_0^\pi d\theta \cos^{3n}\theta = 0,$$

jeśli n nie jest parzyste. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{2} &= \sum_{k=1} \frac{1}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}}{\partial E^{2k}} \left(\frac{m\gamma}{3} \right)^{2k} \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{3k} \frac{1}{\omega} \int_0^\pi d\theta \cos^{6k}\theta \\ &= \frac{\pi}{\omega} \sum_{k=1} \frac{(6k)!}{k!(2k)!(3k)!} \left(\frac{\gamma^2 E}{72m\omega^6} \right)^k. \end{aligned}$$

Aby oszacować k -ty wyraz dla dużych k korzystamy ze wzoru Stirlinga⁴³

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n.$$

Daje on tu

$$\frac{(6k)!}{k!(2k)!(3k)!} \approx \exp(k \ln 432).$$

Tak więc wyrazy szeregu mają postać

$$\frac{\pi}{\omega} \left(432 \frac{\gamma^2 E}{72m\omega^6} \right)^k.$$

Jest więc to (dla dużych k , żeby wzorek Stirlinga był słuszny) szereg geometryczny, który jest zbieżny tylko, gdy

$$E < \frac{72m\omega^6}{432\gamma^2} = \frac{m\omega^6}{6\gamma^2},$$

tj. dokładnie wtedy, gdy energia nie przekracza $V_{\max}$.

⁴³Wzór Stirlinga jest jednym z tych, które fizyk musi pamiętać przez całe życie. Na nim opiera się bowiem znaczna część równowagowej fizyki statystycznej.

Zadanie 3.12

Cząstka o masie m nadlatuje z nieskończoności, gdzie ma prędkość v , i zderza się centralnie (tzn. cały ruch odbywa się wzdłuż jednej prostej) ze spoczywającą początkowo drugą cząstką o takiej samej masie. Cząstki odpychają się za pośrednictwem siły o potencjale

$$V(x_1, x_2) = V(|x_1 - x_2|) = \frac{|\kappa|}{|x_1 - x_2|^n}.$$

Jaka będzie minimalna odległość między cząstkami? Wyznaczyć położenie punktu do którego dotrze nadlatująca cząstka.

Rozwiązanie

Niech x_1 i x_2 będą położeniami cząstek na prostej. W chwili początkowej, t_0 , $x_1(t_0) = -R$ (do granicy $R = \infty$ przejdziemy na końcu), $x_2(t_0) = 0$, $\dot{x}_1(t_0) = v$, a $\dot{x}_2(t_0) = 0$. Przechodzimy następnie do zmiennych

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)) = \frac{1}{2} (x_1(t) + x_2(t)), \\ y(t) &= x_2(t) - x_1(t), \end{aligned}$$

tak iż (bo $m_1 = m_2 = m$)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X(t) - \frac{1}{2} y(t), \\ x_2(t) &= X(t) + \frac{1}{2} y(t). \end{aligned}$$

W zmiennych X i y równania ruchu cząstek mają postać

$$\begin{aligned} 2m \ddot{X} &= 0, \\ \frac{m}{2} \ddot{y} &= -\frac{d}{dy} V(|y|). \end{aligned}$$

Z pierwszego wynika, że

$$X(t) = X(t_0) + \dot{X}(t_0)(t - t_0) = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}v(t - t_0).$$

Drugie ma całkę pierwszą, którą jest energia ruchu względnego:

$$\frac{1}{2} \frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{|\kappa|}{|y|^n} = E = \text{const.} = \frac{m}{4} v^2 + \frac{|\kappa|}{R^n}.$$

Ponieważ $\dot{x}_1 = \dot{X} - \frac{1}{2}\dot{y}$, nadlatująca cząstka zatrzyma się ($\dot{x}_1 = 0$), gdy $\dot{X} = \frac{1}{2}\dot{y}$, czyli (bo $\dot{X} = \text{const.} = \frac{1}{2}v$), gdy $\dot{y} = v$.

Ze wzoru wyrażającego zachowanie energii ruchu względnego wynika, że $\dot{y} = v$ tylko, gdy $|y| = R$. Warunek ten jest, oczywiście, spełniony, w chwili t_0 , gdy $x_1 = -R$, a

$x_2 = 0$. Ponieważ następnie, jak można sobie wyobrazić, y maleje do pewnej minimalnej odległości $y_{\min}$, a potem, gdy druga masa nabierze prędkości, y zaczyna znów rosnąć i warunek $|y| = R$ jest znów spełniony w pewnej chwili t_* : $y(t_*) = R$. Czas $t_* - t_0$ zmiany y od wartości R poprzez $y_{\min}$ do R jest dany całką

$$t_* - t_0 = 2 \int_{y_{\min}}^R \frac{dy}{\sqrt{v^2 + \frac{4|\kappa|}{mR^n} - \frac{4|\kappa|}{my^n}}},$$

gdzie

$$y_{\min} = \left(\frac{mv^2}{4|\kappa|} + \frac{1}{R^n} \right)^{-1/n}.$$

Wprowadzając zmienną $\xi = y/y_{\min}$ całkę można przepisać w postaci

$$t_* - t_0 = \frac{2y_{\min}}{\sqrt{v^2 + \frac{4|\kappa|}{mR^n}}} \int_1^{R/y_{\min}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{-n}}}.$$

Zatem położenie nadlatującej cząstki w momencie, gdy się ona zatrzyma, jest dane przez

$$\begin{aligned} x_1(t_*) &= X(t_*) - \frac{1}{2}y(t_*) = -\frac{1}{2}R + \frac{v}{2}(t_* - t_0) - \frac{1}{2}y(t_*) \\ &= -R + \frac{v}{\sqrt{v^2 + \frac{4|\kappa|}{mR^n}}} y_{\min} \int_1^{R/y_{\min}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{-n}}}. \end{aligned}$$

Aby przejść do granicy $R = \infty$, przepisujemy ten wynik w postaci

$$\begin{aligned} x_1(t_*) &= -R + \frac{v}{\sqrt{v^2 + \frac{4|\kappa|}{mR^n}}} y_{\min} \left\{ \int_1^{R/y_{\min}} d\xi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{-n}}} - 1 \right) + \frac{R}{y_{\min}} - 1 \right\} \\ &= R \left(\frac{v}{\sqrt{v^2 + \frac{4|\kappa|}{mR^n}}} - 1 \right) + \frac{v y_{\min}}{\sqrt{v^2 + \frac{4|\kappa|}{mR^n}}} \left\{ -1 + \int_1^{R/y_{\min}} d\xi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{-n}}} - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

W granicy $R = \infty$ pierwszy wyraz znika, jeśli $n > 1$, a istnienie skończonej granicy całki w drugim członie zależy od wykładnika⁴⁴ n :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{-n}}} - 1 = \frac{\sqrt{\xi^n} - \sqrt{\xi^n - 1}}{\sqrt{\xi^n - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\xi^n - 1}} \frac{1}{\sqrt{\xi^n} + \sqrt{\xi^n - 1}} \sim \frac{1}{2\xi^n}.$$

Zatem gdy $n > 1$, całka jest zbieżna w granicy $R = \infty$. Gdy $n \leq 1$ całka jest rozbieżna i również pierwszy wyraz nie znika (jest on skończony, gdy $n = 1$ i rozbieżny, gdy $n < 1$).

⁴⁴Używamy tu standardowej sztuczki: $a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$.

Oznacza, to, że nadlatując z nieskończoności cząstka nie zatrzyma się nigdy; jeśli zaś $n > 1$, zatrzyma się ona w położeniu

$$x_{\text{stop}} = y_{\text{min}} \left\{ -1 + \int_1^\infty d\xi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{-n}}} - 1 \right) \right\}.$$

Gdy $n = 2$ całka daje się łatwo obliczyć (trzeba tylko ją zregularyzować, biorąc jako jej górną granicę R i przechodząc do granicy $R = \infty$ dopiero na koniec) i otrzymuje się $x_{\text{stop}} = 0$. Jeśli jednak $1 < n \neq 2$, numeryczne całkowanie daje $x_{\text{stop}} \neq 0$.

Przypomnienie

Równanie ruchu ciała (traktowanego jak punkt materialny), którego masa $m = m(t)$ zmienia się z czasem według zadanego z góry prawa można otrzymać na podstawie następującego prostego rozumowania. Niech w chwili t ciało ma masę m i prędkość $\mathbf{v}$, a dodatkowy, infinytezymalny kawałek masy dm prędkość $\mathbf{u}$ (obie te prędkości są mierzone w pewnym układzie inercyjnym). Po upływie czasu dt kawałek masy dm zlepia się⁴⁵ z ciałem, które ma teraz masę $m + dm$ i prędkość $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Zmiana całkowitego pędu tego układu (którym jest ciało oraz dołączający się doń kawałek masy) jest więc równa

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - m\mathbf{v} - dm\mathbf{u} \\ &= m d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dm + \mathcal{O}(dm d\mathbf{v}) \\ &\equiv m d\mathbf{v} - \mathbf{w} dm, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ jest prędkością kawałka masy dm w układzie spoczynkowym ciała. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, obliczona wyżej zmiana pędu całego układu musi być spowodowana popędem $\mathbf{F} dt$ zewnętrznej siły działającej na rozpatrywany układ (ciało plus kawałek masy). Zatem, po podzieleniu związku wyrażającego tę równość stronami przez dt otrzymuje się

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{F},$$

czyli

$$\frac{d}{dt} (m(t) \mathbf{v}(t)) = \mathbf{F} + \frac{dm(t)}{dt} \mathbf{u},$$

lub, w drugim wariancie,

$$m(t) \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \mathbf{F} + \frac{dm(t)}{dt} \mathbf{w}.$$

Oba te wzory są poprawne. Zależnie od tego, czy prędkość mas dołączających się do poruszającego się ciała jest podana (musi być to określone z góry) względem układu inercyjnego, czy względem samego ciała, bardziej użyteczny jest jeden bądź drugi wzór.

Jeśli do masy m o prędkości $\mathbf{v}$ dołączają się w odcinku czasu dt dwie masy dm_1 i dm_2 o prędkościach $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$ (względem układu inercyjnego), to analogiczne rozumowanie doprowadzi do równania

$$m(t) \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \mathbf{F} + \frac{dm_1(t)}{dt} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}) + \frac{dm_2(t)}{dt} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}),$$

które należy rozwiązywać z warunkiem $dm/dt = d(m_1 + m_2)/dt$, czyli $m(t) = m_0 + m_1(t) + m_2(t)$.

⁴⁵Jeśli masa ciała maleje z czasem, to $dm < 0$.

Zadanie 4.2

Rakieta wznosi się pionowo z Ziemi wyrzucając gaz ze stałą prędkością w do tyłu względem siebie samej. Masa rakiety zmienia się wskutek tego zgodnie ze wzorem $m(t) = m_0 - \kappa t$, gdzie κ jest stałą. Znaleźć zależność położenia rakiety od czasu, jeśli jej prędkość początkowa, w chwili $t = 0$, była równa v_0 .

Rozwiązanie:

Wyberzmy układ odniesienia o osi z skierowanej w górę. Problem sprowadza się wtedy do rozwiązania równania różniczkowego (ponieważ w jest prędkością gazów względem rakiety, a nie względem układu inercjalnego, zależna od czasu masa stoi przed pochodną po czasie prędkości, czyli przed $\dot{z}$):

$$m(t)\ddot{z} = -m(t)g - w \frac{dm(t)}{dt}.$$

czyli, po wykorzystaniu podanego prawa zmiany masy,

$$\ddot{z} = -g + \frac{w\kappa}{m_0 - \kappa t}.$$

Proste scałkowanie stronami tego równania daje

$$\dot{z} = A - gt - w \ln(m_0 - \kappa t).$$

Z warunku początkowego $\dot{z}(0) = v_0$ znajdujemy stałą całkowania: $A = v_0 + w \ln m_0$.
Zatem

$$v(t) = \dot{z}(t) = v_0 - gt - w \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right).$$

Przy t bliskim zeru, gdy $v_0 = 0$ (rakieta startuje), $v(t) \approx (w\kappa/m_0 - g)t$. Warunkiem startu, jest więc, by $w > m_0 g/\kappa$. (To samo wynika z żądania, by w $t = 0$ przyspieszenie $\ddot{z}$, czyli prawa strona wyjściowego równania ruchu, było dodatnie.)

Kolejne całkowanie daje

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - w \int_0^t dt' \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t'\right),$$

czyli⁴⁶

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + w \frac{m_0}{\kappa} \left\{ \left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right) \ln\left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t\right) + \frac{\kappa}{m_0} t \right\}.$$

Oczywiście wzór jest słuszny, dopóki $m(t) = m_0 - \kappa t > 0$. W przypadku prawdziwej rakiety, zanim $m(t)$ zmaleje znacząco, przestaje obowiązywać przybliżenie wzorem $F_{\text{grav}} = -mg$ siły grawitacyjnego przyciągania przez Ziemię.

⁴⁶ $\int d\xi \ln \xi = \xi(-1 + \ln \xi) + \text{const.}$

Wzór na prędkość rakiety, gdy porusza się ona poza zasięgiem pól przyciągania i rozpędza wskutek odrzutu gazów od prędkości zero

$$\dot{z}(t) \equiv v(t) = -w \ln \left(1 - \frac{\kappa}{m_0} t \right) = -w \ln \frac{m(t)}{m_0},$$

jest znany jako wzór Ciołkowskiego - zapoznanego rosyjskiego prekursora astronautyki.

Zadanie 4.3

Wyprowadzić wzór Ciołkowskiego $v(t) = -w \ln(M(t)/M(0))$ wyrażający zależność prędkości rakiety rozpędzającej się w próżni (z dala od wszelkich sił zewnętrznych) wskutek odrzutu gazu od stanu spoczynku od jej (zmieniającej się z czasem) masy, przyjmując, że gazy są wyrzucane impulsami, a z każdym impulsem rakietę traci $1/(n+1)$ część swojej aktualnej masy. Przyjąć, że gaz jest odrzucany z prędkością w względem rakiety skierowaną przeciwnie do prędkości rakiety.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy raketę mającą w danej chwili masę $(n+1)\Delta m$ w chwilowym układzie odniesienia z nią związanym. W układzie tym jej pęd jest równy zeru i zeru musi też być równy sumaryczny pęd rakiety o masie $n\Delta m$, która uzyskała prędkość Δv_r po wyrzuceniu masy Δm z prędkością Δv_g . Zatem

$$\begin{aligned} n \Delta m \Delta v_r - \Delta m \Delta v_g &= 0, \\ \Delta v_r + \Delta v_g &= w. \end{aligned}$$

Drugie równanie wyraża to, że wyrzucony gaz ma względem rakiety prędkość w . Z tych dwóch równań otrzymujemy wniosek, że

$$\Delta v_r = \frac{w}{n+1}.$$

Możemy teraz rozpatrzeć kolejne etapy tracenia masy przez raketę mającą początkowo masę M_0 . Po pierwszym impulsie ma ona masę M_1 i w układzie inercyjnym (w którym początkowo spoczywała) prędkość v_1 :

$$M_1 = \frac{n}{n+1} M_0, \quad v_1 = 1 \cdot \frac{w}{n+1}.$$

Po drugim, ma masę M_2 i w układzie inercyjnym prędkość v_2 :

$$M_2 = \frac{n}{n+1} M_1 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 M_0, \quad v_2 = 2 \cdot \frac{w}{n+1}.$$

Po k -tym etapie:

$$M_k = \left(\frac{n}{n+1} \right)^k M_0, \quad v_k = k \cdot \frac{w}{n+1}.$$

Zatem $k = (n+1)v_k/w$ i możemy napisać

$$M_k = \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^{(n+1)} \right]^{v_k/w} M_0 \equiv \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-v_k/w} M_0.$$

Przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy stąd

$$M_k = M_0 e^{-v_k/w}, \quad \text{czyli} \quad v(M) = -w \ln \frac{M}{M_0},$$

czyli wzór Ciołkowskiego. Wzór ten wyprowadzony został także w Zadaniu 4.2, przez całkowanie równania Newtona przy założeniu pewnej konkretnej zależności $M(t)$ masy rakiety od czasu. Ponieważ w podanym tu rozumowaniu czas nie odgrywa żadnej roli (impulsy gazu mogą następować w dowolnych momentach), wyprowadzenie to pokazuje, że wzór Ciołkowskiego nie zależy od konkretnej postaci zależności $M(t)$. Wniosek ten można oczywiście otrzymać także z równania Newtona

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} = -w \frac{dM(t)}{dt},$$

przepisując je w formie

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} \frac{dt}{dM(t)} \equiv M \frac{dv}{dM} = -w,$$

i całkując je z warunkiem początkowym $v(M_0) = 0$.

Zadanie 4.5 (z Białkowskiego)

Wyprowadzić i przedyskutować wzór na zależność od czasu prędkości kropli spadającej w ziemskim polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$. Kropla spadając albo paruje (jeśli spada w próżni) albo para wodna z otoczenia kondensuje na niej. Przyjąć, że szybkość zmiany z czasem masy kropli jest proporcjonalna do jej aktualnego promienia⁴⁷ (traktujemy kroplę jak kulkę i zakładamy stałość gęstości wody ją tworzącej), a także iż działa na nią siła oporu (gdy spada w powietrzu) proporcjonalna do jej szybkości i do aktualnego promienia. Przyjąć też, że tracona lub zyskiwana przez kroplę woda ma zerową prędkość względem ośrodka, w którym kropla spada.

Rozwiązanie:

Ponieważ zakładamy, że szybkość zmiany masy jest proporcjonalna do promienia r kropli, a przy stałej gęstości wody masa kropli jest proporcjonalna do r^3 , przeto jawny wzór wyrażający masę kropli w funkcji czasu jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dm}{dt} = \alpha m^{1/3},$$

przy czym współczynnik α może być dodatni (gdy para z powietrza kondensuje na kropli) lub ujemny (gdy kropla paruje i masa jej maleje). Rozwiązaniem jest

$$m(t) = \left(m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t \right)^{3/2}.$$

Jeśli przyjmujemy że prędkość traconej przez kroplę (przyłączanej do niej) materii ma zerową prędkość względem ośrodka oraz że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości i promienia, czyli do $m^{1/3}$, to do rozwiązania jest równanie (kierujemy oś z w dół, tak iż $\mathbf{g} = \mathbf{e}_z g$)

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg - \gamma m^{1/3} v,$$

które zapiszemy w postaci

$$\dot{v} + \left(\frac{\dot{m}}{m} + \gamma m^{-2/3} \right) v \equiv \dot{v} + v f(t) = g.$$

Funkcja $f(t)$ jest jawnie dana wzorem:

$$f(t) = \frac{\gamma + \alpha}{m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t}.$$

⁴⁷W istocie, gdy kropla spada w próżni, szybkość zmiany jej masy jest proporcjonalna do pola jej powierzchni, czyli do r^2 ; gdy zaś para z otoczenia kondensuje na niej, szybkość zmiany masy jest mniej więcej $\propto r^{3/2}$, gdy prędkość kropli jest niewielka i mniej więcej $\propto r^{1/2}$ przy większych prędkościach.

Równanie jest liniowe z niejednorodnością, można więc doń zastosować standardową technikę uzmienniania stałej. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne, które po rozdzieleniu zmiennych daje

$$\frac{dv}{v} = -f(t) dt,$$

i ma jako rozwiązanie

$$v_{\text{og}}(t) = v_0 \exp\left(-\int dt f(t)\right).$$

Zastępując stałą całkowania v_0 nieznana funkcją $a(t)$ i wstawiając tak uzyskaną funkcję $v_{\text{szcz}}(t)$ do wyjściowego równania niejednorodnego, dostajemy na $a(t)$ równanie

$$\dot{a} = g \exp\left(\int dt f(t)\right).$$

Stąd, po scałkowaniu, znajdujemy $a(t)$ i dostajemy najogólniejsze rozwiązanie równania niejednorodnego w postaci

$$v(t) = e^{-\int_0^t d\tau f(\tau)} \left[v_0 + g \int_0^t d\tau e^{\int_0^\tau d\xi f(\xi)} \right].$$

Granice całek zostały tak wybrane, że stała v_0 ma sens prędkości początkowej (w chwili $t = 0$) kropli. Wygląda to skomplikowanie, ale można z tym powalczyć.

$$\int_0^t d\tau f(\tau) = (\gamma + \alpha) \int_0^t \frac{d\tau}{m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha \tau} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \ln\left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha t}{m_0^{2/3}}\right).$$

Zatem

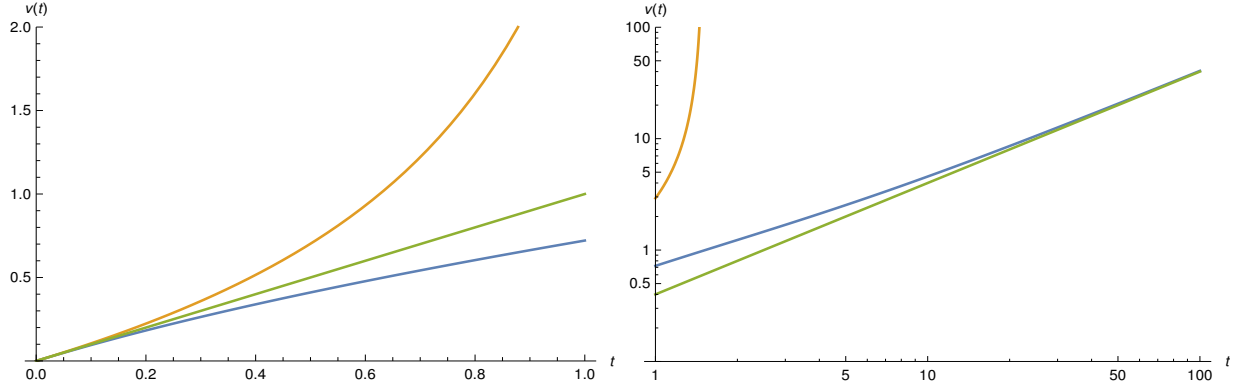
$$\exp\left(\int_0^\tau d\xi f(\xi)\right) = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha \tau}{m_0^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}(1+\frac{\gamma}{\alpha})} \equiv (1 + a\tau)^b.$$

Idąc dalej,

$$\int_0^t d\tau e^{\int_0^\tau d\xi f(\xi)} = \int_0^t d\tau (1 + a\tau)^b = \frac{1}{a(1+b)} [(1 + at)^{b+1} - 1].$$

Łącząc wszystko razem i przyjmując, że prędkość początkowa znika, tj. kładąc $v_0 = 0$, otrzymujemy

$$v(t) = \frac{g}{a(1+b)} \frac{1}{(1+at)^b} \{(1+at)^{b+1} - 1\} = \frac{g}{a(1+b)} \left\{1 + at - \frac{1}{(1+at)^b}\right\},$$



Rysunek 32: Prędkość w (jednostkach $gm_0^{2/3}/|\alpha|$) spadającej i parującej kropli (krzywa czerwona) i spadającej kropli, na której zachodzi kondensacja (krzywa niebieska) w funkcji czasu (w jednostkach $|\alpha|/m_0^{2/3}$) bez siły oporu ($\gamma/|\alpha| = 0$). Po lewej: $t \ll 1$ - krzywa zielona pokazuje prędkość spadku bez parowania i kondensacji. Po prawej: $t \gg 1$ - krzywa zielona pokazuje zależność asymptotyczną.

czyli ostatecznie

$$v(t) = \frac{3g}{5\alpha + 3\gamma} \left\{ m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t - m_0^{2/3} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha t}{m_0^{2/3}} \right]^{-\frac{3}{2}(1+\frac{\gamma}{\alpha})} \right\}.$$

Zbadajmy najpierw zachowanie prędkości tuż po starcie. Rozwijamy w tym celu powyższy wzór w szereg względem t

$$(1 + at)^{-b} = \exp[-b \ln(1 + at)] = 1 - bat + \frac{1}{2}b(b+1)a^2t^2 + \dots$$

Współczynniki są równe

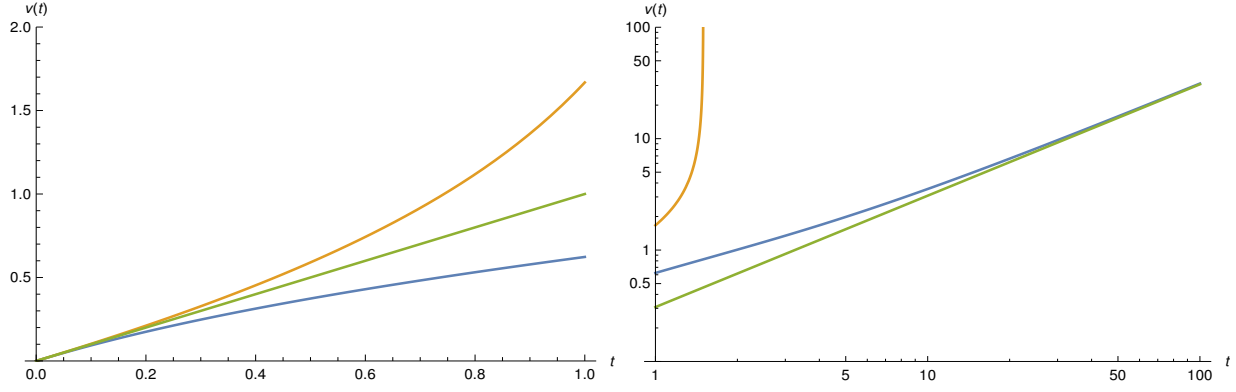
$$\begin{aligned} ba &= m_0^{-2/3}(\alpha + \gamma), \\ b(b+1)a^2 &= \frac{1}{3}m_0^{-4/3}(\alpha + \gamma)(5\alpha + 3\gamma). \end{aligned}$$

Wstawiając to rozwinięcie do uzyskanego wyżej wzoru, otrzymujemy

$$v(t) = \frac{3g}{5\alpha + 3\gamma} \left\{ m_0^{2/3} + \frac{2}{3} \alpha t - m_0^{2/3} \left[1 - m_0^{-2/3}(\alpha + \gamma)t + \frac{1}{6} m_0^{-4/3}(\alpha + \gamma)(5\alpha + 3\gamma)t^2 + \dots \right] \right\},$$

czyli, po uproszczeniach

$$v(t) \approx gt - \frac{g}{2m_0^{2/3}}(\alpha + \gamma)t^2.$$



Rysunek 33: Prędkość w (jednostkach $gm_0^{2/3}/|\alpha|$) spadającej i parującej kropli (krzywa czerwona) i spadającej kropli, na której zachodzi kondensacja (krzywa niebieska) w funkcji czasu (liczonego w jednostkach $|\alpha|/m_0^{2/3}$), gdy występuje siła oporu ($\gamma/|\alpha| = 0.5$). Po lewej: $t \ll 1$ - krzywa zielona pokazuje prędkość spadku bez parowania i kondensacji. Po prawej: $t \gg 1$ - krzywa zielona pokazuje zależność asymptotyczną (dla $t \rightarrow \infty$).

Widać stąd, że jeśli $\alpha + \gamma > 0$, szybkość kropli najpierw rośnie liniowo z czasem (tak jak gdyby jej masa nie zmieniała się, a siły oporu nie było) a następnie spada.

Z pełnego wzoru widać też, że przy braku siły oporu ($\gamma = 0$) i kondensacji ($\alpha > 0$) prędkość kropli asymptotycznie rośnie jak $\frac{2}{5}gt$. Siła oporu modyfikuje ten asymptotyczny wzrost prędkości do $2\alpha gt/(5 + 3\gamma/\alpha)$.

Przy parowaniu zaś ($\alpha = -|\alpha| < 0$) i braku oporu wzór przybiera postać

$$v(t) = \frac{3g}{5|\alpha|} m_0^{2/3} \left\{ \frac{2|\alpha|}{3m_0^{2/3}} t + \left(1 - \frac{2|\alpha|t}{3m_0^{2/3}} \right)^{-3/2} - 1 \right\}.$$

Widać z niej, że kropla w skończonym czasie całkowicie wyparowuje, osiągając w tym samym momencie nieskończoną prędkość. Jest to oczywiście nierealistyczne. Z kolei jeśli siła oporu jest znaczna, tak iż $\gamma > |\alpha|$ (tak, iż we wzorze na $v(t)$ wykładnik ostatniego członu w nawiasie kręconym jest dodatni), prędkość kropli w momencie wyparowania jest równa zero. Zależność prędkości kropli w różnych sytuacjach pokazują wykresy 32 i 33.

Jeśli $\alpha = 0$ (masa kropli nie zmienia się) wzór na $v(t)$ przepisujemy w postaci

$$v(t) = \frac{gm_0^{2/3}}{\gamma} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{3}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \ln \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha t}{m_0^{2/3}} \right) \right] \right\},$$

z której już widać, że otrzymany wzór przechodzi w otrzymany w dla pionowej składowej prędkości w zadaniu 2.4 przy utożsamieniu $\gamma/m_0^{1/3}$ ze współczynnikiem κ/m (trzeba tylko uwzględnić że oś z tu jest skierowana przeciwnie niż tam). Przy $t \rightarrow \infty$ prędkość $v(t)$ dąży do $gm_0^{2/3}/\gamma$, co jest oczywiste, bo jest to punkt stały równania $\dot{v} = g - \gamma m_0^{2/3}$.

Przypomnienie

Dwaj obserwatorzy z układów odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ charakteryzują zmienność w czasie wektorów $\mathbf{r}(t)$ i $\mathbf{r}'(t)$ położenia punktu P (zob. lewy rysunek 34). Wektory te spełniają oczywistą równość (którą, jak każdą równość wektorową, można rozpisać na składowe w dowolnym układzie odniesienia, czyli np. w $\mathcal{O}$ lub w $\mathcal{O}'$).

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t),$$

gdzie $\mathbf{r}_0(t)$ jest (zmieniającym się z czasem) wektorem łączącym początki układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Ponieważ jest to równość dwóch wektorów, więc zachodzi także związek

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt}.$$

Oczywiście $d\mathbf{r}(t)/dt \equiv \mathbf{v}(t)$ jest wektorem prędkości punktu P mierzonej przez obserwatora w $\mathcal{O}$. Jeśli jednak widziany z $\mathcal{O}$ układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi przechodzącej przez jego początek z prędkością kątową ω , wektor $d\mathbf{r}'(t)/dt$ nie jest tożsamy z wektorem $\mathbf{v}'$ prędkości mierzonej w $\mathcal{O}'$. Aby to sobie uzmysłowić wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy punkt P pozostaje w ustalonym położeniu względem $\mathcal{O}'$: mimo iż wtedy $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, pochodna $d\mathbf{r}'(t)/dt \neq \mathbf{0}$, gdyż widziany z $\mathcal{O}$ wektor $\mathbf{r}'$ zmienia się wraz z obrotem całego układu $\mathcal{O}'$.

Rozpatrując infinitezymalne zmiany wektorów zachodzące w infinitezymalnym odcinku czasu dt możemy napisać równość:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d'\mathbf{r}' + (d\mathbf{r}')_{\text{rot}}.$$

$d'\mathbf{r}'$ jest zmianą wektora $\mathbf{r}'$ widzianą przez obserwatora w $\mathcal{O}'$ (który uważa, że to osie jego układu się nie zmieniają; wobec tego $d'\mathbf{r}' = \mathbf{0}$, wtedy gdy punkt P nie zmienia położenia względem $\mathcal{O}'$), wektor zaś $(d\mathbf{r}')_{\text{rot}}$ jest właśnie zmianą $\mathbf{r}'$ widzianą z $\mathcal{O}$, uwarunkowaną w całości obrotem $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$. Zmiana ta jest, jak łatwo zrozumieć, równa

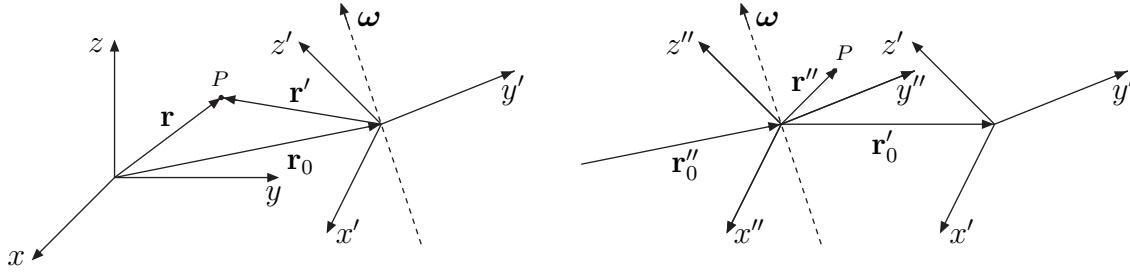
$$(d\mathbf{r}')_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}',$$

gdzie $d\boldsymbol{\theta}$ jest wektorem reprezentującym infinitezymalny obrót o kąt $d\theta$ układu $\mathcal{O}'$ względem $\mathcal{O}$ w przedziale czasu dt (zatem $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}dt$). Wektor ten ma kierunek chwilowej osi obrotu. Otrzymujemy zatem wniosek, że gdy układ $\mathcal{O}'$ obraca się względem $\mathcal{O}$ wokół osi przechodzącej przez jego początek

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Powyższy wzór pozostaje prawdziwy, nawet jeśli oś wokół której obraca się układ $\mathcal{O}'$ nie przechodzi przez jego początek. Aby się o tym przekonać wprowadzamy pomocniczy układ $\mathcal{O}''$ o początku leżącym na osi, wokół której obraca się $\mathcal{O}'$ i osiach stale równoległych do odpowiadających im osi układu $\mathcal{O}'$ (zob. prawy rysunek 34). Mamy wtedy wektorowy związek

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0'' + \mathbf{r}'',$$



Rysunek 34: *Lewy rysunek:* Układy odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Z punktu widzenia obserwatora w układzie $\mathcal{O}$ układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi zaznaczonej linią przerywaną z prędkością kątową ω . Obaj obserwatorzy: w $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ charakteryzują zmienność w czasie wektora położenia punktu P odpowiednio wektorami $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}/dt$, $d^2\mathbf{r}/dt^2$ oraz $\mathbf{r}'$, $d'\mathbf{r}'/dt$, $d'^2\mathbf{r}'/dt^2$. *Prawy rysunek:* Pomocniczy układ $\mathcal{O}''$ wprowadzany w sytuacji, gdy układ $\mathcal{O}'$ obraca się wokół osi nieprzechodzącej przez jego początek. (Dla przejrzystości, wektory $\mathbf{r}'$, takie same, jak na lewym rysunku, nie zostały tu uwidocznione).

w którym $\mathbf{r}''$ jest wektorem wodzącym punktu P w układzie $\mathcal{O}''$. Wobec tego, zgodnie z poprzednim rozumowaniem możemy napisać

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0'' + d''\mathbf{r}'' + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}''.$$

Wykorzystujemy następnie równość $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_0' + \mathbf{r}'$:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0'' + d''(\mathbf{r}_0' + \mathbf{r}') + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0' + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'.$$

Ponieważ jednak układy $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$ są ze sobą na sztywno związane, $d''\mathbf{r}_0' = \mathbf{0}$ (wektor $\mathbf{r}_0'$ widziany z układu $\mathcal{O}''$ nie zmienia się). Co więcej, $d''\mathbf{r}' = d'\mathbf{r}'$, gdyż osie $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$ są nawzajem do siebie stale równoległe i zmiana wektora $\mathbf{r}'$ widziana z obu tych układów jest takim samym wektorem. Wreszcie, wyraz $d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_0'$ po dodaniu do $d\mathbf{r}_0''$ daje po prostu przesunięcie względem $\mathcal{O}$ początku układu $\mathcal{O}'$, czyli $d\mathbf{r}_0$. Otrzymujemy zatem ponownie ten sam wzór, który można także zapisać jako ($\mathbf{V}_{\text{tr}}$ jest prędkością ruchu postępowego $\mathcal{O}'$ mierzoną w $\mathcal{O}$)

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_{\text{tr}} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Z tych rozważań wynika też następujący wniosek. Jeśli wektor $\mathbf{b}$ łączy punkt P_1 (o wektorach wodzących $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_1'$ względem odpowiednio $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$) z punktem P_2 (o wektorach wodzących $\mathbf{r}_2$ i $\mathbf{r}_2'$), czyli jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'$, to odejmując stronami wzory łączące ze sobą pochodne w obu układach otrzymamy ważny wzór (por. Zadanie 5.1)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Wzór wiążący ze sobą przyspieszenia punktu P mierzone w obu układach dostajemy wykorzystując powyższy związek (wyrazy w nawiasach są pochodnymi d/dt):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &\equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_{\text{tr}}}{dt} + \left(\frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) \\ &\equiv \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').\end{aligned}$$

Zgodnie ze wzorem wiążącym pochodne dowolnego wektora $\mathbf{b}$ obliczane w układach obracających się jeden względem drugiego z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$.

Ważne jest także, by zdawać sobie sprawę z tego, że powyższe związki między pochodnymi wektorów są słuszne dla dowolnych dwu układów $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercyjnym. Jeśli jednak układ $\mathcal{O}$ *jest* układem inercyjnym, to zwykłe prawo Newtona (tj. równanie $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$) obowiązuje tylko w tym układzie. W układzie $\mathcal{O}'$, który jest wtedy (z konieczności, jeśli $\boldsymbol{\omega} \neq 0$) układem nieinercyjnym, można jednak stosować “prawo Newtona” zmodyfikowane o fikcyjne “siły bezwładności”:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right).$$

Zadanie 5.1

Dany jest zmieniający się z czasem wektor $\mathbf{b}(t)$. Powiązać jego pochodne obliczone w dwu różnych układach odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$. Układy te mają wspólny początek i obracają się względem siebie wokół wspólnej osi $z = z'$. Kąt jaki tworzy oś x' układu $\mathcal{O}'$ z osią x układu $\mathcal{O}$ jest pewną funkcją czasu $\varphi(t)$.

Uwaga: Żaden z tych układów nie jest wyróżniony. W szczególności żaden z nich nie musi być układem inercjalnym.

Rozwiązanie:

Jeśli dane są dwa różne układy odniesienia $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$, to dowolny wektor $\mathbf{b}$ można rozpisać na wersory i jednego i drugiego układu:

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_x b_x + \mathbf{e}_y b_y + \mathbf{e}_z b_z = \mathbf{e}'_x b'_x + \mathbf{e}'_y b'_y + \mathbf{e}'_z b'_z.$$

Wiedząc, że wersory obu układów są ze sobą powiązane wzorami

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}'_x \cos \varphi(t) - \mathbf{e}'_y \sin \varphi(t), \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}'_x \sin \varphi(t) + \mathbf{e}'_y \cos \varphi(t),\end{aligned}$$

i $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_z$ (wzory te łatwo sprawdzić robiąc odpowiedni rysunek i rozpatrując przypadki, gdy $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$) można też napisać

$$\mathbf{b} = [b_x \cos \varphi(t) + b_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + [-b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_y + b_z \mathbf{e}'_z.$$

Oznacza to po prostu, że $b'_x = b_x \cos \varphi(t) + b_y \sin \varphi(t)$, a $b'_y = -b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)$. Pochodną wektora $\mathbf{b}$ obliczoną w układzie $\mathcal{O}$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{e}_x \dot{b}_x + \mathbf{e}_y \dot{b}_y + \mathbf{e}_z \dot{b}_z,$$

(obserwator w $\mathcal{O}$, różniczkując wektor, uważa, że to osie $\mathbf{e}_i$ nie zmieniają się z czasem), która jest pewnym wektorem, również można rozpisać na wersory układu $\mathcal{O}'$, otrzymując

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = [\dot{b}_x \cos \varphi(t) + \dot{b}_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + [-\dot{b}_x \sin \varphi(t) + \dot{b}_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_y + \dot{b}_z \mathbf{e}'_z.$$

Jeśli jednak obliczymy pochodną wektora $\mathbf{b}$ w układzie $\mathcal{O}'$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{d'\mathbf{b}}{dt} &= \mathbf{e}'_x \dot{b}'_x + \mathbf{e}'_y \dot{b}'_y + \mathbf{e}'_z \dot{b}'_z \\ &= \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \omega [-b_x \sin \varphi(t) + b_y \cos \varphi(t)] \mathbf{e}'_x + \omega [-b_x \cos \varphi(t) - b_y \sin \varphi(t)] \mathbf{e}'_y.\end{aligned}$$

Dodatkowe wyrazy proporcjonalne do $\omega \equiv \dot{\varphi}(t)$ biorą się stąd, że w układzie $\mathcal{O}'$, oprócz zmienności z czasem składowych wektora $\mathbf{b}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, uwzględniona jest także zmiana wektora $\mathbf{b}$ spowodowana tym, że same wersory $\mathbf{e}_i$ obracają się względem układu $\mathcal{O}'$ (obserwator w $\mathcal{O}'$ uważa, że to jego osie $\mathbf{e}'_i$ są nieruchome!). Wprowadzając wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}'_z$ można sprawdzić, że dodatkowe wyrazy dają się zapisać jako $-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$. Stąd

$$\frac{d'\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d'\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Zadanie 5.2

Znaleźć całkę pierwszą równania “Newtona” (tj. równania z siłami bezwładności) wyznaczającego ruch masy m w układzie nieinercyjnym $\mathcal{O}'$ obracającym się względem układu inercyjnego $\mathcal{O}$ ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ tak, że wektor łączący środek układu inercyjnego ze środkiem układu nieinercyjnego pozostaje stały, gdy siły niebezwładnościowe w układzie nieinercyjnym są potencjalne, a ewentualne więzy, jakim poddana jest masa m , są w tymże układzie niezależne od czasu. Znaleźć związek tej całki pierwszej z energią mechaniczną masy m mierzona w układzie inercyjnym.

Rozwiązanie:

Po pomnożeniu skalarnie stronami przez $\mathbf{v}'$ ogólne równanie “Newtona” w układzie nieinercyjnym $\mathcal{O}'$ (uwzględniające siły bezwładnościowe), zapisane tu w przypadku, gdy prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ jest stała

$$m \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_R - m(\mathbf{a}_{tr} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')) ,$$

(d' oznacza tu pochodną obliczaną w układzie nieinercyjnym, a $\mathbf{F}_R$ reprezentuje siły reakcji ewentualnych więzów) można zapisać w postaci

$$\frac{d'}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}' - m \mathbf{a}_{tr} \cdot \mathbf{v}' - m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{v}' .$$

Jeśli wektor łączący środek układu inercyjnego $\mathcal{O}$ ze środkiem układu nieinercyjnego $\mathcal{O}'$ pozostaje stały, to $\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{0}$. Założenie, że więzy, jakim poddana jest masa m , są w układzie $\mathcal{O}'$ niezależne od czasu (co naogół oznacza, że w układzie inercyjnym są one od czasu zależne!) oznacza, że $\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v}' = 0$. Siła Coriolisa, jak wynika z jej postaci, również jest do $\mathbf{v}'$ prostopadła. Ostatni człon po prawej stronie można przekształcić wykorzystując tożsamości wektorowe:

$$[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{v}' = (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \frac{d'}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 .$$

Jeśli więc siła $\mathbf{F}$ nie zależy jawnie od czasu i $\mathbf{F} = -\nabla' V(\mathbf{r}')$, istnieje całka pierwsza

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 + V(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 \equiv T' + V + V'_{odsr} = h = \text{const} .$$

Pierwszy wyraz, T' , reprezentuje energię kinetyczną masy m mierzona w układzie nieinercyjnym, a ostatni, V'_{odsr} , coś co można nazwać potencjalną energią siły odśrodkowej. Zauważmy też, że wobec tego iż wielkość h jest skalarą,

$$\frac{d}{dt} h = \frac{d'}{dt} h = 0 ,$$

- wielkość h pozostaje stała także w układzie inercyjnym. Nie jest ona jednak, jak pokazujemy niżej, tożsama z całkowitą energią ruchu mierzona w układzie inercyjnym.

Energię kinetyczną $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ mierzona w układzie inercyjnym $\mathcal{O}$ można oczywiście wyrazić przez prędkość $\mathbf{v}'$ mierzona w układzie $\mathcal{O}'$ korzystając ze związku $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{\text{tr}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$. Zatem jeśli układ $\mathcal{O}'$ wiruje tylko względem $\mathcal{O}$ wokół wspólnego początku obu układów (tzn. $\mathbf{v}_{\text{tr}} = \mathbf{0}$) to⁴⁸

$$E = T' + V + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = h + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 + m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}').$$

Wielkość zachowana h nie jest więc w takiej sytuacji tożsama z energią E mierzona w układzie inercyjnym, która naogół nie jest stała. Wynika to z tego, że więzy, które nie są stałe w układzie inercyjnym (nie są skleronomiczne), naogół wykonują nad układem pracę.

Jeśli dodatkowo $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ (początki układów: inercyjnego $\mathcal{O}$ i nieinercyjnego $\mathcal{O}'$ stale się pokrywają), to całkowita energia E masy m mierzona w układzie $\mathcal{O}$ i wielkość zachowana h są ze sobą związane relacją

$$E = h + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L},$$

w której $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r}' \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$. Jest to oczywiście ten sam wniosek, który otrzymuje się przy okazji twierdzenia Larmora (Zadanie 5.10).

⁴⁸Energia potencjalna V jest w obu układach, inercyjnym i nieinercyjnym, ta sama. Jest to bowiem np. energia rozciągniętej sprężyny, czy energia grawitacyjna, których wartości nie zależą od zmiennych użytych do określenia położenia masy m .

Zadanie 5.3

Przedyskutować jakościowo wpływ sił odśrodkowej i Coriolisa na ruch (w pobliżu powierzchni Ziemi) masy m względem nieinercyjnego układu odniesienia mającego początek w punkcie o szerokości geograficznej φ na powierzchni obracającej się Ziemi.

Rozwiązanie:

W związanym z powierzchnią Ziemi nieinercyjnym układzie odniesienia $\mathcal{O}'$ w równaniu Newtona oprócz sił rzeczywistych takich jak siła przyciągania Ziemi i inne, trzeba uwzględnić także siły pozorne (siły bezwładności):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} &\equiv m \mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{real}} - m \left[\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right] \\ &= \mathbf{F}_{\text{real}} - m [\mathbf{a}_{\text{tr}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')]. \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_{\text{tr}}$ jest tu przyspieszeniem punktu O' względem punktu O (zob. rysunek 35). Ich względna prędkość $\mathbf{v}_{\text{tr}}$ jest oczywiście równa $\mathbf{v}_{\text{tr}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. Wynika to także natychmiast z ogólnego wzoru (zob. Przypomnienie) wiążącego obliczane w różnych układach pochodne wektorów

$$\mathbf{v}_{\text{tr}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d'\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

i faktu, że $d'\mathbf{R}/dt = \mathbf{0}$ - widziany z układu $\mathcal{O}'$ wektor $\mathbf{R}$ pozostaje stały. Z kolei

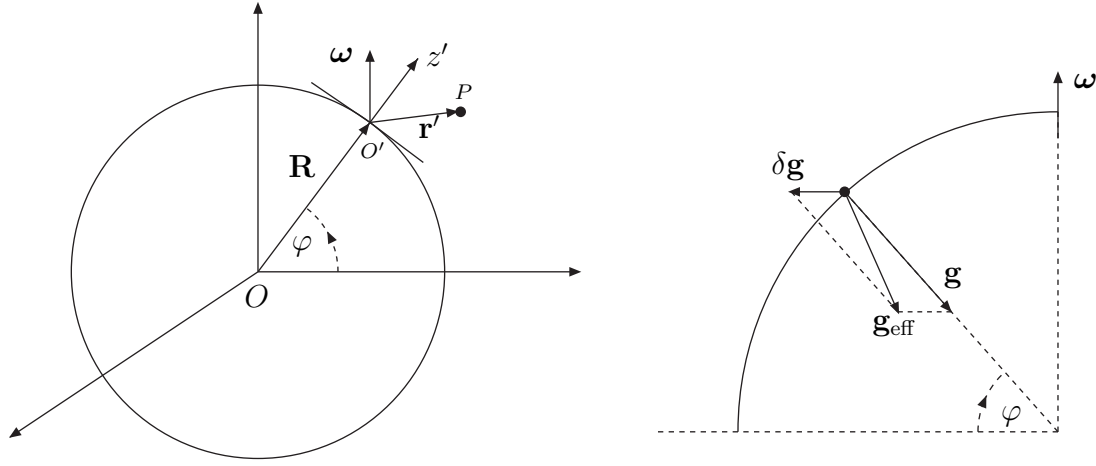
$$\mathbf{a}_{\text{tr}} = \frac{d\mathbf{v}_{\text{tr}}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}).$$

Jeśli pominąć znikomo małą zależność od czasu prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ obrotu Ziemi, równanie pseudo-Newtona ruchu masy m względem układu $\mathcal{O}'$ można przyjąć w postaci

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} &= \mathbf{F}_{\text{graw}} + \mathbf{F}_{\text{inne}} - m \left[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right] \\ &= \mathbf{F}_{\text{graw}} + \mathbf{F}_{\text{inne}} - m \left[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right], \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$. Druga postać tego równania pokazuje, że działająca na masę m “siła odśrodkowa”⁴⁹ zależy, tak jak by się należało spodziewać, od odległości masy m od rzeczywistej osi obrotu Ziemi, czyli od osi z układu $\mathcal{O}$. W praktyce, tj. dla zwykle rozpatrywanych ruchów przy powierzchni Ziemi, $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{R}|$, więc w równaniu można zastąpić $\mathbf{r}$ przez $\mathbf{R}$.

⁴⁹Jak u W.B. Yeatsa w “The Second Coming”: “Turning and turning in the widening gyre, the falcon cannot hear the falconer. Things fall apart; the center cannot hold; Mere anarchy is loosed upon the world,...” albo: “Coraz to szersze zataczając kręgi sokół nie słyszy głosu sokolnika. Rzeczy pryskają, ciężar środka słabnie nad światem huczy anarchia krwią ciemną.” (“Drugie Przyjście”).



Rysunek 35: Po lewej: ruch punktu P rozpatrywany względem związanego z obracającą się Ziemią nieinercyjnego układu odniesienia mającego początek w punkcie o szerokości geograficznej φ na powierzchni Ziemi. Po prawej: Uwzględnienie siły odśrodkowej przez wprowadzanie lokalnego pola siły ciężkości $\mathbf{g}_{\text{eff}}$.

Najpierw się zajmijmy siłą ciężkości, która zawsze działa na ciała poruszające się w pobliżu powierzchni Ziemi. Ma ona postać

$$\mathbf{F}_{\text{graw}}(\mathbf{r}) = -GM_Z \frac{m\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \approx -\frac{GM_Z}{|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} m \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{R}|}\right) \right],$$

gdzie zastosowaliśmy rozwinięcie słuszne, gdy $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{R}|$. Czynniki

$$\frac{GM_Z}{|\mathbf{R}|^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \cdot 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}}{(6.378 \times 10^6 \text{ m})^2} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

to słynne “szkolne” g (z samych potęg widać, że $g \approx 10$) tu będące jednak wektorem:

$$\mathbf{g} = -\frac{GM_Z}{|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \equiv -g \mathbf{e}_{z'}.$$

Jeśli więc w całym badanym ruchu $|\mathbf{r}'(t)| \ll |\mathbf{R}|$, można korzystać z przybliżenia

$$\mathbf{F}_{\text{graw}} = m\mathbf{g} = -mg \mathbf{e}_{z'}.$$

W zasadzie główną część siły odśrodkowej $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \approx -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ można uwzględnić wprowadzając efektywne lokalne (tj. zależne od szerokości geograficznej) pole siły ciężkości $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ (zob. prawy rysunek 35):

$$\mathbf{g}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \approx \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \equiv \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}.$$

Wartość poprawki $\delta\mathbf{g}$ zależy od szerokości geograficznej:

$$|\delta\mathbf{g}| \approx |\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})| = \omega^2 R \cos \varphi.$$

Ponieważ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

więc

$$|\delta \mathbf{g}| \approx (7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \cdot 6.378 \times 10^6 \text{ m} \cos \varphi \approx 3.3 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cos \varphi.$$

Pole $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ ma składową radialną (tj. skierowaną wzdłuż wektora $\mathbf{e}_{z'}$ w przeciwnym niż on kierunku) o wartości (zob. prawy rysunek 35)

$$|(\mathbf{g}_{\text{eff}})_{\text{rad}}| = |\mathbf{g}| - |\delta \mathbf{g}| \cos \varphi = |\mathbf{g}| - \omega^2 R \cos^2 \varphi,$$

oraz składową horyzontalną (tj. równoległą do powierzchni Ziemi) o wartości

$$|(\mathbf{g}_{\text{eff}})_{\text{hor}}| = |\delta \mathbf{g}| \sin \varphi = \omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi.$$

Przy spadku swobodnym składowa horyzontalna $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ powoduje małe odchylenie spadającego ciała w kierunku równika (tj. w kierunku południowym na półkuli północnej).

Poprawka $\delta \mathbf{g}$ jest jednak co do wartości tego samego rzędu, co zmiana wartości g spowodowana odstępstwem Ziemi od ściśle kulistego kształtu (Ziemia jest na biegunach trochę spłaszczona - ma kształt trochę taki, jak piłka, na której usiadł miś): różnica pola $\mathbf{g}$ mierzonego na biegunie i na równiku

$$|\mathbf{g}_{\text{biegun}}| - |\mathbf{g}_{\text{rownik}}| \approx 5 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

więc jeśli pomija się ten drugi efekt, nie ma sensu zastępowanie $\mathbf{g}$ przez $\mathbf{g}_{\text{eff}}$.

Z praktycznego punktu widzenia znacznie ważniejsza jest siła Coriolisa

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}.$$

Przy spadku swobodnym ciała na powierzchnię Ziemi, ponieważ Ziemia obraca się na wschód (i jak mówią w Kacapii, “potomu słońce woschodit na Wostokie”), siła Coriolisa powoduje jego odchylenie na wschód (wbrew temu, co można w pierwszej chwili mniemać - proste wyjaśnienie tego jest treścią Zadania 5.4). Jeśli prędkość $\mathbf{v}'$ jest skierowana horyzontalnie (stycznie do powierzchni Ziemi) to wygodnie jest rozłożyć prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ Ziemi na część prostopadłą i część równoległą do powierzchni Ziemi:

$$\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_{\perp} + \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_{\parallel},$$

przy czym $|\boldsymbol{\omega}_{\perp}| = \omega \sin \varphi$, $|\boldsymbol{\omega}_{\parallel}| = \omega \cos \varphi$. Pierwszy składnik daje wtedy siłę powodującą na półkuli północnej skręcanie na prawo (na lewo na półkuli południowej), co wyjaśnia, dlaczego brzegi rzek płynących na północ podmywają bardziej prawe brzegi; drugi składnik przy ruchu na wschód zmniejsza $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ (bo $\mathbf{v}'$ dodaje się wtedy do ruchu obrotowego samej Ziemi).

Zadanie 5.4

Z wieży o wysokości $h = 125$ m stojącej na równiku spuszczone swobodnie kamień o masie m . Jak daleko upadnie on od podstawy wieży? Pominąć wszystkie możliwe siły oporu. Rozwiązać ten problem w układzie związanym z Ziemią oraz w układzie inercjalnym, którym Ziemia (wraz z wieżą) się obraca.

Rozwiązanie:

W układzie obracającym się wraz z Ziemią, którego początek umieszczamy u podstawy wieży, oś z kierujemy “w niebo”, a oś x na wschód, równanie “Newtona”, które trzeba rozwiązać z warunkiem początkowym $\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}_z h$, $\dot{\mathbf{r}}(0) \equiv \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, ma postać:⁵⁰

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

W przyjętym układzie odniesienia $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_y \omega$. Ponieważ czas t_{sp} spadku kamienia, czyli czas trwania ruchu, nie może się wiele różnić od danego “szkolnym wzorem” $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$, więc w powyższym równaniu ostatni wyraz daje małe efekty (drugiego rzędu w małej wielkości $\omega t_{\text{sp}} \ll 1$) i można go pominąć. Rozwiązujemy zatem równanie

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

które rozpisane na składowe daje

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\omega \dot{z}, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= 2\omega \dot{x} - g.\end{aligned}$$

Środkowe z tych równań jest trywialne i, uwzględniając warunki początkowe, daje $y(t) = 0$. Z kolei całkując stronami pierwsze z tych równań i dobierając stałą całkowania tak, by dla $t = 0$, tj. wtedy, gdy $z(0) = h$, było $\dot{x}(0) = 0$, znajdujemy

$$\dot{x} = 2\omega(h - z).$$

Wstawiając tak wyrażone $\dot{x}$ do trzeciego równania otrzymujemy

$$\ddot{z} = -g + 4\omega^2(h - z).$$

Ponieważ zdecydowaliśmy się pomijać wyrazy z ω^2 , rozwiązanie tego równania da $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, jak w szkole. Stąd widzimy, że rzeczywiście z dokładnością do efektów liniowych w ω (a przy pominięciu efektów kwadratowych), czas spadku wyznaczony przez $z(t_{\text{sp}}) = 0$, jest równy $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$. Wykorzystując znalezione $z(t)$ w równaniu na $x(t)$

$$\dot{x} = 2\omega(h - z) = \omega gt^2,$$

⁵⁰Oznaczenie wielkości w układzie nieinercjalnym symbolami z primem zostało tu zarzucone.

po scałkowaniu otrzymujemy

$$x(t) = \frac{1}{3} g \omega t^3.$$

Odchylenie d kamienia od podstawy wieży wynosi zatem

$$d = x(t_{\text{sp}}) = \frac{1}{3} g \omega \frac{2h}{g} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,5 \text{ cm}.$$

Ponieważ $d > 0$, kamień odchyła się w kierunku wschodnim, a nie, jak by można oczekiwać na podstawie naiwnego rozumowania, że w trakcie lotu kamienia, to raczej Ziemia z wieżą na niej obróci się na Wschód.

Ten na pierwszy rzut oka dziwny wynik można lepiej rozumieć rozpatrując ruch w układzie inercyjnym, w którym Ziemia z wieżą na niej się obraca. Ponieważ ruch zachodzi w płaszczyźnie równikowej, wygodnie jest wprowadzić w tej płaszczyźnie układ biegunowy (r, φ) tak, by w $t = 0$ wierzchołek wieży (czyli kamienia) miał współrzędne $r(0) = R + h$, gdzie R jest promieniem Ziemi (początek układu inercyjnego umieszczamy w środku Ziemi, aby jej ruch obrotowy miał prostą postać), $\varphi(0) = 0$. Równanie Newtona rozpisane w układzie biegunowym, $ma_r = F_r$, $ma_\varphi = F_\varphi$ to dwa równania:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -mg, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Drugie równanie, po pomnożeniu obu stron przez r , daje się zwinąć do⁵¹

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0, \quad \text{czyli} \quad mr^2\dot{\varphi} = L = \text{const.},$$

i wyraża, jak łatwo zrozumieć, zachowanie z -owej składowej momentu pędu (ponieważ jedyna działająca na kamień w układzie inercyjnym siła jest centralna, moment pędu

⁵¹Innym sposobem dojścia do tego samego wniosku jest zapisanie tego równania w postaci

$$-2 \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \equiv \frac{1}{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{dt},$$

i scałkowanie go stronami

$$-2 \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dr}{r} = \int_{\dot{\varphi}(0)}^{\dot{\varphi}(t)} \frac{d(\dot{\varphi})}{\dot{\varphi}},$$

co daje

$$\ln[\dot{\varphi}(t)/\dot{\varphi}(0)] = -2 \ln[r(t)/r(0)],$$

czyli $mr^2(t)\dot{\varphi}(t) = mr^2(0)\dot{\varphi}(0)$.

kamienia jest stałą ruchu; w układzie biegunowym, jawnie widoczna jest jednak tylko stałość $L_z \equiv L$). Zatem z równania tego możemy wyznaczyć $\dot{\varphi}$ i wstawić do pierwszego:

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -mg,$$

Standardowym sposobem radzenia sobie z tym równaniem jest pomnożenie obu jego stron przez $\dot{r}$ i zwiniecie do

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + mgr \right) = 0,$$

czyli do równości wyrażającej stałość całkowitej energii kamienia. Równanie to będzie badane w zadaniach dotyczących ruchu w polu grawitacyjnym. Tu uprościmy sobie zadanie, przyjmując, co znajdzie swoje uzasadnienie niżej, że $L^2 \sim \omega^2$ i wobec tego, człon ten w równaniu na r można pominąć. Po szkolnym scałkowaniu daje ono wtedy

$$r(t) = r(0) + \dot{r}(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = (R+h) - \frac{1}{2}gt^2.$$

Stąd, czas spadku, wyznaczony równością $r(t_{\text{sp}}) = 0$, jest równy, jak poprzednio $t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}$.

Mając $r(t)$ można znaleźć $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{dt' L}{mr^2(t')} = \frac{L}{m} \int_0^t \frac{dt'}{[R+h - \frac{1}{2}gt'^2]^2}.$$

Całkę tę można wyliczyć ściśle, ale byłby to zbyt ciężki trud: ponieważ $R+h \gg gt_{\text{sp}}^2$, możemy rozwinąć funkcję podcałkową

$$\varphi(t) = \frac{L}{m(R+h)^2} \int_0^t dt' \left(1 + \frac{gt'^2}{R+h} + \dots \right) = \frac{L}{m(R+h)^2} t + \frac{1}{3} \frac{gL}{m(R+h)^3} t^3 + \dots$$

Aby wyznaczyć L , zauważamy, że w chwili początkowej kamień znajdujący się na wierzchołku wieży ma niezerową prędkość w kierunku $\mathbf{e}_\varphi$, równą $(R+h)\omega$. Zatem $L = mr^2(0)\omega = m(R+h)^2\omega$ i

$$\varphi(t) = \omega t + \frac{1}{3} \frac{\omega}{R+h} gt^3.$$

Trzeba jednak pamiętać, że w czasie, gdy kamień spadał z wieży, jej podstawa obróciła się z Ziemią o kąt $\varphi_Z = \omega t_{\text{sp}}$. Biorąc to pod uwagę, odległość, w jakiej od wieży upadnie kamień wynosi

$$d = R(\varphi(t_{\text{sp}}) - \varphi_Z) = \frac{1}{3} \frac{R\omega}{R+h} gt_{\text{sp}}^3 \approx \frac{1}{3} g\omega t_{\text{sp}}^3.$$

Widać że przyczyną odchylenia kamienia na Wschód jest naprawdę to, że w układzie inercyjnym ma on w momencie rozpoczęcia spadania większą prędkość w tymże kierunku, niż podstawa wieży.

Zadanie 5.5

Stosując rachunek zaburzeń (albo inaczej, zasadę Banacha) podać rozwinięcie ogólnego rozwiązania $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ równania Newtona wyznaczającego ruch punktu materialnego w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z powierzchnią Ziemi słuszne w przypadku ruchów krótkotrwałych, w trakcie których małym pozostaje bezwymiarowy czynnik ωt (ω jest tu prędkością kątową obrotu Ziemi).

Rozwiązanie:

W przypadku ruchów krótkotrwałych, o małym zasięgu, w których $|\mathbf{r}'(t)| \ll R$ (R jest tu promieniem Ziemi), można ogólne równanie

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g} - m \left(\mathbf{a}_{\text{tr}} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \right) + \mathbf{F}_{\text{inne}},$$

(słuszne w dowolnym układzie nieinercyjnym) uprościć do (zob. Zadanie 5.3)

$$m \mathbf{a}' = m \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{F}_{\text{inne}},$$

poprzez wciągnięcie w lokalne pole $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ efektów przyspieszenia $\mathbf{a}_{\text{tr}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ (w którym $\mathbf{R}$ jest wektorem łączącym środek Ziemi z początkiem układu nieinercyjnego na jej powierzchni) i pominięcie pozostałych efektów przyspieszenia odśrodkowego reprezentowanych przez wyraz $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$. Pominąć też można wyraz z pochodną $\boldsymbol{\omega}$ po czasie.

Jeśli siły inne niż grawitacyjne nie występują (tj. jeśli $\mathbf{F}_{\text{inne}} = \mathbf{0}$) i jeśli przyjmiemy, że w obszarze, w którym zachodzi ruch $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ jest stałym wektorem, do scałkowania jest równanie (pomijamy odtąd primy)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{g}_{\text{eff}} - 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

z warunkami początkowymi $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$, które raz całkuje się natychmiast dając

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}} t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0).$$

Jest to zwykle liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu z niejednorodnością, przy czym jednorodna jego część jest postaci

$$\frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{dt} = A \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

(A jest tu macierzą liniowego odwzorowania wektora w jego iloczyn wektorowy z wektorem $-2\boldsymbol{\omega}$ zapisana oczywiście w bazie wektorów $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ i $\mathbf{e}_z$). Można byłoby je scałkować ściśle, rozwiązując najpierw równanie jednorodne i potem uzmienniając stałą. Otrzymane rozwiązanie byłoby jednak dość skomplikowane i uwzględniałoby także wyrazy rzędu $\omega^2 t^2$,

$\omega^3 t^3$, które, wobec pominięcia wyżej członu odśrodkowego $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$, są bez znaczenia (pominięte w równaniu wyrazy powodują efekty tego samego rzędu). Zamiast tego najwygodniej jest zastosować rachunek zaburzeń. Numerujemy więc rozwiązania według rzędów przybliżenia oznaczając rozwiązanie n -tego rzędu $\mathbf{r}^{(n)}(t)$ i przyjmując, że $\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0$ (pierwszym przybliżeniem ruchu jest oczywiście bezruch!). Rozwiązanie $(n+1)$ -go rzędu znajdujemy rozwiązując równanie

$$\frac{d\mathbf{r}^{(n+1)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^{(n)}(t) - \mathbf{r}_0),$$

którego prawa strona jest już jawną funkcją t , co umożliwia łatwe rozwiązanie go. Ponieważ $\mathbf{r}^{(0)}(t) = \mathbf{r}_0$, jako równanie wyznaczające $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{r}^{(1)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t.$$

Stąd oczywiście

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2.$$

Z kolei wykorzystanie $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ prowadzi do równania na $\mathbf{r}^{(2)}(t)$ postaci

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^{(2)}(t)}{dt} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}^{(1)}(t) - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 t - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}}t^2. \end{aligned}$$

Po scałkowaniu go otrzymujemy

$$\mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 - \boldsymbol{\omega} t \times (\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2).$$

Przybliżenie $\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}^{(2)}(t)$ jest już (dla większości praktycznych zastosowań) wystarczająco dokładne. Aby to zobaczyć, znajdziemy jeszcze $\mathbf{r}^{(3)}(t)$ całkując równanie:

$$\frac{d\mathbf{r}^{(3)}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}_{\text{eff}}t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 t - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 + 2\boldsymbol{\omega} t \times \left(\boldsymbol{\omega} t \times (\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) \right).$$

Otrzymujemy z niego

$$\mathbf{r}^{(3)}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2 - \boldsymbol{\omega} t \times (\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) + 2\boldsymbol{\omega} t \times \left(\boldsymbol{\omega} t \times (\frac{1}{3}\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{12}\mathbf{g}_{\text{eff}}t^2) \right).$$

Widać więc, że w wyrazach pojawiających się w rozwiązaniach kolejnych rzędów występują coraz wyższe potęgi bezwymiarowego czynnika ωt . Rachunek zaburzeń daje więc rozwiązanie pełnego rozwiązania, które można by było uzyskać sposobem podanym wyżej) według potęg ωt . Ponieważ w $\mathbf{r}^{(3)}(t)$ występują wyrazy z $(\omega t)^2$, a w samym rozwiązywanym równaniu pominięty został człon z przyspieszeniem odśrodkowym będący tego właśnie rzędu, jest jasne, że należy się ograniczyć do rozwiązania $\mathbf{r}^{(2)}(t)$.

Zadanie 5.6

Korzystając z wyprowadzonego w Zadaniu 5.5 rozwinięcia

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 - \boldsymbol{\omega} t \times \left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3} \mathbf{g} t^2 \right) + \mathcal{O}(\omega^2 t^2),$$

w którym $\mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}_0$ są odpowiednio początkowym położeniem i początkową prędkością, $\boldsymbol{\omega}$ wektorem prędkości kątowej obrotu Ziemi, a $\mathbf{g}$ polem ciężenia, zbadać spadek swobodny kamienia z wieży o wysokości h stojącej na szerokości geograficznej⁵² φ i znaleźć odchylenie kamienia od podstawy wieży.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy układ odniesienia o początku w podstawie wieży, którego oś z jest skierowana w górę, oś x na południe, a oś y na wschód. W układzie tym wektor prędkości kątowej Ziemi ma postać $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_z \sin \varphi)$, wektorem prędkości początkowej jest $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, a $\mathbf{r}_0 = h \mathbf{e}_z$. Aby skorzystać z wyprowadzonego w Zadaniu 5.5 przybliżonego rozwiązania równania Newtona

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\text{eff}} t^2 - \boldsymbol{\omega} t \times \left(\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{3} \mathbf{g}_{\text{eff}} t^2 \right),$$

uwzględniającego w pierwszym rzędzie efekty niezerowej prędkości kątowej Ziemi, obliczamy iloczyn wektorowy $\boldsymbol{\omega}$ z $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -g \mathbf{e}_z$:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}_{\text{eff}} = \omega g \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y \omega g \cos \varphi.$$

Ponieważ $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, otrzymujemy

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\text{eff}} t^2 + \frac{1}{3} g \omega t^3 \cos \varphi \mathbf{e}_y,$$

czyli, po rozpisaniu na składowe,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{1}{3} g \omega t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z ostatniej linii odczytujemy, że w tym przybliżeniu obrót Ziemi nie wpływa na czas spadku kamienia:

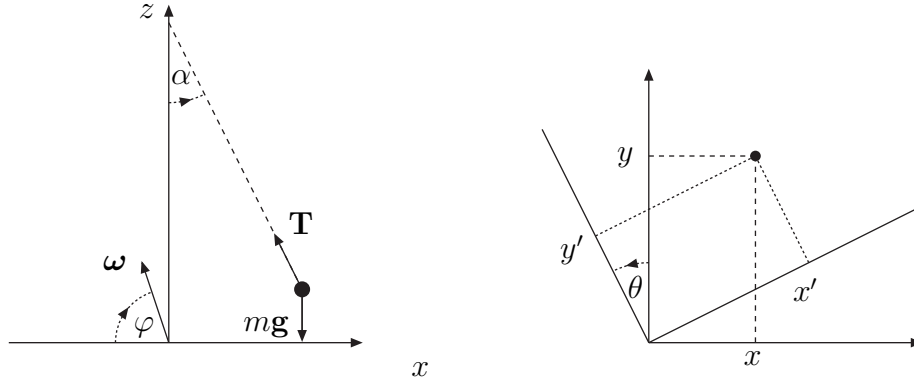
$$t_{\text{sp}} = \sqrt{2h/g}.$$

Ponieważ $x(t) \equiv 0$, kamień odchyła się na Wschód o odległość

$$d = y(t_{\text{sp}}) = \frac{1}{3} g \omega t_{\text{sp}}^3 \cos \varphi.$$

Modulo czynnik szerokości geograficznej $\cos \varphi$, jest to ten sam wynik, co w Zadaniu 5.4.

⁵²Korzystającym z podręcznika G. Białkowskiego przypominam, że przyjęło się liczyć szerokość geograficzną od równika (a nie od bieguna północnego).



Rysunek 36: Po lewej: Wahadło Foucault zawieszone nad obracającą się powierzchnią Ziemi i wychylone w kierunku osi x . φ jest kątem szerokości geograficznej (zdefiniowanej normalnie). Po prawej: Obrót układu współrzędnych o kąt θ .

Zadanie 5.9 (Wahadło Foucault, takie jak u U. Eco)

Znaleźć w przybliżeniu małych wychyleń od położenia równowagi ruch wahadła Foucault (tj. ciężarka) o masie m zawieszonego na (w przybliżeniu) nieważkiej i nierozciągliwej lince o długości ℓ nad punktem na powierzchni Ziemi (nad posadzką paryskiego Panteonu) znajdującym się na szerokości geograficznej φ .

Rozwiązanie:

Ponieważ ruch wahadła może trwać dowolnie długo i bezwymiarowy czynnik ωt nie musi być mały, nie można tu korzystać z wyprowadzonego w Zadaniu 5.5 rozwinięcia rozwiązania według potęg tego czynnika. Trzeba inaczej rozwiązać równanie ruchu wahadła, które w nieinercyjnym układzie związanym z obracającą się Ziemią ma postać⁵³

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} + \mathbf{T} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

$\mathbf{r}$ jest tu wektorem położenia ciężarka (względem układu związanego z powierzchnią Ziemi; wyraz $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ jest włączony do $\mathbf{g}$), a $\mathbf{T}$ jest siłą nań działającą ze strony linki. Ostatni człon po prawej stronie jak zwykle pominiemy, bo jest on proporcjonalny do ω^2 i jest mały w porównaniu z zachowanymi przy typowych wartościach $|\mathbf{r}| \sim 1$ m, $|\dot{\mathbf{r}}| \sim 1$ m/s bo $\omega \approx 10^{-4}$ s⁻¹. Wybierając układ o początku w punkcie na Ziemi, nad którym zawieszono wahadło i kierując jego oś z w górę, a oś x na południe możemy jawnie rozpisać siły. W tak obranym układzie

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x v_y \omega \sin \varphi + \mathbf{e}_y \omega (v_x \sin \varphi + v_z \cos \varphi) - \mathbf{e}_z v_x \omega \cos \varphi.$$

W przybliżeniu małych odchyłeń od pionu, czyli od położenia równowagi, ruch można przybliżyć przez ruch płaski, tj. przyjąć, że $z \approx \text{const}$ i $v_z \approx 0$. Bilans sił w sytuacji, w

⁵³Wszystkie wielkości są tu obliczane w układzie nieinercyjnym więc primy pomijamy.

której $y = 0$, a $x \neq 0$ (wahadło wychylone dokładnie w kierunku na południe) wygląda wtedy tak (zob. lewy Rysunek 36):

$$\begin{aligned} F_x^{\text{sum}} &= 2mv_y\omega_z - T \sin \alpha, \\ F_z^{\text{sum}} &= 2mv_y\omega \cos \varphi - mg + T \cos \alpha. \end{aligned}$$

Wprowadzone tu zostało ułatwiające zapis oznaczenie

$$\omega_z \equiv \omega \sin \varphi.$$

Ponieważ zakładamy, że $z \approx \text{const}$, więc składowa z -owa F_z^{sum} wypadkowej siły musi znikać. Stad,

$$T = \frac{mg - 2mv_y\omega \cos \varphi}{\cos \alpha},$$

a zatem

$$F_x^{\text{sum}} = 2mv_y\omega_z - mg \operatorname{tg} \alpha + 2mv_y\omega \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Trzeci wyraz w F_x^{sum} można pominąć, gdyż, będąc (w przyjętym przybliżeniu małych wychyleń) proporcjonalnym i do ω i do $\operatorname{tg} \alpha \ll 1$ jest on tu małą wielkością drugiego rzędu. Ponadto w przybliżeniu małych wychyleń, $|\alpha| \ll 1$,

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{x}{\ell}.$$

Uogólniając te rozważania do sytuacji, gdy zarówno x , jak i y są niezerowe możemy wypisać równania wyznaczające ruch ciężarka w płaszczyźnie xy :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 2\omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= -2\omega_z \dot{x}. \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenie $\omega_0^2 \equiv g/\ell$. Najprościej rozwiązuje się te równania przechodząc do zespolonej zmiennej $\xi \equiv x + iy$. W tej zmiennej stają się one jednym jednorodnym równaniem liniowym drugiego rzędu

$$\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi + 2i\omega_z \dot{\xi} = 0.$$

Szukamy rozwiązania w postaci $\xi(t) = \mathbb{A}e^{i\lambda t}$, co daje równanie charakterystyczne na λ

$$-\lambda^2 - 2\omega_z \lambda + \omega_0^2 = 0,$$

którego pierwiastkami są $\lambda_{\pm} = -\omega_z \pm \Omega$, gdzie $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$. Najogólniejsze rozwiązanie ma zatem postać

$$\xi(t) \equiv x(t) + iy(t) = e^{-i\omega_z t} (\mathbb{A}_+ e^{i\Omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\Omega t}).$$

Zanim obliczymy części rzeczywistą i urojoną prawej strony, dobrze jest się zastanowić nad czynnikiem $e^{-i\omega_z t}$. Jeśli $\xi = x + iy$ jest (zespolonym) położeniem punktu w układzie xy , to, jak łatwo zobaczyć (zob. Rysunek 36), z jego (zespolonym) położeniem $\xi' = x' + iy'$ w układzie obróconym względem xy przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara o kąt θ , wiąże się ono wzorem $\xi = e^{i\theta}\xi'$. Zatem w układzie, który obracałby się w kierunku (na półkuli północnej, gdzie $\sin \varphi > 0$, czyli $\omega_z > 0$) *zgodnym* z kierunkiem obrotu wskazówek zegara ruch rzutu wahadła na płaszczyznę byłby dany przez

$$\xi'(t) \equiv x'(t) + iy'(t) = \mathbb{A}_+ e^{i\Omega t} + \mathbb{A}_- e^{-i\Omega t}.$$

Wiadomo, że torem w układzie tym jest w ogólności elipsa (zob. Zadanie 2.7), której kształt zależy od stałych $\mathbb{A}_\pm = A_\pm + iB_\pm$ (skrajnymi przypadkami są prosta i okrąg). W układzie xy zatem tor ten jako całość obraca się z prędkością kątową $\omega_z = \omega \sin \varphi$ - maksymalną na biegunie i znikającą na równiku.

Zadanie 5.10 (Twierdzenie Larmora)

Pokazać, że jeśli cząstka o masie m wykonuje ruch $\mathbf{r}(t)$ pod wpływem jakiejś zadanej siły zewnętrznej $\mathbf{F}$, to po zmianie siły

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} + \varepsilon m \mathbf{v} \times \mathbf{k},$$

gdzie $\mathbf{k}$ jest stałym wektorem, a $|\varepsilon| \ll 1$, tor ruchu $\mathbf{r}(t)$ w pierwszym przybliżeniu (tj. z dokładnością, w której uwzględnia się tylko efekty rzędu ε) zacznie się obracać. Jak zmieni się wtedy energia kinetyczna (a więc i energia całkowita) cząstki?

W przypadku, gdy $\varepsilon m \mathbf{k} = q \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{B}$ jest stałym i jednorodnym polem magnetycznym, stwierdzenie będące przedmiotem tego zadania jest treścią tzw. twierdzenia Larmora.

Rozwiązanie:

Aby pokazać, że tor ruchu zacznie się obracać jako całość, czyli ulegać precesji, wystarczy napisać równanie “Newtona” spełniane przez cząstkę w układzie nieinercyjnym obracającym się względem wyjściowego układu (inercyjnego) z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Ma ono postać

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \varepsilon m (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times \mathbf{k} - m [2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] .$$

Skorzystaliśmy tu ze związku $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ łączącego ze sobą prędkości cząstki w obu układach. Widać z tego równania, że jeśli dobierzemy układ nieinercyjny tak, by jego prędkość kątowa względem wyjściowego układu inercyjnego była równa

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{k},$$

to wyraz $\varepsilon m \mathbf{v}' \times \mathbf{k}$ zniesie się z członem Coriolisa, a pozostałe wyrazy zależne od $\boldsymbol{\omega}$ będą rzędu $(\varepsilon/2)^2$, czyli będą do pominięcia. W tak obracającym się układzie równanie ruchu cząstki

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) .$$

pod działaniem zmodyfikowanej siły ma formalnie tę samą postać, co równanie ruchu ze starą siłą w wyjściowym układzie inercyjnym. Rozwiązania tych równań $\mathbf{r}'(t)$ i $\mathbf{r}(t)$ będą więc dane tą samą (wektorową) funkcją czasu, t.j. rozwiązaniami będą $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(t)$ i $\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t)$, pod warunkiem, że formalnie identyczne będą warunki początkowe. Przyjmując, że dodatkowa siła włączona została w chwili $t = 0$ (tzn. obierając tę chwilę za początek liczenia czasu) możemy wybrać początki obu układów, inercyjnego i obracającego się w punkcie, w którym w tym właśnie momencie znajdowała się cząstka. Dzięki temu $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ i $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$. Co więcej, ponieważ $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}'(0) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}'(0)$, warunki początkowe obu równań różniczkowych będą formalnie identyczne i tor ruchu w układzie nieinercyjnym przy działaniu dodatkowej siły $\varepsilon m \mathbf{v} \times \mathbf{k}$ będzie taki sam, jakim był on w układzie inercyjnym w nieobecności siły zaburzającej. Dowodzi to tego, że w tym

przybliżeniu, tor cząstki w wyjściowym układzie zacznie się obracać z prędkością kątową równą ω .

Jeśli cząstka ma ładunek elektryczny q i położymy $\varepsilon m \mathbf{k} = q \mathbf{B}$, to wynika z tego, że po włączeniu słabego pola magnetycznego tor jej ulegnie precesji zwanej *precesją Larmora* o prędkości kątowej (zwanej *częstotliwością Larmora*) równej $q|\mathbf{B}|/2m$.

Aby lepiej zrozumieć ten wynik możemy odwołać się do Zadania 2.14, w którym badany był ruch naładowanej cząstki o masie m i ładunku q (załóżmy, że $q > 0$) w polu elektrycznym $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E$ i magnetycznym $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B$. Jeśli cząstka ma w punkcie $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ prędkość $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x v_0^x + \mathbf{e}_y v_0^y$, to, jak już wiemy z rozwiązania Zadania 2.14, będzie się ona poruszać po cykloidzie danej wzorami

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{E}{B} t + \frac{v_0^y}{\omega_B} (1 - \cos \omega_B t) + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \sin \omega_B t, \\ y(t) &= \frac{v_0^y}{\omega_B} \sin \omega_B t + \frac{1}{\omega_B} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) (-1 + \cos \omega_B t), \end{aligned}$$

czyli, przy $t \sim 0$, (przypomnijmy, że $\omega_B = qB/m$) co w przybliżeniu, gdy $|\omega_B t| \ll 1$, czyli gdy można ograniczyć się do pierwszego rzędu w ω_B , daje

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0^x t + \frac{1}{2} v_0^y \omega_B t^2, \\ y(t) &= v_0^y t - \frac{1}{2} \left(v_0^x - \frac{E}{B} \right) \omega_B t^2. \end{aligned}$$

Zgodnie zaś z rozważaniami przeprowadzonymi wyżej, jeśli pole magnetyczne jest słabe, w układzie obracającym się z prędkością kątową $\omega = -(\varepsilon/2)\mathbf{k} \equiv -(qB/2m)\mathbf{e}_z$ ruch powinien pozostać ruchem prostoliniowym jednostajnie przyspieszonym w kierunku pola elektrycznego. W układzie tym zatem⁵⁴ $x'(t) \approx v_0^x t$ oraz $y'(t) \approx v_0^y t + (qE/2m)t^2$. Ogólnie, jeśli układ $\mathcal{O}'$ jest obrócony (w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara) względem układu $\mathcal{O}$ o kąt θ wokół wspólnej osi z , to $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$. Tu zatem, przechodząc do układu nieobracającego się, trzeba położyć $\theta = -(qB/2m)t \equiv -(\omega_B/2)t$, co da

$$\begin{aligned} x(t) &\approx v_0^x t \cos\left(-\frac{1}{2}\omega_B t\right) - \left(v_0^y t + \frac{qE}{2m} t^2\right) \sin\left(-\frac{1}{2}\omega_B t\right), \\ y(t) &\approx v_0^x t \sin\left(-\frac{1}{2}\omega_B t\right) + \left(v_0^y t + \frac{qE}{2m} t^2\right) \cos\left(-\frac{1}{2}\omega_B t\right), \end{aligned}$$

⁵⁴Znaki przybliżonej równości wynikają z tego, że w układzie obracającym się kierunek pola elektrycznego zmienia się. Ponieważ interesuje nas ruch tuż po włączeniu pola magnetycznego, kiedy kierunki osi układu obracającego się są wciąż niemal takie, jak osi układu inercjalnego, możemy zmianę kierunku pola elektrycznego pominąć.

czyli, po rozwinięciu,

$$\begin{aligned}x(t) &\approx v_0^x t(1 - \dots) - \left(v_0^y t + \frac{qE}{2m} t^2\right) \left(-\frac{1}{2}\omega_B t + \dots\right), \\y(t) &\approx v_0^x t\left(-\frac{1}{2}\omega_B t + \dots\right) + \left(v_0^y t + \frac{qE}{2m} t^2\right) (1 + \dots).\end{aligned}$$

Z dokładnością do wyrazów liniowych w ω_B zgadza się to z tym, co otrzymaliśmy ze ścisłego wzoru. Przykład ten pokazuje też, jak należy rozumieć twierdzenie Larmora: jego zachodzenie z dokładnością do pierwszego rzędu w ε oznacza zarazem jego słusność tylko dla bardzo krótkich odcinków czasu t po włączeniu zaburzenia. Niemniej rozumowanie będące jego treścią można “przedłużyć” przechodząc do nowego punktu $\mathbf{r}$, w którym cząstka znajdzie się w układzie inercjalnym chwilę później (punkt ten jest osiągany w obecności zaburzenia ale można go w przybliżeniu wyznaczyć stosując twierdzenie Larmora), przyjmując ten punkt za wspólny początek nowych układów: inercjalnego i obracającego się, i stosując ponownie twierdzenia Larmora, by znaleźć położenie cząstki w chwili jeszcze trochę późniejszej itd.

Po włączeniu siły zaburzającej cząstka ma w układzie inercjalnym prędkość $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t)$, a prędkość $\mathbf{v}'(t)$ jest w każdej chwili t taka sama, jak prędkość $\mathbf{v}_{\text{stara}}(t)$, którą cząstka miałaby w układzie inercjalnym bez dodatkowej siły zaburzającej, $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}_{\text{stara}}(t)$. Zatem zmiana ΔT energii kinetycznej cząstki (mierzonej w wyjściowym układzie inercjalnym) spowodowana włączeniem zaburzenia jest równa

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{\text{stara}}^2 = m\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Wykorzystając tożsamość wektorową $\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}')$, można tę zmianę zapisać jako $\Delta T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}(t)$, gdzie, ponieważ $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{\text{stara}}$, a położenie $\mathbf{r}'(t)$ jest też identyczne z $\mathbf{r}_{\text{stara}}(t)$, $\mathbf{L}$ jest momentem pędu, jaki miałaby cząstka przy braku zaburzenia. Zatem zmiana energii kinetycznej, a tym samym i całkowitej cząstki (np. cząstki krążącej jak elektron w atomie wokół jądra) spowodowana włączeniem pola magnetycznego jest proporcjonalna do wartości tegoż pola i do rzutu momentu pędu cząstki na jego kierunek.

Historycznie, twierdzenie Larmora pozwoliło H.A. Lorentzowi wyjaśnić odkryty przez P. Zeemana efekt polegający na rozszczepieniu linii widmowych atomu po umieszczeniu tegoż atomu w stałym polu magnetycznym. (Obaj ci holenderscy fizycy otrzymali nagrodę Nobla za 1902 r.) Wyjaśnienie podane przez Lorentza stosuje się jednak tylko do tzw. *normalnego efektu Zeemana*, który występuje tylko w niektórych atomach. Znacznie częściej ma się do czynienia z tzw. *anomalnym efektem Zeemana*, którego wyjaśnienie wymaga uwzględnienia spinu elektronu.

Przypomnienie

Ruch układu N mas punktowych $m_{(i)}$ poddanych działaniu sił $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, \dots, N$ numeruje te masy) może być ograniczony *wieżami*, tj. pewnymi dodatkowymi warunkami nałożonymi na położenia i prędkości cząstek. (Zwykle rozpatruje się tylko więzy liniowo zależne od prędkości). Więzy zależne tylko od położenia nazywa się *holonomicznymi*. Niektóre z więzów zależnych od prędkości można scałkować (albo bezpośrednio, albo z pomocą *czynnika całkującego*) i stają się one więzami holonomicznymi (zobacz Zadanie 6.1). Niżej będziemy zajmować się tylko więzami holonomicznymi.

Więzy holonomiczne mogą mieć postać nierówności (tzw. *więzy jednostronne*)

$$g_l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \geq 0, \quad l = 1, \dots, r,$$

i liczba r takich więzów może być dowolnie duża (pod warunkiem, że wyznaczany przez nie w $\mathbb{R}^n$ obszar dostępny jest niepusty), oraz mogą mieć postać równości (tzw. *więzy dwustronne*)

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Liczba p niezależnych i niesprzecznych więzów dwustronnych⁵⁵ nie może przekraczać $3N$. (Jeśli $p = 3N$, żaden ruch nie jest już możliwy - masy w danej chwili mogą znajdować się tylko w punktach całkowicie wyznaczonych przez więzy). Dane więzy można przededefiniować biorąc ich kombinacje liniowe, bo istotna jest w zasadzie tylko $3N - p$ wymiarowa podrozmierność $\mathbb{R}^{3N}$, którą one wyznaczają (możliwość ta staje się jednak trochę problematyczna, gdy występują siły tarcia, których wartość jest zależna od sił reakcji). Jeśli takie więzy nie zależą od czasu, nazywają się *skleronomicznymi* (zależne zaś od czasu zwą się *reonomicznymi*). Więzy mogą być narzucone na położenia zdefiniowane względem układu inercjalnego lub nieinercjalnego (w tym drugim przypadku nawet gdy są one w układzie nieinercjalnym niezależne od czasu, zmieniają się w układzie inercjalnym i dlatego wykonują zwykle nad układem pracę).

Rozpatrzmy najpierw przypadek jednej cząstki poddanej działaniu zadanej (wypadkowej) siły $\mathbf{F}$. Możliwe są wówczas dwa rodzaje holonomicznych więzów dwustronnych: cząstka może być zmuszona do pozostawiania stale na pewnej powierzchni zadanej np. równaniem

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

lub do poruszania się po pewnej krzywej, która może być zadana dwoma niesprzecznymi i niezależnymi równaniami

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0,$$

lub też zadana parametrycznie. Przyjmuje się, że obecność więzów powoduje konieczność uzupełnienia znanej (tj. zadanej) siły $\mathbf{F}$ o dodatkową siłę reakcji $\mathbf{F}_R$, która zmusza cząstkę

⁵⁵Warunek niezależności i niesprzeczności więzów można ująć ściśle matematycznie ale nie będziemy tu tego robić, bo w typowych sytuacjach fizycznych jego spełnianie jest w miarę oczywiste.

do pozostawiania na powierzchni więzów. Równanie Newtona wyznaczające jej ruch ma więc postać ($\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$)

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_R.$$

Podstawowy postulat dynamiczny, uogólniający wyniki doświadczeń głosi, że siła reakcji $\mathbf{F}_R$ jest prostopadła do powierzchni więzów, czyli że można ją zapisać w postaci

$$\mathbf{F}_R = \lambda(t) \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \text{lub} \quad \mathbf{F}_R = \lambda_1(t) \nabla f_1(\mathbf{r}, t) + \lambda_2(t) \nabla f_2(\mathbf{r}, t),$$

odpowiednio w pierwszej i w drugiej sytuacji. Postulat ten umożliwia znalezienie zarówno samego ruchu (tj. funkcji $\mathbf{r}(t)$ wyznaczającej zgodne z więzami położenie cząstki w każdej chwili), jak też i siły reakcji: oba układy

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \lambda \nabla f(\mathbf{r}, t) \\ f(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right., \quad \text{lub} \quad \left\{ \begin{array}{l} m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{r}, t) + \lambda_2 \nabla f_2(\mathbf{r}, t) \\ f_1(\mathbf{r}, t) = 0 \\ f_2(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right.,$$

mają tyle równań ile jest w nich niewiadomych (siła $\mathbf{F}$ musi być zadana jawnie z góry jako funkcja czasu, położenia i ewentualnie prędkości cząstki, ale siła reakcji nie).

Jeśli równania więzów nie zależą jawnie od czasu (więzy są skleronomiczne), wyrażenie $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_R = \lambda d\mathbf{r} \cdot \nabla f$ lub $\lambda_1 d\mathbf{r} \cdot \nabla f_1 + \lambda_2 d\mathbf{r} \cdot \nabla f_2$ jest równe zero. Wynika to natychmiast z zupełnego zrózniczkowania po czasie funkcji $f(\mathbf{r}(t), t) = 0$ (lub funkcji $f_1(\mathbf{r}(t), t) = 0$ i $f_2(\mathbf{r}(t), t) = 0$)

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t), t) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}(t), t) = 0.$$

Jeśli pochodna cząstkowa po czasie jest równa zero (funkcja f nie zależy jawnie od czasu), związek ten oznacza właśnie prostopadłość różniczki $d\mathbf{r}$ przemieszczenia cząstki i gradientu f , czyli także siły $\mathbf{F}_R$. (W drugim przypadku rozumowanie jest analogiczne). W przypadku, gdy więzy są zadane w układzie inercyjnym oznacza to, że siła reakcji nie wykonuje pracy; nie musi to być słuszne, gdy są one zadane względem układu nieinercyjnego (w takim przypadku rozpatrywane tu pochodne po czasie oznaczają pochodne liczone względem układu nieinercyjnego zob. Przypomnienie w poprzednim rozdziale).

Gdy więzy zależą od czasu, mogą wykonywać pracę, gdyż rzeczywiste przemieszczenie cząstki nie jest już naogół styczne do chwilowej powierzchni więzów (czyli przemieszczenie to nie musi już być prostopadłe do siły reakcji).

Jeśli siła $\mathbf{F}$ jest potencjalna (tzn. jeśli $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$), wówczas zmianę energii mechanicznej $T + V$, spowodowaną zmiennością więzów w czasie, można wyrazić wzorem (droga całkowania Γ biegnie po torze cząstki od $\mathbf{r}(t_0)$ do $\mathbf{r}(t)$)

$$T(t) + V(t) = T(t_0) + V(t_0) + \int_{\Gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_R = T(t_0) + V(t_0) - \int_{t_0}^t dt' \lambda(t') \frac{\partial}{\partial t'} f(\mathbf{r}(t'), t'),$$

(i analogicznie w drugim przypadku) gdzie wykorzystana została wypisana wyżej tożsamość wynikająca ze zrózniczkowania równania więzów po czasie.

W przypadku cząstki zmuszonej do pozostawania na ustalonej krzywej, która nie zależy od czasu najprościej jest równanie Newtona z siłą reakcji rzutować na wektor styczny do tej krzywej $\mathbf{t}$:

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{F} + \mathbf{F}_R) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}.$$

Ponieważ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = a_t = \ddot{l}$ (l jest tu długością krzywej mierzoną od jakiegoś ustalonego jej punktu - zob. Zadanie 1.7), po wyrażeniu $F_t \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ przez l i $\dot{l}$, otrzymuje się na funkcję $l(t)$ zamknięte równanie

$$m \ddot{l} = F_t(l, \dot{l}, t),$$

wyznaczające położenie cząstki na krzywej. Jego rozwiązanie daje kompletną informację o położeniu cząstki w przestrzeni z każdej chwili. Dodatkowymi równaniami pozwalającymi wyznaczyć siły reakcji są rzuty równania Newtona na dwa wektory $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$ prostopadłe do krzywej (w danym jej punkcie). Ponieważ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \equiv a_n = mv^2/\rho$ (zob. Zadanie 1.7), mamy stąd dwie równości

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n + F_{Rn}, \quad F_b + F_{Rb} = 0.$$

Pierwsza z nich mówi po prostu, że rzut na kierunek $\mathbf{n}$ sumy siły reakcji i siły zewnętrznej musi powodować (znane ze szkoły) przyspieszenie dośrodkowe ($\mathbf{n}$ wyznacza kierunek w którym leży środek okręgu o promieniu ρ lokalnie przybliżającego tor). Druga zaś mówi, że siły w kierunku, w którym przyspieszenie nie ma składowej, muszą się równoważyć.

Aby sformułować prawa dynamiki układów składających się z wielu mas, wygodnie jest podać najpierw nieco zmienione sformułowanie omówionych wyżej praw wyznaczających ruch pojedynczej cząstki. W przypadku ruchu po powierzchni $f(\mathbf{r}, t) = 0$, układ równań

$$\begin{cases} m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) + \lambda \nabla f(\mathbf{r}, t) \\ f(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases},$$

jest mianowicie równoważny układowi

$$\begin{cases} (m \ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \\ f(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \delta \mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}.$$

W drugim sformułowaniu, zwanym *zasadą d'Alemberta*, występuje wektor $\delta \mathbf{r}$ *przemieszczenia wirtualnego zgodnego z więzami*. Zasada d'Alemberta mówi, iż rzeczywisty ruch $\mathbf{r}(t)$ jest taki, że pierwsze równanie jest spełnione dla wszystkich przemieszczeń wirtualnych $\delta \mathbf{r}$ zgodnych z więzami.⁵⁶ Jej wynikanie z pierwszego układu równań jest oczywiste: jeśli pomnożymy skalarnie pierwsze równanie przez ortogonalny do $\nabla f(\mathbf{r}, t)$, ale poza

⁵⁶Zgodne z więzami przemieszczenie wirtualne $\delta \mathbf{r}$ nie jest tożsame z przemieszczeniem rzeczywistym $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)dt$: jest ono możliwym a priori przemieszczeniem się cząstki w sytuacji "zamrożenia" więzów,

tym dowolny wektor $\delta \mathbf{r}$, otrzymamy pierwsze równanie zasady d'Alemberta. Wynikanie zaś z zasady d'Alemberta pierwszego układu równań uzyskuje się stosując metodę mnożnika(ów) Lagrange'a: mnożymy ostatnie równanie przez funkcję $\lambda(t)$ i dodajemy stronami do pierwszego, co daje

$$(m\ddot{x} - F_x - \lambda \partial_x f) \delta x + (m\ddot{y} - F_y - \lambda \partial_y f) \delta y + (m\ddot{z} - F_z - \lambda \partial_z f) \delta z = 0.$$

Równość $\delta \mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r}, t) = 0$ wyznacza np. δx w funkcji pozostałych składowych δy i δz przemieszczenia wirtualnego, które pozostają wobec tego całkowicie dowolne. W związku z tym, dowolną na razie funkcję $\lambda(t)$ wybieramy tak, by zapewnić zerowanie się współczynnika przy (zależnej od δy i δz) składowej δx w powyższej równości. Aby więc była ona spełniona, znikać muszą także współczynniki w nawiasach przy niezależnych składowych δy i δz przemieszczenia. Otrzymuje się w ten sposób jako wniosek konieczność zerowania się każdego z wyrażeń w nawiasach z osobna, czyli zachodzenia pierwszego równania w pierwszym sformułowaniu.

Przeniesienie zasady d'Alemberta na przypadek cząstki poruszającej się po krzywej zadanej dwoma równaniami $f_1(\mathbf{r}, t) = 0$, $f_2(\mathbf{r}, t) = 0$ jest oczywiste. Przyjmuje ona wtedy postać

$$\left\{ \begin{array}{l} (m \ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \\ f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad f_2(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \delta \mathbf{r} \cdot \nabla f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \delta \mathbf{r} \cdot \nabla f_2(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right. .$$

W tym przypadku równość pierwsza jest w ruchu rzeczywistym spełniona dla wszystkich wektorów $\delta \mathbf{r}$ przemieszczeń wirtualnych spełniających dwa warunki (a nie jeden) zgodności z więzami. Zasada ta wynika w oczywisty sposób z podanego już wcześniej prawa ruchu po krzywej; wynikanie zaś tamtego prawa z zasady d'Alemberta wykazuje się w podobny sposób, jak w przypadku ruchu po powierzchni (warunki zgodności $\delta \mathbf{r}$ z więzami wyznaczają np. δx i δy w funkcji δz , ale są teraz dwa mnożniki Lagrange'a $\lambda_1(t)$ i $\lambda_2(t)$, które pozwalają wyzerować współczynniki przy tych zależnych składowych przemieszczenia, a z dowolności δz wynika konieczność znikania i trzeciego współczynnika.

Podsumowując te rozważania: ruch rzeczywisty zachodzi pod wpływem zadanej z góry siły $\mathbf{F}$ i siły reakcji $\mathbf{F}_R$, *której praca na przemieszczeniach wirtualnych zgodnych z więzami znika*.⁵⁷

Prawo dynamiki wyznaczające ruch układu N mas $m_{(i)}$, na każdą z których działa siła $\mathbf{F}_{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, (będąca wypadkową działającej na tę cząstkę siły zewnętrznej

tzn. przyjęcia ich postaci z chwili t . Jeśli więzy zależą od czasu, rzeczywiste przemieszczenie $d\mathbf{r}$ cząstki w przestrzeni jest złożeniem jej przemieszczenia wzdłuż więzów z przemieszczeniem samych więzów wynikającym z ich zmienności w czasie. (Np. rzeczywiste przemieszczenie przestrzenne $d\mathbf{r}$ mrówki idącej po rozdymającym się balonie nie jest styczne do powierzchni balonu w ustalonej chwili czasu). Ponadto, nawet jeśli więzy nie zależą od czasu, wektor $\delta \mathbf{r}$ reprezentuje wszystkie możliwe przemieszczenia styczne do powierzchni więzów, podczas gdy przemieszczenie $d\mathbf{r}$ jest, przy ustalonych warunkach początkowych, jednoznacznie wyznaczone przez zadaną siłę zewnętrzną $\mathbf{F}$.

⁵⁷W przypadku więzów zdefiniowanych względem układu nieinercyjnego należy to stwierdzenie rozumieć w sensie znikania iloczynów $\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_R$ w tymże układzie.

i sił wywieranych na tęże cząstkę ze strony pozostałych $N - 1$ cząstek) i poddanych (dwustronnym) więzom holonomicznym $f_k(\mathbf{r}_{(i)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}, t) = 0$, $k = 1, \dots, p$ ($p < 3N$) formułuje się następująco. Tak jak w przypadku jednej cząstki, istnienie więzów powoduje, że na każdą z cząstek działa dodatkowa siła reakcji $\mathbf{F}_{R(i)}$, wobec czego ruch i -tej cząstki jest wyznaczony przez równanie Newtona $m_{(i)}\ddot{\mathbf{r}}_{(i)} = \mathbf{F}_{(i)} + \mathbf{F}_{R(i)}$ oraz równania więzów $f_k(\mathbf{r}_{(i)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}, t) = 0$, $k = 1, \dots, p$. Ponadto przyjmuje się - i to jest główny postulat dynamiczny - że *suma prac wszystkich sił reakcji na zgodnych z więzami przemieszczeniach wirtualnych $\delta\mathbf{r}_{(i)}$ jest zawsze równa zeru*:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{R(i)} \cdot \delta\mathbf{r}_{(i)} = 0.$$

Należy zauważyć, że postulat ten nie wynika bezpośrednio (tj. bez rozpatrywania mikroskopowych mechanizmów powstawiania więzów) z praw Newtona. Jego słuszność jest potwierdzana przez zgodność wniosków otrzymywanych na jego podstawie z doświadczeniem.

Przyjęty tu postulat można w zwarty sposób ująć w postaci zasady d'Alemberta. Aby nadać jej ogólną postać, wprowadza się pojęcie $3N$ wymiarowej *przestrzeni konfiguracyjnej układu*, której osiami kartezjańskimi są kolejne składowe wektorów położenia cząstek:

$$\xi^1 = x_{(1)}, \quad \xi^2 = y_{(1)}, \quad \xi^3 = z_{(1)}, \quad \xi^4 = x_{(2)}, \quad \dots \quad \xi^{3N} = z_{(N)}.$$

Wprowadzamy też (nieco sztucznie) $3N$ mas m_i , które trójkami są równe masom prawdziwych cząstek ($m_1 = m_2 = m_3 = m_{(1)}$, $m_4 = m_5 = m_6 = m_{(2)}$, itd.). W podobny sposób zapisujemy też siły zadane $\mathbf{F}_{(i)}$:

$$F^1 = F_{(1)}^x, \quad F^2 = F_{(1)}^y, \quad F^3 = F_{(1)}^z, \quad F^4 = F_{(2)}^x, \quad \dots, \quad F^{3N} = F_{(N)}^z.$$

W tej notacji zasada d'Alemberta wynikająca z przyjętego postulatu głosi, iż rzeczywisty ruch $\boldsymbol{\xi}(t)$ układu w przestrzeni konfiguracyjnej jest taki, że

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{\xi}^i(t) - F^i) \delta\xi^i = 0,$$

dla wszystkich zgodnych z więzami wirtualnych przemieszczeń $\delta\xi^i$ w przestrzeni konfiguracyjnej, tj. przemieszczeń ograniczonych warunkami⁵⁸

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_k(\xi^1, \dots, \xi^{3N}, t)}{\partial \xi^i} \delta\xi^i = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Warunki te, plus p równań więzów $f_k(\xi^1, \dots, \xi^{3N}, t) = 0$, $k = 1, \dots, p$, wyznaczają (razem z warunkami początkowymi, które muszą być zgodne z więzami) ruch układu. W zapisie

⁵⁸Tak jak w przypadku jednej cząstki, rzeczywiste, tj. realizowane w trakcie ruchu, przemieszczenie jest jednym z możliwych przemieszczeń wirtualnych tylko wtedy, gdy więzy nie zależą od czasu.

operującym położeniami $\mathbf{r}_i$ poszczególnych cząstek powyższe warunki na przemieszczenia zgodne z więzami można napisać jako

$$\sum_{j=1}^N \delta \mathbf{r}_{(j)} \cdot \nabla_{(j)} f_k(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Symbol $\nabla_{(j)}$ oznacza tu “wektor” $(\partial/\partial x_{(j)}, \partial/\partial y_{(j)}, \partial/\partial z_{(j)})$.

Od podanej tu zasady d’Alemberta można z kolei przejść do układu *równań Lagrange’a pierwszego rodzaju* posługując się techniką mnożników Lagrange’a. Wprowadzamy w tym celu p funkcji $\lambda_k(t)$ (po jednej na każde równanie więzów) i dodajemy p warunków na przesunięcia wirtualne $\delta \xi^i$, każdy pomnożony przez odpowiadającą mu funkcję $\lambda_k(t)$ do warunku prostopadłości (w przestrzeni konfiguracyjnej) wektora $m \ddot{\xi}(t) - \mathbf{F}$ do wszystkich dopuszczalnych przesunięć wirtualnych $\delta \xi$. Stosując dalej znane już rozumowanie z dobieraniem mnożników Lagrange’a $\lambda_k(t)$, otrzymujemy równanie Lagrange’a pierwszego rodzaju

$$m \ddot{\xi}(t) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_R,$$

(wektor po lewej stronie należy rozumieć w ten sposób, że każda składowa $\ddot{\xi}^i(t)$ jest pomnożona przez odpowiednią masę m_i), w którym (uogólniona) siła reakcji $\mathbf{F}_R$ jest dana przez

$$\mathbf{F}_R = \lambda_1(t) \nabla_{\xi} f_1(\xi, t) + \dots + \lambda_p(t) \nabla_{\xi} f_p(\xi, t),$$

gdzie ∇_{ξ} jest $3N$ -wymiarowym “wektorem” o składowych $\partial/\partial \xi^1, \dots, \partial/\partial \xi^{3N}$. To samo wyrażone przez zwykłe wektory położen cząstek oznacza, że spełniają one równania Newtona z dodatkowymi siłami reakcji

$$m_{(i)} \ddot{\mathbf{r}}_{(i)}(t) = \mathbf{F}_{(i)} + \mathbf{F}_{R(i)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

i równania więzów $f_k(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}, t) = 0$, a siły reakcji są dane przez

$$\mathbf{F}_{R(j)} = \lambda_1(t) \nabla_{(j)} f_1(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}, t) + \dots + \lambda_p(t) \nabla_{(j)} f_p(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}, t).$$

W przypadku więzów niezależnych od czasu zasadę d’Alemberta można też zastosować do wyznaczania położen równowagi układu N mas $m_{(i)}$. tj. rozwiązań równań ruchu (odpowiadających szczególnym zgodnym z więzami warunkom początkowym na położenia i zerowym prędkościom początkowym), które nie zależą od czasu. Sprowadza się to do położenia równych zeru przyspieszeń $\ddot{\mathbf{r}}_{(i)}$ (lub, w notacji ogólnej, $\ddot{\xi}$) i obliczenia sił $\mathbf{F}_{R(i)}$ (jeśli zależą one od prędkości cząstek) dla zerowych prędkości $\dot{\mathbf{r}}_{(i)}$ (lub $\dot{\xi}$). Zasada d’Alemberta (kt??ra - żeby było wszystko bardziej po francusku popłatane - w tym szczególnym przypadku nazywa się zasadą prac wirtualnych Lagrange’a) mówi zatem, że położeniami równowagi układu N mas $m_{(i)}$ poddanych p skleronomicznym więzom

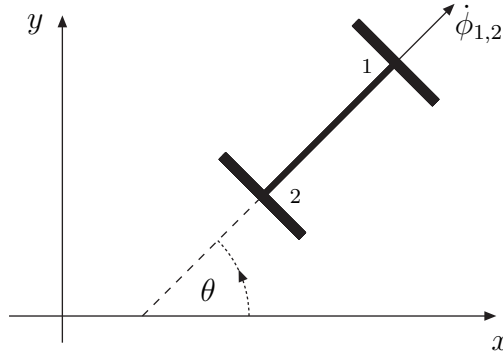
$f_k(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}) = 0$ i działaniu zadanych sił $\mathbf{F}_{(i)}$ mogą być takie położenia $\mathbf{r}_{(i)}^{(0)}$, przy których suma prac sił zadanych na zgodnych z więzami przemieszczeniach wirtualnych $\delta\mathbf{r}_{(i)}$ (przemieszczeniach w stosunku do położeń $\mathbf{r}_{(i)}^{(0)}$) jest równa zero

$$\sum_{i=1}^N \delta\mathbf{r}_{(i)} \cdot \mathbf{F}_{(i)} = 0.$$

W notacji ogólnej warunek ten na położenie równowagi $\xi_{(0)}$ przyjmuje zaś postać

$$\sum_{i=1}^{3N} \delta\xi^i F^i = 0,$$

w której siły F^i są wzięte dla $\dot{\xi}^i = 0$ i $\xi^i = \xi_{(0)}^i$, a przemieszczenia $\delta\xi^i$ spełniają p wypisanych wcześniej warunków prostopadłości (w $3N$ wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej) do powierzchni więzów.



Rysunek 37: Połączone osią o ustalonej długości b dwa koła (oba o promieniu a) toczące się bez poślizgu po płaskim podłożu (widok z góry). Każde z kół może obracać się na osi niezależnie od drugiego. Prędkość kątowna $\dot{\theta}$ jest skierowana (gdy $\dot{\theta} > 0$) do góry.

Zadanie 6.1 (Raz zobaczyć więzy nieholonomiczne)

Znaleźć więzy, którym poddany jest układ składający się z dwóch kół o takich samych promieniach a połączonych osią o ustalonej długości b i toczących się bez poślizgu po będącym płaską powierzchnią podłożu. Każde z kół może obracać się na osi niezależnie od drugiego.

Rozwiązanie:

Niech θ będzie kątem nachylenia osi łączącej koła w stosunku do osi x (zob. rysunek 37). Brak poślizgu oznacza, że chwilowe prędkości punktów styczności obu kół z podłożem są równe zero. Każda z tych prędkości jest wypadkową trzech niezależnych ruchów. W przypadku punktu 1 (punkt styczności z podłożem górnego koła) ruchami tymi są: ruch postępowy środka geometrycznego całego układu, obrót koła wokół osi łączącej koła oraz obrót wokół osi pionowej przechodzącej prostopadłe przez środek osi łączącej koła. W infimezmalnym odcinku czasu dt ruchy te dają następujące przemieszczenia punktu 1 odpowiednio wzdłuż osi poziomej: dx , $-a \sin \theta d\phi_1$ oraz $-\frac{1}{2}b \sin \theta d\theta$ i pionowej: dy , $a \cos \theta d\phi_1$ oraz $\frac{1}{2}b \cos \theta d\theta$ (jeśli $\dot{\phi}_1 > 0$, to prędkość punktu styczności z podłożem pierwszego koła wynikająca z jego obrotu wokół poziomej osi jest skierowana ukośnie w górę i w lewo podobnie jak (gdy $\dot{\theta} > 0$) prędkość tego punktu wynikająca z obrotu układu wokół osi pionowej; czynniki $\sin \theta$ i $\cos \theta$ dają rzuty odpowiednich wektorów przemieszczeń na oś poziomą i pionową). Aby chwilowa prędkość punktu 1 zniknęła, przemieszczenia te muszą wzajemnie się znosić. Daje to dwa warunki

$$\begin{aligned} dx - a \sin \theta d\phi_1 - (b/2) \sin \theta d\theta &= 0, \\ dy + a \cos \theta d\phi_1 + (b/2) \cos \theta d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrując analogicznie przemieszczenia punktu 2 dostajemy dwa następne warunki

$$\begin{aligned} dx - a \sin \theta d\phi_2 + (b/2) \sin \theta d\theta &= 0, \\ dy + a \cos \theta d\phi_2 - (b/2) \cos \theta d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Po podzieleniu przez dt , wypisane wyżej warunki będą łączyć położenia i prędkości.

Mnożąc pierwsze i trzecie równanie przez $\cos \theta$ a drugie i czwarte przez $\sin \theta$ i dodając je parami do siebie (tzn. pierwsze do drugiego, a trzecie do czwartego), znajdujemy, że obie pary równań dają te same więzy nieholonomiczne

$$\cos \theta dx + \sin \theta dy = 0.$$

Następnie mnożymy pierwsze i trzecie równanie przez $\sin \theta$ a drugie i czwarte przez $\cos \theta$ i odejmujemy od pierwszego drugie, a od trzeciego czwarte otrzymując

$$\begin{aligned}\sin \theta dx - \cos \theta dy - a d\phi_1 - (b/2) d\theta &= 0, \\ \sin \theta dx - \cos \theta dy - a d\phi_2 + (b/2) d\theta &= 0.\end{aligned}$$

Wreszcie biorąc sumę i różnicę tych dwu równań otrzymujemy drugie równanie więzów nieholonomicznych

$$\sin \theta dx - \cos \theta dy = (a/2)(d\phi_1 + d\phi_2),$$

oraz jedno równanie więzów $a d(\phi_1 - \phi_2) = -b d\theta$, które daje więzy holonomiczne, jako że może być przedstawione w postaci scałkowanej

$$\theta = C + \frac{a}{b}(\phi_2 - \phi_1).$$

Aby mieć pewność, że pozostałe więzy nie są holonomiczne, trzeba pokazać jeszcze, że formy różniczkowe

$$\begin{aligned}w_1(x, y, \theta) &\equiv \cos \theta dx + \sin \theta dy, \\ w_2(x, y, \theta, \phi) &\equiv \sin \theta dx - \cos \theta dy - a d\phi,\end{aligned}$$

(gdzie $\phi \equiv \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$) nie mają czynników całkujących. Jest na sprawdzenie tego odpowiedni patent (zob. np. moje notatki do ćwiczeń z termodynamiki). Tu jednak jest to oczywiste.

Jeśli koła byłyby połączone osią na sztywno, tzn. gdyby $d\phi_1 = d\phi_2$ (dodatkowe więzy holonomiczne), to zmiana kąta θ nie byłaby, jak widać z warunku $\theta = C$, możliwa (bez poślizgu). W takiej sytuacji więzy nieholonomiczne $w_1(x, y, \theta) = 0$ i $w_2(x, y, \theta, \phi) = 0$ stają się holonomiczne

$$\begin{aligned}w_1(x, y, \theta) &\equiv d(x \cos \theta + y \sin \theta), \\ w_2(x, y, \theta, \phi) &\equiv d(x \sin \theta - y \cos \theta - a \phi),\end{aligned}$$

i oznaczają po prostu, że $x' \equiv x \cos \theta + y \sin \theta = \text{const}$, a $y' \equiv -x \sin \theta + y \cos \theta = -a(\phi + \phi_0)$, gdzie x' , i y' są współrzędnymi układu obróconego o kąt θ względem pierwotnego, a ϕ_0 jest stałym kątem. Drugi z tych związków oznacza po prostu (co jest jasne z rysunku 37), że koła połączone osią toczą się, gdy $\dot{\phi} > 0$, w kierunku ujemnym osi y' .

Zadanie 6.3

Na płaskiej powierzchni stołu leży klin o masie M , kącie nachylenia α i wysokości górnej krawędzi h . Po klinie, wskutek działania skierowanego pionowo w dół pola grawitacyjnego g , może zsuwać się klocek o masie m . Pomiedzy klockiem a klinem występuje siła tarcia dynamicznego równa co do wartości sile nacisku klocka na na klin razy współczynnik μ_1 . Podobna siła tarcia, o współczynniku μ_2 występuje pomiedzy klinem a stołem. Posługując się równaniami Newtona z więzami (czyli równaniami Lagrange'a I-go rodzaju) znaleźć siły reakcji pomiedzy klinem a klockiem oraz pomiedzy klinem a stołem w sytuacji, gdy klocek zaczyna zsuwać się z klina. Znaleźć jawne wzory na siły reakcji i przyspieszenia, gdy $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Rozwiązanie:

Jeśli oś z jest skierowana do góry, oś x w prawo, a górna krawędź klina jest na prawo od jego najniższego punktu, to oznaczając współrzędne klina (X, Z) , a te klocka (x, z) (zob. rysunek 38) otrzymujemy następujące dwa równania więzów:⁵⁹

$$\begin{aligned} f_1(X, Z, x, z) &\equiv z + (X - x) \operatorname{tg} \alpha - Z - h = 0, \\ f_2(X, Z, x, z) &\equiv Z = 0. \end{aligned}$$

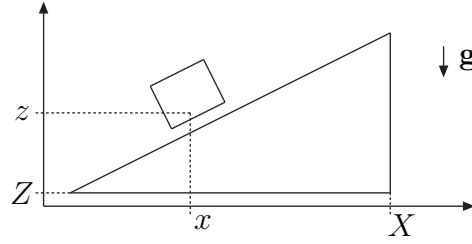
Pierwsze wyraża fakt, że klocek leży na powierzchni klina, a drugie, fakt, że klin leży na stole. Równaniami Lagrange'a I-go rodzaju (czyli po prostu równaniami Newtona z uwzględnionymi siłami reakcji i równaniami więzów) są

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha - s_1 \mu_1 \lambda_1 & - s_2 \mu_2 \lambda_2, \\ M\ddot{Z} &= -Mg - \lambda_1 & - s_1 \mu_1 \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha + \lambda_2, \\ m\ddot{x} &= & - \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha + s_1 \mu_1 \lambda_1, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda_1 & + s_1 \mu_1 \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

uzupełnione o równania $f_1(x, z, X, Z) = 0$ i $f_2(x, z, X, Z) = 0$. Aby uwzględnić siły tarcia, napisaliśmy tu po prostu wektory prostopadłe do wektorów sił reakcji stosując zwykły trick polegający na zamianie miejscami składowych wektora siły reakcji i zmianie znaku jednej z nich. s_1 i s_2 są znakami związanymi z kierunkami prędkości. Siły tarcia zostały zapisane tak, że $s_1 = s_2 = +1$, gdy klocek zsuwa się z klina (klocek jedzie względem klina w lewo, a klin w prawo). W ogólności jednak, w chwili $t = 0$ klin może mieć (gdy warunki początkowe są odpowiednio dobrane) prędkość V (o dowolnym znaku) względem stołu, a klocek też może mieć dowolną prędkość v względem klina (o znaku siły tarcia decyduje względna prędkość stykających się powierzchni klina i klocka). Dalej przyjmujemy, że aktualny ruch jest taki, iż $s_1 = s_2 = +1$.

Aby rozwiązać te równania (znaleźć siły reakcji) wyznaczamy z drugiego równania λ_2 algebraicznie (bo z $f_2 \equiv Z = 0$ wynika też, że $\dot{Z} = 0$) i wstawiamy do pierwszego.

⁵⁹Pierwsze z nich otrzymujemy następująco: współrzędne klocka (x, z) muszą spełniać równanie prostej którą stanowi górna krawędź klina; zatem $z = x \operatorname{tg} \alpha + C$; stałą C ustalamy żądając, by punkt $(X, Z + h)$ (tj. najwyższy punkt klina) też leżał na tej prostej.



Rysunek 38: Kłócek zsuwający się z szorstkiego klina, który może przesuwac się po szorstkim podłożu. Definicje zmiennych.

Następnie dwakroć różniczkujemy po czasie $f_1 = 0$ uzyskując związek

$$\ddot{z} = (\ddot{x} - \ddot{X}) \operatorname{tg} \alpha,$$

do którego podstawiamy następnie drugie pochodne z , x i X z wypisanych wyżej równań Newtona. Daje to równanie

$$-g + \frac{\lambda_1}{m} = \left[-\frac{\lambda_1}{m} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\lambda_1}{M} (\operatorname{tg} \alpha - \mu_1) + \mu_2 g + \frac{\lambda_1}{M} (1 + \mu_1 \operatorname{tg} \alpha) \mu_2 \right] \operatorname{tg} \alpha,$$

z którego można wyznaczyć λ_1 . Mając λ_1 obliczamy λ_2 i mając już jawne prawe strony równań Newtona całkujemy je, by znaleźć $X(t)$, $x(t)$ i $z(t)$.

Ponieważ w ogólnym przypadku $\mu_1 \neq 0$ i $\mu_2 \neq 0$ wzory są mało przejrzyste, podamy wzór na λ_1 i przyspieszenia, w sytuacji, gdy $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Mnożniki λ_1 i λ_2 (siły reakcji) nie zależą wtedy od kierunku ruchu klocka i klina:

$$\lambda_1 = \frac{mg}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \lambda_2 = Mg - \lambda_1.$$

Wstawienie λ_1 do wzorów na $\ddot{X}$ i $\ddot{x}$ daje

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M} \ddot{x} = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{M + (M + m) \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Widać, że $\ddot{X} = 0$, gdy $\alpha = 0$ (kłócek leży na płaskiej powierzchni) lub, gdy $\alpha = \pi/2$ (kłócek spada po pionowej ścianie). Poza tym, $\ddot{X} \rightarrow 0$, gdy $m/M \rightarrow 0$ (pchła zjeżdżająca na nartach po zadzie słonia, nie powoduje zauważalnego przemieszczenia Trąbalskiego, nawet gdyby stał on na lodzie na łyżwach). Wreszcie⁶⁰

$$\ddot{z} = -g + \frac{\lambda_1}{m} = -\frac{g(m + M) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Należy tu zauważyć, że wyprowadzając ogólne równania (uwzględniające siły tarcia) *najpierw* obliczyliśmy gradienty równań więzów, a dopiero *potem* wykorzystywaliśmy te

⁶⁰Dobrze jest sprawdzić, że jest to to samo, co $(\ddot{x} - \ddot{X}) \operatorname{tg} \alpha$.

równania. Powstaje więc pytanie, co by było, gdyby przed obliczaniem gradientów wziąć zamiast podanych równań więzów ich kombinacje liniowe? Np. można by było dodać drugie równanie do pierwszego, skutkiem czego w pierwszym nie występowałaby zmienna Z . Można łatwo sprawdzić, że przy niewystępowaniu sił tarcia końcowe wzory na $\ddot{x}$, $\ddot{z}$ i $\ddot{X}$ byłyby niezmienione (choć zmieniłyby się końcowe wyrażenia na λ_1 i λ_2). Jednak po takiej zmianie równań więzów nie otrzymalibyśmy w pierwotnym równaniu na $\ddot{Z}$ wyrazów proporcjonalnych do λ_1 , a zatem nie moglibyśmy uwzględnić wpływu tarcia między klinem i klockiem na ruch klina. Gdy występują siły tarcia wybór równań więzów musi być więc zgodny z fizycznymi oczekiwaniami, co do sił reakcji (brzmi to enigmatycznie, ale nie wiem, czy można to jakoś ściślej ująć).

Zadanie 6.4

Punkt materialny o masie m może poruszać się po wewnętrznej stronie ustawionej pionowo (tj. tak, że jedna z jej średnic jest równoległa do ziemskiego pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$) nieruchomej obręczy o promieniu R (zob. rysunek 39). Pomijając tarcie napisać równania ruchu uwzględniające siłę reakcji więzów. Traktując te więzy jak jednostronne, znaleźć zależność siły ich reakcji od położenia punktu na obręczy, jeśli w najniższym położeniu punkt miał liniową prędkość v_0 . Jaka musi być minimalna prędkość v_0 aby punkt nigdy nie oderwał się od obręczy? Znaleźć ruch i jego częstość w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi. W przypadku, gdy całkowita energia jest akurat wystarczająca do osiągnięcia przez masę m najwyższego punktu toru, znaleźć zależność jej położenia na obręczy od czasu. (Czy jednostronne więzy pozwolą mu osiągnąć ten punkt?) Rozpatrzeć także przypadek, gdy masa m porusza się bez tarcia po zewnętrznej stronie obręczy i znaleźć punkt, w którym puszczone swobodnie (z zerową prędkością) z najwyższego punktu obręczy oderwie się ona od niej.

Rozwiązanie:

Wyberzmy układ biegunowy tak, by kąt $\varphi = 0$ odpowiadał najniższemu położeniu punktu na obręczy, tj. tak, że oś x jest skierowana w dół, a oś y w prawo (zob. rysunek 39). Kąt φ rośnie wtedy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Pola ciążenia rozpisane na wersory $\mathbf{e}_r$ i $\mathbf{e}_\varphi$ ma wtedy postać

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}_r g \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi g \sin \varphi.$$

W układzie biegunowym równanie więzów jest trywialne:

$$f(r, \varphi) = r - R = 0.$$

Zatem równania Newtona uwzględniające siłę reakcji mają postać

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= m g \cos \varphi + \lambda, \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= -m g \sin \varphi. \end{aligned}$$

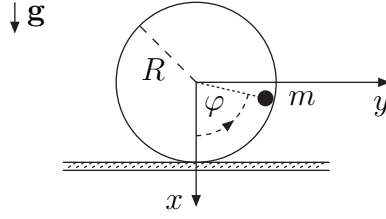
Po wykorzystaniu więzów upraszczają się one do

$$\begin{aligned} -m R \dot{\varphi}^2 &= m g \cos \varphi + \lambda, \\ m R \ddot{\varphi} &= -m g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ponieważ równanie więzów zostało już w nich uwzględnione, stanowią one kompletny układ równań wyznaczających ruch masy m oraz czynnik λ (i tym samym siłę reakcji). W przypadku, gdy nie występuje tarcie, można skorzystać z zachowania energii mechanicznej (siła reakcji będąc stale prostopadła do przesunięcia masy m , nie wykonuje pracy). Przyjmując, że energia potencjalna równa się zeru w najniższym punkcie obręczy, mamy⁶¹

$$\frac{1}{2} m (R \dot{\varphi})^2 + m g R (1 - \cos \varphi) = E.$$

⁶¹To samo można oczywiście otrzymać z drugiego równania Newtona mnożąc je obustronnie przez $R\dot{\varphi}$ i zwińając do pełnej pochodnej każdą z jego stron.



Rysunek 39: Masa m ślizgająca się po wewnętrznej powierzchni obręczy.

Stąd

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E - 2mgR(1 - \cos \varphi)}{mR^2}.$$

Wstawiając to do radialnego równania Newtona znajdujemy, że

$$\lambda = -\frac{2E}{R} + 2mg - 3mg \cos \varphi.$$

Jeśli w najniższym punkcie obręczy masa m ma prędkość v_0 , czyli, gdy $E = \frac{1}{2}mv_0^2$,

$$\lambda = -\frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg \cos \varphi.$$

W najniższym punkcie obręczy ($\varphi = 0$) siła reakcji (jest ona równa po prostu λ) jest ujemna i równa co do wartości ciężarowi masy m zwiększonemu o siłę odśrodkową:

$$\lambda = -\frac{mv_0^2}{R} - mg.$$

Aby masa m nie oderwała się, λ nie może zmienić znaku (punkt oderwania jest tam, gdzie $\lambda = 0$, tj. tam, gdzie znika siła reakcji) dla żadnego kąta φ . Nakłada to warunek

$$-\frac{mv_0^2}{R} + 2mg - 3mg \cos \varphi < 0,$$

który jest spełniony dla wszystkich kątów φ jeśli

$$v_0^2 > 5gR.$$

Ten sam wynik można także dostać z założenia, by w najwyższym punkcie toru ($\varphi = \pi$) siła odśrodkowa była wciąż większa niż siła ciężenia, tj. żądając, by

$$\frac{mv^2(\varphi = \pi)}{R} > mg.$$

Istotnie: z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv^2(\varphi = \pi) + 2mgR = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

znajdujemy, że $mv^2(\varphi = \pi) = mv_0^2 - 4mgR$, a stąd warunek

$$mv_0^2 - 4mgR > mgR.$$

Prowadzi to do tego samego warunku na v_0 , co uzyskany poprzednio.

Zależność od czasu kąta φ można otrzymać z zachowania energii. Po rozdzieleniu zmiennych daje ono związek

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} \int_0^t dt = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - mgR(1 - \cos \varphi)}}.$$

Jeśli wychylenia masy m z położenia $\varphi = 0$ są niewielkie, można w funkcji podcałkowej po prawej rozwinąć cosinus:

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} (t - t_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{E}} \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\varphi \sqrt{mgR/2E}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2}{mgR}} \arccos\left(\sqrt{\frac{mgR}{2E}} \varphi\right).$$

czyli

$$\sqrt{\frac{mgR}{2E}} \varphi(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}} (t - t_0)\right).$$

Daje to ruch harmoniczny o częstości $\omega^2 = g/R$ i amplitudzie $A = \sqrt{2E/mgR} = \sqrt{2E/mgR\omega^2}$, jak należało się spodziewać.

Z kolei, gdy masa m ma w najniższym punkcie obręczy energię akurat równą $E = 2mgR$, zależność położenia od czasu daje się otrzymać z całki ściśle (zakładamy, że masa m przemieszcza się po obręczy w prawo, czyli że $\dot{\varphi} > 0$, oraz że $\varphi(0) = 0$)

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} \int_0^t dt = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{mgR(1 + \cos \varphi)}} = \sqrt{\frac{2}{mgR}} \int_0^{\frac{1}{2}\varphi(t)} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}.$$

Całka jest wykonalna (wystarczy funkcję podcałkową zapisać w formie $\cos(\varphi/2)/(1 - \sin^2(\varphi/2))$, podstawić $u = \sin(\varphi/2)$ i rozłożyć na UAMki proste) i daje

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin(\varphi/2)}{1 - \sin(\varphi/2)}\right),$$

co po rozwikłaniu względem φ prowadzi do wzoru

$$\varphi(t) = 2 \arcsin(\operatorname{th} \omega t).$$

Ze wzoru tego widać, że gdyby więzy były dwustronne (tj. gdyby masa m nie mogła oderwać się od obręczy), najwyższy punkt obręczy, $\varphi = \pi$, byłby osiągany po nieskończonym czasie. Jeśli jednak więzy są jednostronne masa m oderwie się od obręczy wcześniej,

gdyż wartość $v_0^2 = 4gR$ jest mniejsza od znalezionej wcześniej najmniejszej prędkości umożliwiającej osiągnięcie najwyższego punktu obręczy przy więzach jednostronnych.

W przypadku, gdy punkt zsuwa się po zewnętrznej stronie obręczy z jej najwyższego punktu bez prędkości początkowej, pełna energia E ruchu jest równa $E = 2mgR$ i zależność λ (siły reakcji) od kąta φ jest dana wzorem

$$\lambda = -2mg - 3mg \cos \varphi .$$

Oderwanie się masy m nastąpi wtedy, gdy $\cos \varphi = -2/3$.

Zadanie 6.5

Jaką prędkość należy w najniższym punkcie obręczy nadać masie m z Zadania 6.4, aby mogła ona, nie odrywając się od obręczy, osiągnąć jej punkt najwyższy, jeśli współczynnik tarcia dynamicznego masy m o obręcz jest równy μ ?

Rozwiązanie:

Gdy występuje siła tarcia $\mathbf{F}_T$ ma ona, gdy, powiedzmy $\dot{\varphi} > 0$, postać $\mathbf{F}_T = \mu\lambda(\varphi) \mathbf{e}_\varphi$. Można zatem napisać równanie wyrażające straty energii *kinetycznej* masy m przy jej przemieszczaniu się po obręczy od φ do $\varphi + d\varphi$ na skutek wykonywania nad nią (ujemnej) pracy przez siłę grawitacji i siłę tarcia:

$$dE_{\text{kin}}(\varphi) = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{r}.$$

Ponieważ z powodu więzów $d\mathbf{r} = d(r \mathbf{e}_r) = R d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi R d\varphi$ (zob. Zadanie 1.4), $\mathbf{g} = g(\mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi)$, a z radialnej składowej równania Newtona (zob. rozwiązanie Zadania 6.4), która nie ulega modyfikacji, gdy występuje tarcie

$$\lambda(\varphi) = -mg \cos \varphi - mR\dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi - \frac{2}{R} E_{\text{kin}}(\varphi),$$

(mnożnik λ jest ujemny, gdy ruch zaczyna się z położenia $\varphi = 0$ z niezerową energią kinetyczną, dlatego $\mathbf{F}_T = \mu\lambda(\varphi) \mathbf{e}_\varphi$ ma właściwy zwrot) równanie to ma postać

$$dE_{\text{kin}}(\varphi) = -mgR d\varphi \sin \varphi - \mu \left(mg \cos \varphi + \frac{2}{R} E_{\text{kin}}(\varphi) \right) R d\varphi,$$

czyli

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{d\varphi} + 2\mu E_{\text{kin}} = -mgR (\sin \varphi + \mu \cos \varphi).$$

Jego rozwiązanie jest sumą ogólnego rozwiązania $E_{\text{kin}}^{\text{hom}}(\varphi) = C e^{-2\mu\varphi}$ równania jednorodnego i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego, którego szukamy w postaci $E_{\text{kin}}^{\text{inhom}}(\varphi) = A(\varphi) e^{-2\mu\varphi}$. Daje to

$$A(\varphi) = -mgR \int d\varphi e^{2\mu\varphi} (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) = -\frac{mgR}{1+4\mu^2} [3\mu \sin \varphi - (1-2\mu^2) \cos \varphi] e^{2\mu\varphi}.$$

Stąd spełniające warunek $E_{\text{kin}}(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$ rozwiązanie równania różniczkowego ma postać

$$E_{\text{kin}}(\varphi) = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2\mu\varphi} - \frac{mgR}{1+4\mu^2} [(1-2\mu^2) e^{-2\mu\varphi} + 3\mu \sin \varphi - (1-2\mu^2) \cos \varphi].$$

Z rozwiązania Zadania 6.4 wiadomo też, że warunkiem, by masa dotarła do punktu o $\varphi = \pi$ jest niezerowanie się wcześniej czynnika λ , czyli $[-mg \cos \varphi - (2/R)E_{\text{kin}}(\varphi)]_{\varphi=\pi} < 0$, tj.

$$mg - \frac{mv_0^2}{R} e^{-2\pi\mu} + \frac{2mg}{1+4\mu^2} [(1-2\mu^2) e^{-2\pi\mu} + (1-2\mu^2)] < 0.$$

Warunek ten (silniejszy niż $E_{\text{kin}}(\varphi = \pi) > 2mgR$) daje przy $\mu = 0$ (brak tarcia) $v_0^2 > 5gR$, jak poprzednio.

Zadanie 6.6

Punkt materialny o masie m porusza się w płaszczyźnie xz w polu siły ciężkości $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$ po gładkiej cykloidzie zadanej (parametrycznie) równaniami

$$\begin{aligned}x &= a(\varphi - \sin \varphi), \\z &= a(1 - \cos \varphi),\end{aligned}$$

gdzie $0 < \varphi < 2\pi$. Znaleźć ruch tego punktu posługując się równaniem Lagrange'a pierwszego rodzaju (ograniczyć się do ruchów, w trakcie których punkt nie opuszcza cykloidy albo przyjmując, że więzy są dwustronne). Wyznaczyć siłę reakcji jako funkcję parametru φ . Rozwiązać także problem korzystając z zachowania energii. Wyprowadzić równanie wyznaczające ten sam ruch korzystając z równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Rozwiązanie:

W przyjętym układzie odniesienia $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$, $g > 0$ (oś z jest skierowana “w dół”). Ponieważ ruch odbywa się po ustalonej krzywej parametryzowanej kątem φ , aby podać położenie punktu, wystarczy podać zależność kąta φ od czasu (zob. Przypomnienie). W tym celu, a także by wyeliminować nieznana (na razie) siłę reakcji, rzutujemy równanie Lagrange'a I-go rodzaju (czyli równanie Newtona z siłą reakcji) na wektor $\mathbf{t}$ styczny do toru:⁶²

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = (m \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}_R) \cdot \mathbf{t},$$

co, ponieważ siła reakcji $\mathbf{F}_R$ jest prostopadła do toru, daje równanie

$$m \dot{l} = m \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}.$$

Aby wykorzystać równanie w tej postaci, musimy znaleźć jawną postać wektora $\mathbf{t}$. W tym celu należy powiązać dl z $d\varphi$. Z infinitezimalnego Pitagorasa, $dl^2 = dx^2 + dz^2$ mamy:

$$\left(\frac{dl}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = a^2(1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Ponieważ $\sin(\varphi/2) > 0$, gdy $0 < \varphi < 2\pi$, więc $dl/d\varphi = 2a \sin(\varphi/2)$. Zatem

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \left(\frac{dl}{d\varphi}\right)^{-1} = \frac{1}{2a \sin(\varphi/2)} \begin{pmatrix} a(1 - \cos \varphi) \\ a \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

⁶²Przypomnijmy tu potrzebne wzorki (zob. Zadanie 1.7):

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v},$$

bo różniczka długości krzywej $dl = v dt$, tj. $v = \dot{l}$. Stąd $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$, a przyspieszenie

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{t} + v \dot{\mathbf{t}} = \ddot{l} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}.$$

$\mathbf{n}$ jest jednostkowym wektorem prostopadłym do toru skierowanym do środka lokalnej krzywizny tegoż.

Otrzymujemy zatem prosto wyglądające równanie

$$\ddot{l} = g \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Zgodnie z ogólną metodologią (zob. Przypomnienie) należałoby teraz wyrazić φ w lewej stronie tego równania przez l . Można to łatwo zrobić całkując otrzymany wyżej związek $dl = 2a \sin(\varphi/2) d\varphi$ z warunkiem $l(\varphi = 0) = 0$, co da

$$\cos \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{l}{4a},$$

i równanie różniczkowe wyznaczające zależność l od czasu przyjmie postać równania oscylatora harmonicznego poddanego działaniu stałej siły

$$\ddot{l} = -\frac{g}{4a} l + g,$$

którego rozwiązaniem jest $l(t) = 4a + A \sin(\sqrt{g/4a}t + \delta)$ - masa m na cykloidzie wykonuje drgania ściśle harmoniczne o częstości $\sqrt{g/4a}$ i dowolnej (byle mniejszej niż $4a$ - by był to ruch po cykloidzie) amplitudzie A wokół punktu na cykloidzie odległego o $4a$ od jej początku (jest to oczywiście najniższy położony punkt cykloidy znajdujący się w połowie jej całkowitej długości równej, co można odczytać ze znalezionego wyżej związku l z φ , $8a$).

Ten sam wynik można też uzyskać przepisując równanie różniczkowe w zmiennej $\xi = \cos(\varphi/2)$. Możemy bowiem napisać

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\varphi} \dot{\varphi} = 2a \dot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} = -4a \frac{d}{dt} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Zatem po wprowadzeniu zmiennej $\xi \equiv \cos(\varphi/2)$, otrzymujemy po prostu równanie oscylatora

$$\ddot{\xi} = -\frac{g}{4a} \xi$$

W zmiennej ξ ruch jest zatem, tak jak poprzednio, ruchem harmonicznym: $\xi(t) = A \cos(\omega t + \delta)$, gdzie $\omega^2 = g/4a$. Zadanie amplitudy A wyznacza też zakres zmienności $\varphi(t)$. Ponieważ ω od tego zakresu (amplitudy) nie zależy, ruch po cykloidzie jest (rzadkim) przykładem ruchu drgającego ściśle izochronicznego.

Znajdziemy teraz siłę reakcji. Ma ona oczywiście kierunek wektora $\mathbf{n}$ (jest doć proporcjonalna ze współczynnikiem $\lambda(t)$, który na razie jest nieznany), więc najpierw znajdziemy jawnie ten wektor.

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{n} \equiv \frac{d\mathbf{t}}{dl} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi} \left(\frac{dl}{d\varphi} \right)^{-1} = \frac{1}{4a \sin(\varphi/2)} \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\mathbf{n}^2 = 1$ z definicji, $\mathbf{n}$ jest właśnie wypisanym tu wektorem, a współczynnik przed nim jest odwrotnością promienia krzywizny ρ krzywej; zatem $\rho = 4a \sin(\varphi/2)$. Aby

znaleźć $\mathbf{F}_R$ korzystamy, z tego, że $\mathbf{F}_R = \mathbf{n}F_{Rn}$ i rzutujemy równanie Newtona na wektor $\mathbf{n}$:

$$F_{Rn} = \mathbf{n} \cdot (m\mathbf{a} - m\mathbf{g}) = \frac{mv^2}{\rho} + mg \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{mv^2}{4a \sin(\varphi/2)} + mg \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Zgadza się to z intuicją: siła reakcji musi zrównoważyć reprezentowaną przez “szkolne” wyrażenie mv^2/ρ (należy pamiętać, że promień krzywizny ρ jest promieniem okręgu przybliżającego lokalnie tor) siłę odśrodkową (to się tak niepoprawnie mówi; naprawdę, musi dać siłę w przeciwną stronę, powodującą zakrzywienie toru, czyli nadać masie m przyspieszenie dośrodkowe) i zrównoważyć prostopadłą do toru składową siły ciężkości. Podany wzór nie daje jeszcze jawnie zależności F_{Rn} od czasu (a znając $F_{Rn}(t)$ i $\mathbf{n}(t)$ można już zależność $\lambda(t)$ znaleźć; naogół zresztą ważna jest nie $\lambda(t)$, lecz po prostu siła). W tym celu trzeba by tu jawnie wstawić $\varphi(t)$ odwikłując $\cos(\varphi/2) = \xi(t)$ i wstawiając jawną zależność od czasu $v(t) = \dot{l} = 2a\dot{\varphi}(t) \sin(\varphi(t)/2)$. Można jednak, ponieważ siła $m\mathbf{g}$ ma potencjał $V = -mgz$ (oś z jest skierowana w dół) wykorzystać zachowanie energii, by wyrazić siłę reakcji przez całkowitą energię E ruchu i położenie masy na cykloidzie, tj. np. przez φ . Daje to

$$\frac{1}{2}mv^2 = E + mgz = E + mga(1 - \cos \varphi),$$

więc

$$F_{Rn} = \frac{E + mga(1 - \cos \varphi)}{2a \sin(\varphi/2)} + mg \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Takie wyrażenie jest zwykle bardziej użyteczne: naogół bowiem chcemy wiedzieć, jak siła reakcji zależy od punktu (bo wtedy wiemy, jaka siła działa w tym miejscu na więzy, co może interesować inżynierów z punktu widzenia wytrzymałości materiału) i od globalnej charakterystyki ruchu (takiej jak jego energia), a nie jak zależy ona od czasu.

Zachowanie energii można wykorzystać także do znalezienia samego ruchu. Wstawiając do wypisanego wyżej wzoru $v = 2a\dot{\varphi} \sin(\varphi/2)$ mamy

$$2ma^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \equiv 8ma^2 \left(\frac{d}{dt} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 = E + mgz \equiv E + 2mga \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Stąd, przechodząc znów do zmiennej $\xi = \cos(\varphi/2)$,

$$\int dt = \pm \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{E+2mga}{8ma^2} - \frac{g}{4a}\xi^2}}.$$

Występuje tu $E' = E + 2mga$, będąca całkowitą energią ruchu, wtedy, gdy energia potencjalna jest mierzona, nie od poziomu $z = 0$, tylko od $z = 2ma$ (oś z jest skierowana w

dół i $V = -mgz$), czyli od najniższego punktu cykloidy. Scałkowanie tego związku daje oczywiście

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{E + 2mga}{8ma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \delta),$$

z $\omega^2 = g/4a$, jak poprzednio.

To, że ruch jest ściśle izochroniczny (tj. jego okres nie zależy od amplitudy wychyleń) jest szczególną właściwością ruchu po cykloidzie i zazwyczaj nie zachodzi dla innych ruchów. Jest jednak jasne, że ruch polegający na małych wahaniami wokół najniższego punktu cykloidy (czy innej podobnej krzywej) można zawsze przybliżyć przez ruch harmoniczny. Wobec tego na tym przykładzie pokażemy ogólny sposób wyznaczania częstości takich małych drgań. W tym celu w równaniu wyrażającym zachowanie energii rozdzielamy zmienne i zapisujemy je w postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2ma^2}} \int dt = \pm \int \frac{d\varphi \sin(\varphi/2)}{\sqrt{E + mga(1 - \cos \varphi)}} \equiv \pm \int \frac{d\varphi \sin(\varphi/2)}{\sqrt{E - V(\varphi)}}.$$

Położeniem równowagi, wokół którego mogą zachodzić małe drgania, jest punkt, w którym $V'(\varphi) = -mga \sin \varphi = 0$ i $V''(\varphi) = -mga \cos \varphi > 0$, czyli $\varphi = \pi$. Rozwijając $V(\varphi)$ w szereg Taylora wokół $\varphi = \pi$ i definiując zmienną $\theta \equiv \varphi - \pi$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{2ma^2}} \int dt \approx \pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{E' - \frac{1}{2}mga \theta^2}}.$$

Czynnik $\sin(\varphi/2)$ w liczniku całki po prawej stronie został przybliżony przez swoją wartość w $\varphi = \pi$, a $E' \equiv E + 2mga = E - V(\pi)$. Dalsze kroki są już oczywiste: otrzymujemy stąd⁶³

$$\theta(t) \equiv \varphi(t) - \pi \approx \sqrt{\frac{2E'}{mga}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}} t + \delta\right),$$

co pokazuje, że częstość małych drgań wokół położenia równowagi jest równa $\sqrt{g/4a}$ (co w przypadku ruchu po cykloidzie jest oczywiste).

Warto wreszcie, zastosować do badanego ruchu równanie Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi},$$

⁶³Może się wydawać, że jest tu jakaś niezgodność z uzyskanym wyżej ścisłym rozwiązaniem, bo wyrażenie pod pierwiastkiem mnożącym cosinus nie jest takie jak poprzednio. Trzeba jednak zauważyć, że w ścisłym rozwiązaniu do cosinusa jest proporcjonalna zmienna $\xi(t) = \cos(\varphi/2)$. Jednak po podstawieniu $(\varphi(t) = \pi + \theta(t))$ z $|\theta(t)| \ll 1$, okaże się, ponieważ $\cos((\pi + \theta)/2) = -\sin(\theta/2) \approx \frac{1}{2}\theta(t)$, że zastosowanie do ścisłego rozwiązania przybliżenia małych wychyleń daje to samo.

zapisane w naturalnej dla tego zagadnienia zmiennej uogólnionej, jaką jest po prostu kąt φ . Funkcję Lagrange’a $L = T_{\text{kin}} - V$ składowy ze znalezionych już “kawałków”

$$L = 2ma^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + mga(1 - \cos \varphi).$$

Ponieważ nie zależy ona jawnie od czasu, wielkością zachowaną jest

$$h \equiv \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L.$$

W rozpatrywanym tu przypadku stała wielkość h jest po prostu równa $T_{\text{kin}} + V$. Utożsamienie jej z całkowitą energią ruchu E daje natychmiast wypisane wyżej rozwiązanie. Interesujące jest jednak jawne wypisanie równania Eulera-Lagrange’a:

$$\frac{d}{dt} \left(4ma^2\dot{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = 2ma^2\dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + mga \sin \varphi.$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie bierze się z różniczkowania po φ energii kinetycznej T . Po jawnym obliczeniu pochodnej po czasie otrzymujemy

$$4ma^2\ddot{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4ma^2\dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2ma^2\dot{\varphi}^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2mga \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Po połączeniu podobnych wyrazów występujących po lewej i po prawej stronie (uwaga: jest to dość typowe w sytuacji, gdy energia kinetyczna T_{kin} zależy także od zmiennych, a nie tylko od ich pochodnych!) i po podzieleniu stronami przez $2ma^2 \sin(\varphi/2)$ (w punktach $\varphi = 0$ i 2π , masa m opuszczałaby więzy, dlatego takich możliwości tu nie dopuszczamy), otrzymujemy

$$2\ddot{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} + \dot{\varphi}^2 \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{g}{a} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Nie jest stąd jednak łatwo dostrzec, że daje się to zapisać w znalezionej wcześniej postaci

$$-4 \frac{d^2}{dt^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{g}{a} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Zadanie 6.12

Dwie masy, m_1 i m_2 , mogą przemieszczać się po paraboli o równaniu $z = \frac{1}{2}ax^2$ w polu siły ciężkości $\mathbf{g} = \mathbf{e}_z g$ (oś z jest skierowana w dół). Masy połączone są nierozciągliwą nicią o długości l , która układa się na paraboli (inaczej mówiąc, odległość między masami liczona po paraboli wynosi zawsze l). Korzystając z zasady prac wirtualnych Lagrange'a znaleźć położenie równowagi układu tych dwóch mas.

Rozwiązanie:

Zasada prac wirtualnych w przypadku rozpatrywanego układu mówi, że sumaryczna praca δW wykonana przez zadane siły rzeczywiste (a więc nie siły reakcji) działające na układ przy jego zgodnych z więzami wirtualnych przesunięciach $\delta \mathbf{r}_1$, $\delta \mathbf{r}_2$ z położenia równowagi znika:

$$\delta W \equiv m_1 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0.$$

Ponieważ układ jest płaski, wektory $\mathbf{g}$, $\delta \mathbf{r}_1$ i $\delta \mathbf{r}_2$ można uważać za dwuwymiarowe:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta z_1 \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta z_2 \end{pmatrix}.$$

Więzy, z którymi zgodne mają być przesunięcia $\delta \mathbf{r}_1$, $\delta \mathbf{r}_2$ są dane wzorami

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= z_1 - \frac{1}{2}ax_1^2 = 0, \\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= z_2 - \frac{1}{2}ax_2^2 = 0, \\ f_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + a^2x^2} - l = 0. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wyraża to, że odległość od m_1 do m_2 liczona po paraboli⁶⁴ wynosi l . Przesunięcia zgodne są zgodne z więzami, gdy

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla_1 f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \delta \mathbf{r}_2 \cdot \nabla_2 f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Symbole ∇_1 i ∇_2 oznaczają tu gradienty liczone odpowiednio względem zmiennych $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$.

W notacji ogólnej (zob. Przypomnienie), występują tu cztery zmienne: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \equiv (x_1, z_1, x_2, z_2)$ stanowiące parametryzację przestrzeni konfiguracyjnej układu dwu mas.

⁶⁴Infinitymalną długość łuku paraboli $ds^2 = (dx)^2 + (dz)^2$ można, korzystając z równania paraboli $z = \frac{1}{2}ax^2$ sparametryzować x -em:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = dx \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + a^2x^2}.$$

Liczona po łuku paraboli odległość dwu punktów, których rzędne (a może odcięte? - ta prehistoryczna terminologia!) są równe x_1 i x_2 jest więc dana całką z ds od x_1 do x_2 .

Siła ciężkości działająca na układ jest dana wektorem $\mathbf{X} = (0, m_1g, 0, m_2g)$, dowolne przesunięcia (niekoniecznie zgodne z więzami) są reprezentowane czterowymiarowym wektorem $\delta\boldsymbol{\xi} = (\delta x_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta z_2)$, a warunek $\delta W = \mathbf{X} \cdot \delta\boldsymbol{\xi} = 0$ przyjmuje prostą postać

$$m_1g \delta z_1 + m_2g \delta z_2 = 0.$$

W tej notacji warunki

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_k(\xi_1, \dots, \xi_4)}{\partial \xi_j} \delta \xi_j = 0. \quad k = 1, 2, 3,$$

zgodności z więzami przesunięć wirtualnych oznaczają, że wektor $(\delta x_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta z_2)$ musi być prostopadły do czterowymiarowych wektorów gradientów⁶⁵

$$\begin{aligned} &(-ax_1, 1, 0, 0), \\ &(0, 0, -ax_2, 1), \\ &(-\sqrt{1+a^2x_1^2}, 0, \sqrt{1+a^2x_2^2}, 0), \end{aligned}$$

każdej z trzech funkcji więzów, czyli, że jego iloczyny skalarne z tymi wektorami muszą znikać.

Dalej wszystko jest już proste. Warunek $\delta W = 0$ po wykorzystaniu prostopadłości wektora $(\delta x_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta z_2)$ do dwóch pierwszych gradientów (co koreluje δz_i z δx_i osobno dla $i = 1$ i 2) przybiera postać

$$m_1x_1 \delta x_1 + m_2x_2 \delta x_2 = 0.$$

Prostopadłość zaś $(\delta x_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta z_2)$ do trzeciego gradientu pozwala wyrazić np. δx_2 przez jedyną niezależną składową tego wektora, za którą można wziąć δx_1 . Zatem warunek $\delta W = 0$ na przesunięciach zgodnych z więzami można zapisać jako

$$\left(\frac{m_1x_1}{\sqrt{1+a^2x_1^2}} + \frac{m_2x_2}{\sqrt{1+a^2x_2^2}} \right) \delta x_1 = 0.$$

Wobec dowolności δx_1 , zerować się musi wyrażenie w nawiasie. Równaniami (niełatwymi do jawnego rozwiązania) wyznaczającymi położenie równowagi układu są więc dwa równania:

$$\begin{aligned} \frac{m_1x_1}{\sqrt{1+a^2x_1^2}} &= -\frac{m_2x_2}{\sqrt{1+a^2x_2^2}}, \\ \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+a^2x^2} &= l. \end{aligned}$$

⁶⁵Jeśli traktujemy całkę od x_1 do x_2 występującą w trzecim równaniu więzów jak funkcję jej granic (czyli w notacji ogólnej funkcję $\xi_1 \equiv x_1$ i $\xi_3 \equiv x_2$, niezależną od $\xi_2 \equiv z_1$ i $\xi_4 \equiv z_2$), to pochodne tej funkcji po x_1 i x_2 są równe funkcji podcałkowej wziętej (z minusem dla pochodnej po x_1 i z plusem dla pochodnej po x_2) odpowiednio w punkcie x_1 i x_2 . Wynika to oczywiście z tego, że $f_3(x_1, z_1, x_2, z_2) = F(x_2) - F(x_1)$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji podcałkowej, tj. taką, że $F'(x) = \sqrt{1+a^2x^2}$.

Podnosząc pierwsze z tych równań stronami do kwadratu, co da

$$m_1^2 x_1^2 (1 + a^2 x_2^2) = m_2^2 x_2^2 (1 + a^2 x_1^2),$$

i wykorzystując więzy $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$ do wyrażenia x_1^2 i x_2^2 odpowiednio przez z_1 i z_2 , można to równanie przedstawić także w postaci

$$m_1^2 z_1 - m_2^2 z_2 = 2a z_1 z_2 (m_2^2 - m_1^2).$$

Drugie z równań po obliczeniu występującej w nim całki⁶⁶ przybiera postać

$$2l = x_2 \sqrt{1 + a^2 x_2^2} - x_1 \sqrt{1 + a^2 x_1^2} + \ln \left(\frac{ax_2 + \sqrt{1 + a^2 x_2^2}}{ax_1 + \sqrt{1 + a^2 x_1^2}} \right).$$

Można ten układ równań (przyjmując $1/a$ za jednostkę długości: $al \rightarrow l$, $ax_i \rightarrow x_i$, etc.) przepisać w formie (trzeba tylko pamiętać, że $x_1 \leq 0$, wobec czego $ax_1 = -\sqrt{2z_1 a}$ czyli teraz $x_1 = -\sqrt{2z_1}$)

$$\begin{aligned} m_1^2 z_1 - m_2^2 z_2 &= 2z_1 z_2 (m_2^2 - m_1^2), \\ 2l &= \sqrt{2z_2(1 + 2z_2)} + \sqrt{2z_1(1 + 2z_1)} + \ln \left(\frac{\sqrt{1 + 2z_2} + \sqrt{2z_2}}{\sqrt{1 + 2z_1} - \sqrt{2z_1}} \right). \end{aligned}$$

Równania te powinny mieć zawsze rozwiązania. Gdy $m_1 = m_2$ oczywiste jest, że obie masy muszą wisieć symetrycznie, każda w odległości (liczonej po paraboli) $l/2$ od wierzchołka paraboli ($z_1 = z_2$, $x_1 = -x_2$). W drugim skrajnym przypadku $m_1 \gg m_2$ (np. słoń i pchła) wyczucie fizyczne podpowiada, że rozwiązaniem będzie $z_1 \approx 0$ (słoń niemal na czubku paraboli) i masa m_2 (pchła) niemal o l (licząc po paraboli) oddalona od wierzchołka, gdyż punkt $z_1 = 0$ jest położeniem równowagi, gdy $m_2 = 0$. W takim przypadku układ równań można uprościć do

$$\begin{aligned} m_1^2 z_1 - m_2^2 z_2 &\approx -2z_1 z_2 m_1^2, \\ 2l &\approx \sqrt{2z_2(1 + 2z_2)} + \ln(\sqrt{2z_2} + \sqrt{1 + 2z_2}). \end{aligned}$$

Drugie wyznacza wtedy z_2 (funkcja z_2 po prawej stronie rośnie monotonicznie od zera), a drugie, gdy już z_2 jest wyznaczone, daje iloczyn $m_1^2 z_1$.

⁶⁶Wprowadzając $\eta = ax$ i następnie podstawiając $\eta = \text{sh } \theta$ znajdujemy, że

$$\int dx \sqrt{1 + a^2 x^2} = \frac{1}{a} \int d\theta \text{ch}^2 \theta = \frac{1}{4a} \int d\theta (e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2) = \frac{1}{8a} (e^{2\theta} - e^{-2\theta} + 4\theta).$$

Ponieważ $\theta = \ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2})$,

$$\begin{aligned} \int dx \sqrt{1 + a^2 x^2} &= \frac{1}{2a} \ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) + \frac{1}{8a} \left[\left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 - \left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2} \right)^{-2} \right] \\ &= \frac{1}{2a} \ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) + \frac{1}{8a} \left[\left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 - \left(\eta - \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2a} \ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) + \frac{1}{2a} \eta \sqrt{1 + \eta^2}, \end{aligned}$$

Zadanie 6.11

Posługując się zasadą Lagrange'a prac wirtualnych znaleźć położenie równowagi w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$ łańcucha składającego się z n segmentów w kształcie odcinków połączonych jedno z drugim przegubowo. Każdy z segmentów ma masę m i długość $2a$. Jeden koniec łańcucha jest zaczepiony na stałe, a na drugi działa skierowana poziomo siła F . Jak zmieni się rozwiązanie, gdy wektor siły działającej na koniec łańcucha będzie tworzył z kierunkiem horyzontalnym kąt β ? W otrzymanych rozwiązaniach przejść do granicy, w której liczba segmentów łańcucha staje się nieskończona przy ustalonej jego długości L .

Rozwiązanie:

Wygodnie jest skierować oś z w dół, tak by $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$. Przy ustalonym położeniu lewego końca pierwszego jego segmentu, kształt jaki przybiera łańcuch jest całkowicie wyznaczony przez podanie kątów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, jakie kolejne segmenty tworzą z osią z . z -owa składowa z_k położenia środka masy k -tego segmentu jest wtedy dana sumą

$$z_k = \sum_{l=1}^{k-1} 2a \cos \alpha_l + a \cos \alpha_k,$$

a x -owa składowa x_B punktu do którego przyłożona jest siła $\mathbf{F} = \mathbf{e}_x F$ sumą

$$x_B = \sum_{l=1}^n 2a \sin \alpha_l.$$

Zasada prac wirtualnych mówi, że dla wszystkich zgodnych z więzami wirtualnych przesunięć $\delta \mathbf{r}_k = \delta x_k \mathbf{e}_x + \delta z_k \mathbf{e}_z$ z położenia równowagi zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^n m \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_k + \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_B = 0,$$

czyli, że⁶⁷

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n m g \left(- \sum_{l=1}^{k-1} 2a \delta \alpha_l \sin \alpha_l - a \delta \alpha_k \sin \alpha_k \right) + F \sum_{k=1}^n 2a \delta \alpha_k \cos \alpha_k \\ & \equiv \sum_{k=1}^n \delta \alpha_k [-mga(2n - 2k + 1) \sin \alpha_k + 2aF \cos \alpha_k] = 0. \end{aligned}$$

⁶⁷Druga linia warunku wynika z przegrupowania wyrazów w podwójnej sumie; rozpisując ją jawnie znajdujemy (kolejne linie odpowiadają kolejnym k , od 1 do n):

$$\begin{array}{llll} mga[& & & -\delta \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ & -2\delta \alpha_1 \sin \alpha_1 & & -\delta \alpha_2 \sin \alpha_2 \\ & -2\delta \alpha_1 \sin \alpha_1 - 2\delta \alpha_2 \sin \alpha_2 & & -\delta \alpha_3 \sin \alpha_3 \\ & -2\delta \alpha_1 \sin \alpha_1 - 2\delta \alpha_2 \sin \alpha_2 - 2\delta \alpha_3 \sin \alpha_3 & & -\delta \alpha_4 \sin \alpha_4 \\ & & \dots & \\ & -2\delta \alpha_1 \sin \alpha_1 \dots & \dots & -2\delta \alpha_{n-1} \sin \alpha_{n-1} & -\delta \alpha_n \sin \alpha_n]. \end{array}$$

Stąd, ponieważ wszystkie $\delta\alpha_k$ są niezależne, wynika, że w położeniu równowagi

$$\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{2F}{mg(2n - 2k + 1)}.$$

Zadanie 6.15

Punkt materialny o masie m zsuwa się bez tarcia po zewnętrznej powierzchni sfery o promieniu R znajdującej się w polu grawitacyjnym $\mathbf{g}$. Sprowadzić problem rozwiązania równań wyznaczających ruch masy po sferze do kwadratur (tj. do wykonania całki). Znaleźć zależność siły reakcji więzów od położenia masy na sferze (dla dowolnych warunków początkowych) i punkt w którym oderwie się ona od sfery (jeśli więzy są jednostronne). Wyznaczyć jawnie ten punkt, gdy masa m zsuwa się bez prędkości początkowej z samego wierzchołka sfery.

Rozwiązanie:

Ruch masy m jest wyznaczony przez równania Lagrange'a I-go rodzaju. Oczywiście najwygodniej rozpatrywać to zagadnienie w układzie współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) , w którym równaniem więzów jest

$$f(r, \theta, \varphi) = r - R = 0.$$

Gradient funkcji $f = r - R$ jest równy $\mathbf{e}_r$. Wobec tego równania mają postać

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) &= -mg \cos \theta + \lambda, \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) &= mg \sin \theta, \\ m(r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu równania więzów, z którego wynika także, iż $\dot{r} = 0$ i $\ddot{r} = 0$, równania te upraszczają się do

$$\begin{aligned} -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) &= -mg \cos \theta + \lambda, \\ mR(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) &= mg \sin \theta, \\ mR(\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Pierwsze z tych równań wyznacza siłę reakcji (czyli mnożnik λ). Ostatnie zaś, jak zwykle, gdy znika z -owa składowa momentu siły zewnętrznej (tu siły ciężkości), powinno oznaczać stałość z -owej składowej L_z momentu pędu masy m poruszającej się po sferze. I rzeczywiście, po pomnożeniu obu jego stron przez $R \sin \theta$, zwiija się ono do

$$\frac{d}{dt}(mR^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) \equiv \frac{dL_z}{dt} = 0.$$

Wielkość L_z jest zatem stałą ruchu wyznaczoną przez warunki początkowe. Zatem

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mR^2 \sin^2 \theta},$$

co pozwala wyeliminować $\dot{\varphi}$ z pozostałych równań. Po tym zabiegu przyjmują one postać

$$\begin{aligned} -mR \left(\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 R^4 \sin^2 \theta} \right) &= -mg \cos \theta + \lambda \\ mR \left(\ddot{\theta} - \frac{L_z^2 \cos \theta}{m^2 R^4 \sin^3 \theta} \right) &= mg \sin \theta. \end{aligned}$$

Ponieważ więzy są skleronomiczne (niezależne od czasu) i nie wykonują pracy, a siła ciężkości jest potencjalna, drugą oprócz L_z stałą wielkością powinna być energia mechaniczna. Że tak jest w istocie, można zobaczyć mnożąc obie strony drugiego z powyższych równań przez $R\dot{\theta}$: równanie to związa się wtedy do $dE/dt = 0$, gdzie

$$E \equiv \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mgR \cos \theta + \frac{L_z^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} \equiv \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + V_{\text{eff}}(\theta).$$

Wzór ten pozwala wyrazić $\dot{\theta}^2$ przez całkowitą energię ruchu i położenie masy m na sferze, a tym samym, po wstawieniu $\dot{\theta}^2$ do pierwszego z trzech równań, wyrazić przez te same wielkości siłę reakcji, czyli mnożnik λ ($\mathbf{F}_R = \lambda \mathbf{e}_r$). Prosty rachunek prowadzi do wzoru

$$\lambda = -\frac{2E}{R} + 3mg \cos \theta.$$

Siła reakcji nie zależy zatem od L_z . Nie zależy też ona od kąta φ , co jednak jest prostą konsekwencją symetrii układu względem obrotów wokół osi z .⁶⁸ Jeśli więzy są jednostronne, oderwanie się masy m od sfery następuje w punkcie, w którym $\lambda = 0$. Np. jeśli masa m zaczyna zsuwać się bez prędkości początkowej z najwyższego punktu na sferze, jej całkowita energia jest równa $E = mgR$ i oderwie się ona od sfery w punkcie, w którym⁶⁹ $\cos \theta = 2/3$.

Zachowanie energii pozwala sprowadzić ruch “do kwadratur”: obliczywszy całkę we wzorze

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}}(t - t_0) = \pm \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(\theta)}},$$

znajdziemy (przynajmniej w zasadzie) zależność kąta θ od czasu, a następnie całka

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \frac{L_z}{mR^2} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\sin^2 \theta(t')},$$

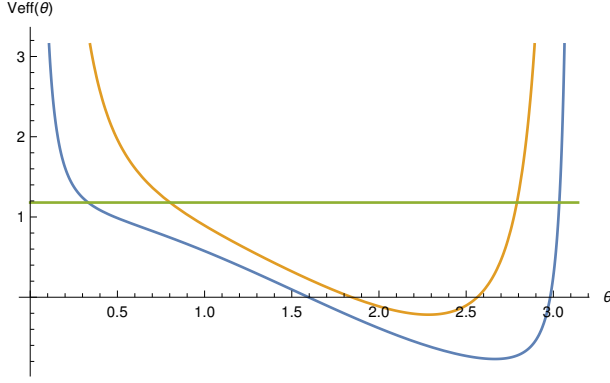
da zależność od czasu kąta φ .

Jakościowo charakter ruchu, zwłaszcza przy więzach dwustronnych⁷⁰ można określić posługując się wprowadzonym wyżej potencjałem efektywnym $V_{\text{eff}}(\theta)$. Ponieważ gdy $L_z \neq$

⁶⁸Oczywiście dla konkretnych warunków początkowych kąt φ położenia masy m na sferze jest, poprzez związki $\theta = \theta(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$, jednoznacznie wyznaczony przez θ .

⁶⁹Jest to oczywiście, ponieważ ruch jest wtedy jednowymiarowy (por. uwaga na końcu zadania), ten sam wynik, co w Zadaniu 6.4 o zsuwaniu się masy m po obręczy; jedyna różnica jest taka, że tu kąt θ jest mierzony od najwyższego punktu sfery, a kąt φ w Zadaniu 6.4 od najniższego położenia obręczy, czyli $\theta = \pi - \varphi$, co wyjaśnia różnicę w znakach.

⁷⁰Powodujących, że masa m nie może opuścić sfery, tj. takich, że siła reakcji może mieć dowolny znak (zerowanie się mnożnika λ nie oznacza wtedy oderwania się, a jedynie zmianę znaku siły reakcji); w przypadku więzów jednostronnych siła reakcji musi mieć stale ten sam znak (dodatni, gdy masa m nie może wpaść do wnętrza sfery i ujemny, gdy nie może spaść na zewnątrz, ale może spaść do wnętrza sfery) - wraz z całkowaniem wypisanych wzorów trzeba wtedy kontrolować mnożnik λ : jego zerowanie się oznacza oderwanie się masy m od sfery. Od tego momentu trzeba rozwiązywać równania bez siły reakcji z warunkami początkowymi wyznaczonymi przez ciągłość położenia i prędkości.



Rysunek 40: Potencjał efektywny $V_{\text{eff}}(\theta)$ w jednostkach mgR dla L_z^2/m^2gR^3 równego 0.05 (krzywa niebieska) i 0.5 (krzywa czerwona). Przecięcie krzywej wyznaczającej potencjał z linią zieloną (odpowiadającą tu $E = 1.8 mgR$) wyznacza możliwy zakres zmienności kąta θ podczas ruchu.

0, potencjał efektywny $V_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ dla $\theta \rightarrow 0$ i π (czyli na końcach przedziału zmienności kąta θ), ruch może zachodzić wtedy tylko pomiędzy kątami $\theta_{\min}$ i $\theta_{\max}$ wyznaczonymi przez równanie (zob. rys. 40)

$$V_{\text{eff}}(\theta_{\min, \max}) = E.$$

Ruch w zmiennej θ jest więc (przy więzach dwustronnych) ruchem z konieczności okresowym, jak każdy ruch jednowymiarowy tego typu (zob. Zadania 3.1 i 3.2). W szczególności możliwy jest ruch w trakcie którego zmienna θ oscyluje nieznacznie tylko wokół wartości θ_0 , dla której $V_{\text{eff}}(\theta)$ przyjmuje minimalną wartość. Kąt θ_0 jest rozwiązaniem równania

$$V'_{\text{eff}}(\theta) = -\frac{L_z^2}{mR^2 \sin^3 \theta} \left(\frac{m^2 g R^3}{L_z^2} \sin^4 \theta + \cos \theta \right) = 0.$$

Widać, że $\theta_0 > \pi/2$ (cosinus musi być ujemny), czyli ruch taki jest możliwy tylko po dolnej połowie sfery (gdy $L_z \rightarrow \infty$, położenie dynamicznej równowagi zbliża się od dołu do równika sfery). Można też znaleźć częstość małych oscylacji zmiennej θ wokół θ_0 . Pisząc

$$V_{\text{eff}}(\theta) = V_{\text{eff}}(\theta_0) + \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(\theta_0) \xi^2,$$

gdzie $\xi \equiv \theta - \theta_0$ (a $V''_{\text{eff}}(\theta_0) > 0$, gdyż musi to być minimum) mamy całkę ($E' = E - V_{\text{eff}}(\theta_0)$)

$$\sqrt{\frac{2}{mR^2}} t + C = \pm \int \frac{d\xi}{\sqrt{E' - \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(\theta_0) \xi^2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{V''_{\text{eff}}(\theta_0)}} \arccos \left(\sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(\theta_0)}{2E'}} \xi \right),$$

która jak zawsze daje ruch drgający

$$\theta(t) = \theta_0 + A \cos(\Omega t + \delta),$$

o częstości $\Omega = \sqrt{V''_{\text{eff}}(\theta_0)/mR^2}$ i amplitudzie $A = \sqrt{2E'/V''_{\text{eff}}(\theta_0)}$. Oscylacje te w zmiennej θ nakładają się na niemal jednostajny ruch obrotowy wokół osi z :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{L_z}{mR^2} \int_0^t \frac{dt'}{\sin^2[\theta_0 + A \cos(\Omega t + \delta)]} \\ &\approx \varphi_0 + \frac{L_z}{mR^2 \sin^2 \theta_0} t - \frac{2L_z \cos \theta_0}{mR^2 \sin^3 \theta_0} \int_0^t dt' A \cos(\Omega t + \delta) .\end{aligned}$$

Odstępstwo od jednostajnego ruchu obrotowego, $\varphi(t) = \varphi_0 + (L_z/mR^2 \sin^2 \theta_0) t$, reprezentowane przez wyraz z całką (którą można łatwo wykonać) jest niewielkie, gdyż amplituda A musi być mała, aby przybliżone rozwiązanie $\theta(t)$ miało sens.

Gdy $L_z = 0$, znika także $\dot{\varphi}$ i ruch masy m staje się ruchem jednowymiarowym po wielkim kole sfery scharakteryzowanym przez $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$

Przypomnienie

Funkcjonałem nazywamy urządzenie (skrzynkę) z wlotem i wylotem - do wlotu wrzuca się funkcję (z jakiejś określonej przestrzeni funkcyjnej, czyli określonego jakimiś warunkami zbioru funkcji), a z wylotu otrzymuje się w zamian liczbę (w mechanice naogółrzeczywistą). “Wlotów” może być zresztą więcej - wtedy trzeba wrzucić tyle funkcji, ile jest “wlotów”. Tu będą nas interesować funkcyjnały lokalne postaci

$$J[f] = \int_a^b d\xi \mathcal{J}(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)),$$

gdzie n - rząd najwyższej pochodnej funkcji, od której zależy funkcyjnał jest skończony.⁷¹ Ograniczymy się też do funkcyjnałów, w których funkcja $\mathcal{J}$ zależy tylko od samej funkcji f (lub samych funkcji $f_1, \dots, f_n$ - zobacz niżej) i jej pierwszej pochodnej f' (pierwszych pochodnych $f'_1, \dots, f'_n$).

Najprostsze zagadnienie wariacyjne. Szukamy takiej ciągłej funkcji $f(\xi)$, określonej na odcinku $[a, b]$ i przyjmującej ustalone wartości $f(a) = f_a$, $f(b) = f_b$ na jego końcach, na której lokalny funkcyjnał postaci

$$J[f] = \int_a^b d\xi \mathcal{J}(\xi, f(\xi), f'(\xi)),$$

gdzie $\mathcal{J}(x, y, z)$ jako funkcja trzech zmiennych ma ciągłe pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie, przyjmuje wartość stacjonarną, tzn. taką, że wariacja funkcyjnału $J[f]$, czyli funkcyjnał liniowy $\delta J_f[h]$ określony równością

$$\Delta J[f] = \int_a^b d\xi \{ \mathcal{J}(\xi, f + h, f' + h') - \mathcal{J}(\xi, f, f') \} = \delta J_f[h] + R_f[h],$$

w której funkcyjnał $R_f[h]$ będący “resztą” jest małą rzędu wyższego niż pierwszy w h , tj.

$$\lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{|R_f[h]|}{||h||} = 0,$$

znika na wszystkich zachowujących ustalone wartości brzegowe funkcji $f(\xi)$ jej wariacjach, tj. na funkcjach $h(\xi)$ mających ciągłą pierwszą pochodną i spełniających warunki

⁷¹Funkcyjnał zależny pochodnych dowolnie wysokiego rzędu jest już nielokalny, tak jak nielocalne by były funkcyjnały postaci

$$J[f] = \int_a^b d\xi \int_a^b d\eta \mathcal{X}(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta),$$

z jakąś zadaną funkcją $\mathcal{X}(\xi, \eta)$ czy

$$J[f] = \int_a^b d\xi \mathcal{J}(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)) \left[\int_a^b d\xi \mathcal{K}(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)) \right]^{-1}.$$

$h(a) = h(b) = 0$. Znikanie wariacji $\delta J_f[h]$ jest warunkiem koniecznym (ale rzecz jasna, nie dostatecznym), by na funkcji $f(\xi)$ funkcjonal $J[f]$ miał słabe⁷² ekstremum.

Standardowe rozumowanie prowadzące do warunku, jaki musi spełniać funkcja $f(\xi)$, by $\delta J_f[h] = 0$ na zdefiniowanych wyżej funkcjach $h(\xi)$, jest następujące. Korzystając z właściwości funkcji $\mathcal{J}(x, y, z)$ rozwijamy ją we wzorze na ΔJ w szereg Taylora w przyrostach $\Delta x = 0$, $\Delta y = h$ i $\Delta z = h'$ wokół $x = \xi$, $y = f$ i $z = f'$:

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_a^b d\xi \left\{ \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y} \right|_{y=f} h(\xi) + \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} \right|_{z=f'} \frac{dh(\xi)}{d\xi} + \dots \right\} \\ &= \int_a^b d\xi \left\{ \left[\left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y} \right|_{y=f} - \frac{d}{d\xi} \left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} \right|_{z=f'} \right] h(\xi) + \frac{d}{d\xi} \left[\left. \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} \right|_{z=f'} h(\xi) \right] + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Wyrazy wypisane jawnie definiują właśnie funkcjonal liniowy, czyli wariację $\delta J_f[h]$. Ostatni z nich przy warunkach nałożonych na funkcje $h(\xi)$ znika. Zatem warunkiem znikania $\delta J_f[h]$ na dowolnych różniczkowalnych takich funkcjach $h(x)$ jest spełnianie przez funkcję $f(\xi)$ różniczkowego równania

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'} = 0,$$

zwanego równaniem Eulera-Lagrange'a.

Równanie Eulera-Lagrange'a jest równaniem drugiego rzędu, naogół nieliniowym. Upraszczają się ono znacznie w trzech następujących przypadkach:

- $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\xi, f')$ - funkcja $\mathcal{J}$ nie zależy bezpośrednio od samej funkcji f . Wtedy

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'} = C = \text{const},$$

co sprowadza równanie Eulera-Lagrange'a do równania różniczkowego pierwszego rzędu.

- $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\xi, f)$ - funkcja $\mathcal{J}$ nie zależy bezpośrednio od pochodnej f' funkcji f . Wtedy

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} = 0,$$

czyli, wobec niewystępowania f' w $\mathcal{J}$, równanie Eulera-Lagrange'a sprowadza się do równania algebraicznego na funkcję f .

- $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f, f')$ - funkcja $\mathcal{J}$ nie zależy jawnie od zmiennej całkowania ξ . Wtedy, jeśli f spełnia równanie Eulera-Lagrange'a, to⁷³

$$f' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'} - \mathcal{J} = h = \text{const},$$

⁷²Słabe, tzn. w klasie ciągłych funkcji f na odcinku $[a, b]$ z normą zadaną przez $\|f\| = \max|f(\xi)| + \max|f'(\xi)|(b-a)$ dla $a \leq \xi \leq b$.

⁷³Jako że ten przypadek występuje najczęściej, dobrze jest sobie (w celu wbicia sobie wzoru w głowę) uprzytomnić, że wielkością stałą jest w tym przypadku coś, co "prawie" jest hamiltonianem (który pojawi się dalej). Tak więc gdy $\mathcal{J}$ nie zależy od ξ , powinna się natychmiast zapalać w głowie lampka: "hamiltonian"!

co znów sprowadza równanie Eulera-Lagrange'a do równania różniczkowego pierwszego rzędu. Że funkcja spełniająca powyższe równanie pierwszego rzędu spełnia również równanie Eulera-Lagrange'a łatwo się przekonać bezpośrednio: różniczkując powyższe równanie stronami po ξ otrzymujemy

$$f'' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'} + (f')^2 \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial f \partial f'} + f' f'' \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial (f')^2} - f' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f} - f'' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'} = 0.$$

Skrajne wyrazy się redukują, a to co zostaje jest pomnożoną przez f' lewą stroną jawnie rozpisanego równania Eulera-Lagrange'a.

Rozwiązanie równania Eulera-Lagrange'a zależy od dwu stałych dowolnych, które powinny umożliwić spełnienie warunków brzegowych narzuconych na funkcję mającą być ekstremalą funkcjonału. Problem ten jest tu jednak trochę inny niż w zwykłym przypadku, gdy narzuca się warunki na funkcję i jej pochodną w jednym i tym samym punkcie - wtedy można się odwoływać do twierdzeń o lokalnym (w pobliżu tego punktu) istnieniu rozwiązania. Tu zaś warunki wymagają istnienia rozwiązania globalnego na skończonym obszarze. Ponadto funkcjonał może mieć ekstremalę nie będącą funkcją różniczkowalną. Pouczający w tym względzie jest przykład ekstremali funkcjonału

$$J[f] = \int_{-1}^1 dx f^2 (f' - 1)^2,$$

określonego na funkcjach spełniających warunki $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$. Odpowiadające temu zagadnieniu równanie Eulera-Lagrange'a sprowadza się - ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy jawnie od x i można skorzystać ze stałości "hamiltonianu" - do równania

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{\frac{h + f^2}{f^2}}.$$

Dwie stałe, h i C , od których zależy rozwiązanie

$$f(x) = \sqrt{(x + C)^2 - h},$$

daje się dobrać tak by funkcja f spełniała narzucone warunki: $C = 1/4$, $h = 9/16$. Jednak, jak można się zorientować, funkcja f jest wtedy urojona na odcinku $(-1, 1/2)$, a więc nie należy do klasy funkcji, w której szukamy ekstremali! Tymczasem przytomny rzut oka na problem uświadamia, że ekstremalą odpowiadającą globalnemu minimum funkcjonału jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

(bo wartości funkcjonału na funkcjach rzeczywistych są zawsze nieujemne, a wartością funkcjonału na tej funkcji jest zero). Jest to jednak funkcja nieróżniczkowalna (można

jednak sprawdzić, że poza $x = 0$, jedynym punktem, w którym jej pochodne nie istnieją, spełnia ona równanie Eulera-Lagrange'a).

Pierwszym oczywistym uogólnieniem jest lokalny funkcjonal określony na funkcjach zmiennej ξ ale przyjmujących wartości wektorowe, tj. $J[\mathbf{f}] = J[f_1, f_2, \dots, f_n]$:

$$J[f_1, f_2, \dots, f_n] = \int_a^b d\xi \mathcal{J}(\xi, f_1, f_2, \dots, f_n, f'_1, f'_2, \dots, f'_n).$$

Jego wariacja ma postać (licząc pochodne cząstkowe przy rozwijaniu w szereg Taylora traktujemy $\mathcal{J}$ jak funkcję $2n + 1$ niezależnych zmiennych $x, y_i, z_i, i = 1, \dots, n$):

$$\delta J = \int_a^b d\xi \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y_i} \Big|_{y_i=f_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z_i} \Big|_{z_i=f'_i} \right] h_i(\xi) + \frac{d}{d\xi} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z_i} \Big|_{z_i=f'_i} h_i(\xi) \right] + \dots \right\}.$$

Przy warunkach $h_i(a) = h_i(b) = 0, i = 1, \dots, n$, warunkiem koniecznym, by funkcja $\mathbf{f}(\xi)$ była słabym ekstremum funkcjonału $J[\mathbf{f}]$ jest spełnianie przez jej składowe $f_i(\xi)$ układu n sprzężonych równań Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f_i} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Podobnie jak w przypadku pojedynczej funkcji, jeśli $\mathcal{J}$ nie zależy od jakiejś składowej f_i , to i -te równanie całkuje się raz od razu; jeśli $\mathcal{J}$ nie zależy od f'_i , to odpowiednie równanie Eulera-Lagrange'a stanowi algebraiczny związek między pochodnymi pozostałych składowych f'_j i funkcjami $f_1, \dots, f_n$; wreszcie, gdy $\mathcal{J}$ nie zależy od zmiennej całkowania ξ , całką pierwszą układu n równań Eulera-Lagrange'a jest "hamiltonian":

$$\sum_{i=1}^n f'_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial f'_i} - \mathcal{J} = C = \text{const.}$$

W tym przypadku jednak, jest to tylko jedno równanie pierwszego rzędu, którym można zwykle zastąpić jedno z równań Eulera-Lagrange'a; pozostaje więc wciąż kilka równań drugiego rzędu i problem nie jest tym samym jeszcze sprowadzony do kwadratur.

Uogólnienie na funkcje o wartościach wektorowych umożliwia także ogólniejsze potraktowanie zagadnień szukania ekstremów funkcjonałów zależących od jednej funkcji jednej zmiennej: pozwala on mianowicie traktować funkcje $f(\xi)$ jak krzywe na płaszczyźnie (ξ, f) i zadawać je parametrycznie. Przykłady są w zadaniach.

Drugim uogólnieniem jest badanie funkcjonałów funkcji wielu zmiennych $\xi_1, \dots, \xi_D$ (mogących także przyjmować wartości wektorowe)

$$I[f] = \int_{\Omega} d^D \xi \mathcal{I}(\xi_1, \dots, \xi_D, f, \partial_1 f, \dots, \partial_D f),$$

gdzie $d^D \xi \equiv \xi_1 \dots d\xi_D$, $\partial_i \equiv \partial/\partial \xi_i$, a Ω jest pewnym ustalonym obszarem w przestrzeni zmiennych ξ_i , na którego brzegu $\partial\Omega$ (tak fachowi geometrzy oznaczają brzeg zbioru Ω)

funkcja f przyjmuje ustalone wartości. Szukając ekstremum $I[f]$ rozpatruje się więc wariacje $\delta f(\xi_1, \dots, \xi_k)$ takie, że $\delta f|_{\partial\Omega} = 0$. Warunkiem znikania wariacji δI funkcjonału I jest by (sumy po i s?? domyślne)

$$\int_{\Omega} d^D \xi \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial (\partial_i f)} \right] \delta f + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial (\partial_i f)} \delta f \right] \right\} = 0.$$

Ponieważ zgodnie z twierdzeniem Stokesa (zob. mój skrypt *Differential Forms and Vector Analysis*) ostatni wyraz daje się napisać jako

$$\int_{\partial\Omega} ds^i \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial (\partial_i f)} \delta f,$$

(ds^i jest różniczkowym elementem hiperpowierzchni $\partial\Omega$; całka jest “strumieniem” pola wektorowego - indeks i funkcji podcałkowej! - przez tę hiperpowierzchnię), jasne jest, że znika on na mocy warunku narzuconego na wariacje δf . Zatem warunkiem, by funkcja $f(\xi_1, \dots, \xi_k)$ była słabym ekstremum funkcjonału J , jest spełnianie przez nią równania Eulera-Lagrange’a

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial f} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial (\partial_i f)} = 0,$$

które jest cząstkowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Zagadnienia takie należą do (klasycznej) teorii pola i nie będziemy się tu nimi zajmować.

Tak jak w przypadku funkcji wielu zmiennych i ich ekstremów warunkowych można też stawiać problem istnienia ekstremum warunkowego funkcjonału. Można tu wyróżnić dwie podklasy takich zagadnień:

- Problem istnienia ekstremum funkcjonału

$$J[\mathbf{f}] = \int_a^b d\xi \mathcal{J}(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n),$$

przy warunku, że ustalone wartości mają mieć inne funkcjonały

$$K_i[\mathbf{f}] = \int_a^b d\xi \mathcal{K}_i(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) \quad i = 1, \dots, r.$$

- Problem istnienia ekstremum funkcjonału $J[\mathbf{f}]$ takiego jak wyżej przy warunkach

$$g_k(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) = 0 \quad n = 1, \dots, r.$$

Oba rodzaje zagadnień rozwiązuje się metodą mnożników Lagrange’a tj. szukając ekstremum funkcjonału

$$\tilde{J}[\mathbf{f}] = \int_a^b d\xi \left[\mathcal{J}(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) - \sum_i \lambda_i \mathcal{K}_i(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) \right],$$

w pierwszym przypadku i funkcjonału

$$\tilde{J}[\mathbf{f}] = \int_a^b d\xi \left[\mathcal{J}(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) - \sum_k \lambda_k(\xi) g_i(\xi, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) \right],$$

w drugim przypadku. Różnica między nimi polega na tym, że w pierwszym przypadku mnożniki λ_i są stałymi, a w drugim przypadku są one funkcjami zmiennej ξ . Ten drugi przypadek można też rozwiązywać inaczej, wprowadzając odpowiednie zmienne (tj. inne funkcje g_j , $j = 1, \dots, n - r$ zamiast funkcji f_i , $i = 1, \dots, n$), tak by narzucone więzy były już automatycznie spełnione - mówimy, wtedy że nowe zmienne są zgodne z więzami. Na tym właśnie polega zastosowanie formalizmu równań Lagrange'a drugiego rodzaju z mechanice.

Zadanie 7.1

Znaleźć leżący całkowicie w płaszczyźnie xy tor promienia światła wpadającego (od strony ujemnych x -ów) w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ pod kątem α_0 w stosunku do osi x do ośrodka, w którym współczynnik załamania zależy od głębokości x jak $n(x) = \sqrt{1 + ax}$. Oprzeć się raz na prawie Snella, a drugi raz na zasadzie Fermata mówiącej, że promień światła między dwoma punktami biegnie po takiej drodze, że czas przelotu jest minimalny.⁷⁴

Przypomnienie: W ośrodku o współczynniku załamania n prędkość światła (lokalna) jest równa c/n .

Rozwiązanie:

Prawo Snella mówi, że przechodząc z ośrodka 1 o (stałym) n_1 do drugiego ośrodka 2 o n_2 (również stałym) promień światła załamuje się w taki sposób, że

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2,$$

gdzie α_1 i α_2 są kątami, jaki promień tworzy po dwu stronach z normalną do granicy ośrodków. Aby to prawo zastosować do ośrodka, w którym współczynnik n się zmienia z x , trzeba posłużyć się rozumowaniem granicznym i podzielić półpłaszczyznę $x > 0$ na pasy o stałych współczynnikach $n_0 = 1$ (dla $x < 0$), n_1, n_2, n_3 , itd. Do każdej z powstałych w ten sposób granic dwu ośrodków stosujemy prawo Snella: $n_1 \sin \alpha_1 = n_0 \sin \alpha_0 = \sin \alpha_0$, $n_2 \sin \alpha_2 = n_1 \sin \alpha_1 = n_0 \sin \alpha_0$, $n_3 \sin \alpha_3 = n_0 \sin \alpha_0$, itd. Widać, że w takim przypadku po przejściu do granicy nieskończenie gęstego podziału półpłaszczyzny $x > 0$ na pasy otrzymamy

$$\sin \alpha(x) = \frac{n_0 \sin \alpha_0}{n(x)} = \frac{\sin \alpha_0}{n(x)}.$$

Przerobienie sinusa $\alpha(x)$ na tangens da więc równanie toru w postaci

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha(x) = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha(x)}{1 - \sin^2 \alpha(x)}} = \frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{n^2(x) - \sin^2 \alpha_0}},$$

bo $\alpha(x)$ jest dokładnie kątem nachylenia krzywej $y(x)$ po jakiej biegnie promień.

To samo równanie toru promienia można także uzyskać z zasady Fermata, która jest ogólniejsza.⁷⁵ Niech A (punkt wlotu promienia do ośrodka o zmiennym n) ma współrzędne

⁷⁴Naprawdę światło biegnie to takim torze, że czas przelotu jest ekstremalny.

⁷⁵Prawo Snella wynika z niej niemal natychmiast: wystarczy wyobrazić sobie dwa punkty A i B jeden nad granicą dwu ośrodków, w obszarze o stałym n_1 i drugi pod nią, w obszarze o stałym n_2 ; w obszarach o stałym n promień biegnie po prostej (co też wynika z zasady Fermata, gdyż jest to droga najkrótsza i wobec stałości n odpowiada ona najkrótszemu czasowi przebiegu światła między dwoma punktami) więc wystarczy obliczyć czas $T(y)$ jego przebiegu od A do B jako funkcję współrzędnej y na osi będącej granicą ośrodków punktu, w którym promień przechodzi z jednego ośrodka do drugiego; warunek minimalnego czasu przelotu (tj. warunek by funkcja $T(y)$ miała w punkcie y minimum - do którego wypisania wystarcza zwykły rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej) przyjmuje dokładnie postać prawa Snella.

$(0, 0)$, a jakiś inny punkt B (w półpłaszczyźnie $x > 0$) niech ma współrzędne (x_1, y_1) . Czas przelotu od A do B po drodze γ dany wzorem

$$T[\gamma] = \int_A^B \frac{dl}{v},$$

jest wtedy funkcjonalem, który według zasady Fermata przyjmuje wartość najmniejszą na rzeczywistej drodze promienia świetlnego od A do B . Aby mu nadać jawną postać przyjmijmy, że drogi od A do B parametryzujemy x -em, czyli piszemy w postaci $y = y(x)$. Wtedy $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (y')^2}$ i (bo $v = c/n$)

$$T[\gamma] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{c} n(x) \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Mamy tu przypadek, gdy funkcja podcałkowa w funkcjonale nie zależy od samej wariowanej funkcji, a tylko od jej pochodnej. Wobec tego równanie Eulera-Lagrange'a można od razu raz scałkować, co daje

$$\frac{n(x) y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = D = \text{const.}$$

Po rozwikłaniu względem y' dostajemy stąd równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D}{\sqrt{n^2(x) - D^2}},$$

które daje po scałkowaniu funkcję $y(x)$ zależną od dwu stałych dowolnych. Stałe te powinny być wyznaczone z warunku przebiegania otrzymanej krzywej przez punkty $A = (0, 0)$ i $B = (x_1, y_1)$, tak jak tego w zasadzie wymaga zasada Fermata. Nic nie zabrania jednak, gdy już równanie różniczkowe na tor zostało wyprowadzone, zastąpić drugi warunek żądaniem, by kąt wpadania promienia do ośrodka o zmiennym n w punkcie A był równy α_0 . Oznacza to, że stałą D trzeba wybrać równą $\sin \alpha_0$, bo wtedy nachylenie krzywej w $x = 0$ będzie takie jak trzeba (tzn. pochodna $(dy/dx)_{x=0}$ będzie równa $\tan \alpha_0$, bo $n(0) = n_0 = 1$). Z takim warunkiem brzegowym otrzymujemy zatem to samo równanie, co z prawa Snella.

Warto jeszcze zobaczyć, co by było, gdyby drogę γ sparametryzować nie x -em, a y -kiem. W takim przypadku funkcjonal miałby postać

$$T[\gamma] = \int_0^{x_1} \frac{dy}{c} n(x) \sqrt{1 + (x')^2},$$

gdzie $x' \equiv (dx/dy)$. Funkcja podcałkowa $\mathcal{J}$ w funkcjonale byłaby niezależna od zmiennej całkowania i całą pierwszą równania Eulera-Lagrange'a, sprowadzającą je do równanie pierwszego rzędu byłby "hamiltonian" tj.

$$x' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x'} - \mathcal{J} = x' \frac{n(x) x'}{\sqrt{1 + (x')^2}} - \frac{n(x) (1 + (x')^2)}{\sqrt{1 + (x')^2}} \equiv \frac{-n(x)}{\sqrt{1 + (x')^2}} = h = \text{const.}$$

Po rozwikłaniu tego równania względem $x' \equiv dx/dy$ i narzuceniu, jak poprzednio warunku $(dx/dy)_{x=0} = \operatorname{ctg} \alpha_0$ (który wymaga, by $h^2 = \sin^2 \alpha_0$) dostaje się stąd to samo równanie, co poprzednio.

Jeśli $n^2(x) = 1+ax$, proste scałkowanie prowadzi (przy wyżej narzuconych na rozwiązanie warunkach) do równania toru

$$y(x) = \frac{2}{a} \sin \alpha_0 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + ax} - \frac{\sin 2\alpha_0}{a}.$$

Stała całkowania jest ustalona z warunku, by $y(0) = 0$. Gdy $a > 0$, wzór ten daje tor, na którym y asymptotycznie, dla dużych x , rośnie proporcjonalnie do $\sqrt{x}$. Jeśli $a < 0$, otrzymany wzór może obowiązywać tylko dla $x < (1/|a|) \cos^2 \alpha_0$. Przyczynę tego łatwo zobaczyć, jeśli się pamięta, że równanie różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

właściwie należy zapisywać w postaci

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0,$$

(gdzie X i Y są takie, że⁷⁶ $-X/Y = f(x, y)$), która nie wyróżnia ani x ani y ; równanie takie wyznacza (przy ustalonych warunkach początkowych) na płaszczyźnie krzywą, którą czasem da się zapisać jako $y = y(x)$, czasem jako $x = x(y)$, a czasem tylko parametrycznie. Oczywiście mając rozwiązanie takiego równania w postaci $y = y(x)$ możemy je “odkręcić” i dostać $x = x(y)$. W badanym tu przypadku toru promienia świetlnego, po takim odkręceniu, dostaniemy

$$x(y) = \frac{a}{4 \sin^2 \alpha_0} \left(y + \frac{\sin 2\alpha_0}{a} \right)^2 - \frac{\cos^2 \alpha_0}{a}.$$

Z postaci tej od razu widać, co się dzieje, gdy $a < 0$: promień świetlny wchodzi do ośrodka, lecz stale zakręca w lewo i po osiągnięciu głębokości $x = (1/|a|) \cos^2 \alpha_0$ zaczyna zawracać spowrotem w kierunku osi y , czyli ku granicy ośrodków.

Wy tłumaczenie zakręcania toru promienia świetlnego odwołując się do falowej natury światła jest proste: przy $a < 0$ prędkość światła w ośrodku równa $c/n(x)$ wzrasta wraz z głębokością (ze wzrostem x); znaczy to że prawa strona frontu fali (jego “prawa noga”) porusza się szybciej niż lewa; jest jasne że musi to powodować zakręcanie frontu fali w lewo.

⁷⁶Przy danej funkcji $f(x, y)$ funkcje $X(x, y)$ i $Y(x, y)$ nie są określone jednoznacznie: funkcje $g(x, y)X(x, y)$ i $g(x, y)Y(x, y)$ dają tę samą funkcję $f(x, y)$. Niejednoznaczność ta (poza ewentualnie punktami, w których funkcja $g(x, y)$ znika) nie ma wpływu na krzywe całkowe - krzywe te są bowiem określone warunkiem - patrząc na to geometrycznie - znikania jedno-formy różniczkowej $\hat{\omega} = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$ na wektorach do nich stycznych; jeśli więc zero daje na nich forma $\hat{\omega}$, to również zero daje forma $\hat{\eta} = g(x, y) \hat{\omega}$. Odpowiednim doбором funkcji $g(x, y)$ można sprawić, że $\hat{\omega} = d\phi(x, y)$, co - jeśli jest możliwe, a jest zawsze możliwe w $\mathbb{R}^2$, ale już niekoniecznie w $\mathbb{R}^D$ o $D > 2$ - pozwala krzywe całkowe przedstawić w postaci $\phi(x, y) = \text{const}$. Forma $\hat{\omega}$ ma wtedy *czynnik całkujący*, czyli, zgodnie z pierwszym twierdzeniem Carathéodory’ego, jest całkowalna.

Zadanie 7.5

Jaki jest kształt mającej minimalne pole powierzchni obrotowej rozpiętej na dwóch równoległych do siebie nawzajem kołach o promieniach R_1 i R_2 , których środki leżą na tej samej prostej i są oddalone od siebie o $2L$?

Rozwiązanie:

Pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi x krzywej $y(x)$, takiej, że $y(-L) = R_1$, a $y(L) = R_2$ jest dane wzorem⁷⁷

$$P[y] = \int_{-L}^L dx \mathcal{P}(y, y') = \int_{-L}^L dx 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{P}$ nie zależy od x , całką pierwszą odpowiedniego równania Eulera-Lagrange'a jest "hamiltonian" (czynniki 2π można spokojnie opuścić):

$$y' \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y'} - \mathcal{P} \equiv \frac{-y}{\sqrt{1 + y'^2}} = -C = \text{const.}$$

Rozviklując tę równość względem y' znajdujemy związek

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \pm \frac{1}{C} \int dx.$$

Znak $\pm$ jest znakiem pochodnej dy/dx , która, nawet przy ustalonym znaku stałej C , może być na jednym odcinku ujemna, a na innym dodatnia; dlatego trzeba go tu w zasadzie uwzględnić jawnie. Podstawiając w całce po lewej $y = C \operatorname{ch} \theta$ znajdujemy⁷⁸

$$y(x) = C \operatorname{ch} \left(\frac{x + D}{C} \right),$$

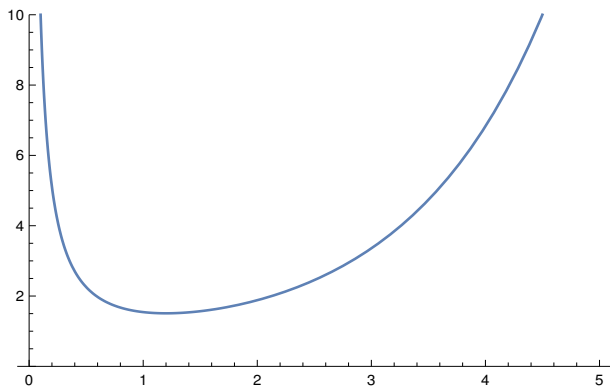
gdzie D jest drugą stałą dowolną. Stałe C i D wyznaczamy z warunków $y(-L) = R_1$, $y(L) = R_2$. Może istnieć jedno rozwiązanie, albo dwa albo może nie być żadnego. Najłatwiej zobaczyć to w przypadku $R_1 = R_2 \equiv R$. Bez straty ogólności można też przyjąć $L = 1$ (promień R mierzymy w jednostkach L - charakter rozwiązania zależy tylko od stosunku R/L). Wtedy z symetrii wynika, że $D = 0$ i dwa równania stają się jednym i tym samym warunkiem na $\tilde{C} \equiv 1/C$

$$R = \frac{\operatorname{ch}(\tilde{C})}{\tilde{C}}.$$

Graficznie, na płaszczyźnie $(\tilde{C}, z)$, rozwiązanie jest rzędną (a może odcietą? kto pamięta te dziwne nazwy?! ale chyba jednak odcietą) punktu, w którym krzywa $z = \tilde{C}^{-1} \operatorname{ch}(\tilde{C})$

⁷⁷Uzasadnienie wzoru: jest to suma pól powierzchni prostokątnych pasków, na jakie dzieli tę powierzchnię płaszczyzny prostopadle do osi x odległe od siebie o dx : długością paska jest $2\pi y$, a wysokością $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

⁷⁸Na szczęście funkcja $\operatorname{ch}(x)$ jest parzysta i oba znaki, $+$ i $-$, dają to samo.



Rysunek 41: Wykres funkcji $\tilde{C}^{-1} \text{ch} \tilde{C}$.

pokazana na rysunku 41 przecina się z poziomą prostą $z = R$. Jest więc jasne, że gdy R jest mniejsze od pewnej krytycznej wartości, nie ma żadnych punktów przecięcia i rozwiązanie nie istnieje. Oznacza to, że w takiej sytuacji minimalne pole ma powierzchnia, która “przykleja” się do kół, na których jest rozpięta i redukuje się do prostej łączącej ich środki; pole takiej “powierzchni” jest równe $\pi(R_1^2 + R_2^2)$ (w rozpatrywanym tu przypadku $2\pi R^2$), a krzywa $y(x)$ jest nieróżniczkowalna; rozpatrywany funkcjonal nie ma ekstremali (minimum) w klasie powierzchni zadanych krzywymi różniczkowalnymi. Jednoznaczne rozwiązanie jest tylko wtedy, gdy R przyjmuje pewną szczególną wartość (przy jednej szczególnej wartości stosunku R/L). Dla R większych są zawsze dwa rozwiązania $\tilde{C}_1$ i $\tilde{C}_2$. Najłatwiej się zorientować jak one wyglądają, gdy $R \gg 1$ ($R \gg L$). Jednym rozwiązaniem równania $R = \tilde{C}^{-1} \text{ch} \tilde{C}$ jest wtedy $\tilde{C} \approx 1/R$ i odpowiadająca mu ekstremala funkcjonu, którą można zapisać w postaci

$$y(x) = R \frac{\text{ch} \tilde{C}x}{\text{ch} \tilde{C}} \approx R \frac{\text{ch}(x/R)}{\text{ch}(1/R)},$$

schodzi tylko nieznacznie, ponieważ $\text{ch}(x/R) \lesssim 1$, w dół, poniżej wartości $y = R$. Rozwiązanie to jest oczywiste fizycznie i rzeczywiście odpowiada najmniejszej powierzchni. Drugim rozwiązaniem równania $R = \tilde{C}^{-1} \text{ch} \tilde{C}$, gdy $R \gg 1$, jest $\tilde{C} \gg 1$. Odpowiadającym mu punktem stacjonarnym funkcjonu jest wtedy funkcja (jej formalna postać jest taka sama jak funkcji odpowiadającej, pierwszemu rozwiązaniu, której ktćisła postać jest wypisana wyżej), która przy $x \sim 0$, gdzie $\text{ch}(\tilde{C}x) \approx 1$ wyraźnie “siada”. Przypuszczalnie nie jest to maksimum (lokalne) funkcjonu, bo jest oczywiste, że każdą powierzchnię obrotową można nieco “pomarszczyć” zwiększając dowolnie jej pole; trudno też sobie wyobrazić, by rozwiązaniu temu odpowiadało (lokalne) minimum; przypuszczalnie jest to punkt siodłowy - ale dar “widzenia” takich rzeczy w przestrzeniach funkcji jest dany tylko nielicznym, zaprawionym w analizie funkcjonalnej.

Zadanie 7.7 (Problem brahistochrony)

Po jakiej krzywej leżącej w płaszczyźnie xz powinna w polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ zsuwać się (mająca zerową prędkość początkową) masa m zaczynająca ruch w punkcie $A = (0, h)$, by w jak najkrótszym czasie dotrzeć do

- a) punktu $B = (b, 0)$,
b) pionowej prostej o równaniu $x = b > 0$?

Rozwiązanie:

a) Jest to klasyczne zagadnienie brahistochrony. Minimalizujemy tu funkcjonal

$$T[\gamma] = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{v},$$

który leżącej w płaszczyźnie xz krzywej γ łączącej punkty $A = (0, h)$ i $B = (b, 0)$ przypisuje czas zsuwania się po niej masy m . Jeśli zapiszemy element długości łuku $dl = dx \sqrt{1 + z'^2}$, tj. sparametryzujemy krzywą γ zmienną x , to

$$T[\gamma] = T[z(x)] = \int_0^b dx \mathcal{T}(x, z, z') = \int_0^b dx \sqrt{\frac{1 + z'^2}{2g(h - z)}},$$

po skorzystaniu z zachowania energii mechanicznej

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgh,$$

aby wyrazić prędkość v w zależności od wysokości z .

Ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{T}(z, z')$ w otrzymanym funkcjale nie zależy jawnie od zmiennej całkowania (tutaj: od x), wykorzystujemy “hamiltonian” jako całkę pierwszą równania Eulera-Lagrange’a:

$$z' \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z'} - \mathcal{T} = h = \text{const.} \quad \text{czyli} \quad \frac{-1}{\sqrt{(z - h)(1 + z'^2)}} = -\frac{1}{C} = \text{const.}$$

(Stała $\sqrt{2g}$ została upchnięta w C : $h = -1/C\sqrt{2g}$). Po rozwikłaniu względem z' daje to równanie różniczkowe pierwszego rzędu⁷⁹

$$z' \equiv \frac{dz}{dx} = -\sqrt{\frac{C^2}{h - z} - 1}.$$

⁷⁹Gdyby krzywą sparametryzować zmienną z , tj. gdyby napisać

$$T[\gamma] = T[x(z)] = \int_h^0 dz \sqrt{\frac{1 + x'^2}{2g(h - z)}},$$

to funkcja podcałkowa $\mathcal{T}(z, x')$ nie zależałaby od samej funkcji $x(z)$ i otrzymywane równanie Eulera-Lagrange’a całkowałoby się natychmiast do

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x'} \equiv \frac{x'}{\sqrt{2g(h - z)(1 + x'^2)}} = \frac{1}{C\sqrt{2g}} = \text{const.},$$

co, po odwikłaniu, dawałoby to samo dx/dz lub dz/dx .

Wybrany tu został znak minus, bo jest fizycznie oczywiste, że krzywa γ musi biec w dół, czyli pochodna funkcji $z(x)$ musi być ujemna. Po rozdzieleniu zmiennych i podstawieniu $\xi = h - z$ otrzymujemy

$$x + D = \int d\xi \sqrt{\frac{\xi}{C^2 - \xi}} = 2 \int du \frac{u^2}{\sqrt{C^2 - u^2}} = -2 \int du \sqrt{C^2 - u^2} + 2C^2 \int \frac{du}{\sqrt{C^2 - u^2}}.$$

W kolejnych krokach podstawiliśmy $\xi = u^2$ i następnie przedstawiliśmy u^2 w liczniku jako $-(C^2 - u^2) + C^2$. Podstawiając z kolei $u = C \sin \theta$ dostajemy

$$x + D = -2C^2 \int d\theta \cos^2 \theta + 2C^2 \int d\theta = C^2 (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

W wyjściowych zmiennych daje to uwikłane równanie krzywej

$$x + D = C^2 \left(\arcsin \sqrt{\frac{h - z}{C^2}} - \sqrt{\frac{h - z}{C^2}} \sqrt{1 - \frac{h - z}{C^2}} \right),$$

które nie jest specjalnie przejrzyste. Jedyne, co z niego widać, to to, że $D = 0$ (bo dla $z = h$ musi być $x = 0$).

Aby zobaczyć jaką krzywą wyznaczają te wzory, najlepiej cofnąć się do rozwiązania w postaci

$$\begin{aligned} x &= \frac{C^2}{2} (2\theta - \sin 2\theta), \\ z &= h - \xi = h - C^2 \sin^2 \theta = h - \frac{C^2}{2} (1 - \cos 2\theta), \end{aligned}$$

i wprowadzić parametry $\varphi \equiv 2\theta$ oraz $R \equiv C^2/2$. Otrzymujemy wtedy krzywą w postaci parametrycznej,

$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin \varphi), \\ z - h &= -R(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

w której rozpoznajemy cykloidę (odwróconą w dół - zob. Zadania 2.14 i 6.6). Stałą dowolną jest tu R (bo stała D już została wyznaczona), ale gdy krzywą zadajemy parametrycznie parametryzując ją zmienną $\varphi \in [0, \varphi_k]$, trzeba także ustalić φ_k (parametr φ został wprowadzony w taki sposób, że $\varphi = 0$ odpowiada punktowi A); są jednak teraz do spełnienia dwa związki:

$$\begin{aligned} b &= R(\varphi_k - \sin \varphi_k), \\ h &= R(1 - \cos \varphi_k), \end{aligned}$$

które razem ustalają R i φ_k .

b) Poszukamy teraz krzywej, po której “zjazd” pozwala dotrzeć w najkrótszym czasie do prostej $x = b$. Można by to zagadnienie rozwiązać znajdując z rozwiązania poprzedniego problemu czas dotarcia do punktu $(x, y) = (b, 0)$ jako funkcję wysokości początkowej h i minimalizując następnie tę funkcję względem h ; nie jest to jednak łatwe do zrobienia, gdyż krzywa minimalna przy ustalonym h jest zadana parametrycznie, a zakres $[0, \varphi_k]$ zmienności parametru φ jest wyznaczony równaniem przestępnym. Zagadnienie można jednak łatwo rozwiązać szukając ekstremum $T(\gamma)$ na drogach γ mających jeden koniec ustalony (punkt A), a drugi częściowo swobodny (nieustalona współrzędna y punktu B).

Szukamy wtedy drogi γ , na której pochodna wariacyjna

$$\delta T_\gamma[h] = \int_0^b dx \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z'} \right) h(x) + \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z'} h(x) \right] \right\},$$

funkcjonału T znika na wszystkich wariacjach $h(x)$ drogi γ takich, że $h(a) = 0$, ale mogących przyjmować dowolną wartość $h(b)$ w $x = b$. Znikanie takie wymaga, by funkcja $z = z(x)$ zadająca drogę γ spełniała to samo równanie Eulera-Lagrange’a, co poprzednio, ale by dodatkowo jeszcze

$$\left. \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z'} \right|_{x=b} \equiv \left. \frac{z'}{\sqrt{2g(h-z)(1+z'^2)}} \right|_{x=b} = 0.$$

(Znikanie członu brzegowego w $x = 0$ jest nadal zapewnione przez warunek $h(0) = 0$). Sprowadza się to oczywiście do warunku $z'(b) = 0$, który trzeba nałożyć dodatkowo na uzyskane w pierwszym punkcie rozwiązanie równania Eulera-Lagrange’a. Ponieważ dane jest ono w postaci parametrycznej musimy napisać ten warunek w postaci

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=b} = \left. \frac{dz}{d\varphi} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^{-1} \right|_{\varphi_k} = 0.$$

Sprowadza się więc on do żądania, by

$$\frac{\sin \varphi_k}{1 - \cos \varphi_k} = 0.$$

Ponieważ $\varphi_k \neq 0$, musi to być $\varphi_k = \pi$. Zatem z warunku $b = R(\varphi_k - \sin \varphi_k)$, który uprzednio (przy $B = (b, 0)$) wyznaczał φ_k , teraz znajdujemy, że szukaną krzywą jest przesunięta w górę i odwrócona cykloida o $R = b/\pi$ (i $\varphi \in [0, \pi]$)

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{b}{\pi} (\varphi - \sin \varphi), \\ z(\varphi) &= h - \frac{b}{\pi} (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Dochodzi ona do prostej $x = b$ płasko (bo $(dz/dx)_{x=b} = 0$) na wysokości $z = h - 2b/\pi$.

Zadanie 7.8 (Szkoleniowe, bo odpowiedź jest oczywista)

Korzystając z rachunku wariacyjnego znaleźć najkrótszą drogę łączącą na płaszczyźnie xy dwa ustalone punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. Rozwiązać problem w zmiennych kartezjańskich i biegunowych. Rozwiązać ten sam problem (w zmiennych kartezjańskich) w przestrzeni o d wymiarach.

Rozwiązanie:

W dwóch wymiarach zadanie jest banalne: długość krzywej γ łączącej punkty A i B jest dana funkcjonalem

$$J[\gamma] = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2},$$

który prowadzi, ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy ani od x ani od y , do oczywistego równania

$$\frac{dy}{dx} = C = \text{const},$$

skąd, jak należało się spodziewać, $y(x) = Cx + D$.

Wartość funkcjonala $J[\gamma]$ obliczona na danej drodze γ nie zależy od wyboru zmiennych. W zmiennych walcowych np.

$$J[\gamma] = \int d(r \cos \varphi) \sqrt{1 + \left[\frac{d(r \sin \varphi)}{d(r \cos \varphi)} \right]^2} = \int \sqrt{[d(r \cos \varphi)]^2 + [d(r \sin \varphi)]^2},$$

czyli, parametryzując krzywą γ kątem φ ,

$$J[\gamma] = \int d\varphi \mathcal{J}(r, r') = \int d\varphi \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Odpowiadające tej postaci funkcjonala równanie Eulera-Lagrange'a ma nieciekawą postać

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = \frac{r}{\sqrt{r'^2 + r^2}}.$$

Na szczęście funkcja podcałkowa $J[\gamma]$ nie zależy od zmiennej całkowania φ , więc stałą jest “hamiltonian”

$$r' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r'} - \mathcal{J} = -\frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = -C = \text{const}.$$

Po rozwikłaniu względem r' i rozdzieleniu zmiennych dostajemy stąd ($\pm$ jest znakiem pochodnej $dr/d\varphi$, który a priori mógłby się zmieniać na krzywej przy ustalonym C)

$$\pm \int d\varphi = C \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - C^2}} = C \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}}}.$$

Standardowym chwytem jest tu podstawienie $u = C/r$, które daje

$$\pm(\varphi + \varphi_0) = - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u.$$

Zatem $u \equiv C/r = \cos(\varphi + \varphi_0)$, czyli

$$C = r \cos \varphi \cos \varphi_0 - r \sin \varphi \sin \varphi_0 \equiv x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0,$$

co oczywiście jest równaniem prostej $y = Ax + B$ z $A = \operatorname{ctg} \varphi_0$ i $B = -C/\sin \varphi_0$.

W przestrzeni D wymiarowej, aby traktować symetrycznie wszystkie współrzędne x_i najwygodniej jest przyjąć, że krzywa γ jest zadana parametrycznie $x_i = x_i(\xi)$, przy czym, parametr $\xi \in [0, \xi_k]$ tak, iż $x_i(0) = x_i^A$, $x_i(\xi_k) = x_i^B$. Długość drogi jest wtedy dana funkcjonalem (kropki oznaczają pochodne po ξ)

$$J[\gamma] = \int_0^{\xi_k} d\xi \mathcal{J}(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_D) = \int_0^{\xi_k} d\xi \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2}.$$

Funkcjonał $J[\gamma]$ jest niezmienniczy względem reparametryzacji krzywej (czyli mówiąc górnolotnie - prof. Meissner to uwielbia - względem działania grupy dyfфеomorfizmów), tj. jeśli $\xi = \xi(\tau)$, to

$$x'_i \equiv \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \equiv \dot{x}_i \frac{d\xi}{d\tau},$$

i, ponieważ $d\xi = d\tau(d\xi/d\tau)$,

$$J[\gamma] = \int_0^{\xi_k} d\xi \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2} = \int_{\tau_i}^{\tau_k} d\tau \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_D'^2},$$

z $0 = \xi(\tau_i)$, $\xi_k = \xi(\tau_k)$. Ma więc on tę samą postać⁸⁰ (jeśli nie liczyć innych oznaczeń pochodnych po ξ i po τ), niezależnie od wyboru parametryzacji krzywej.

Ponieważ $\mathcal{J}$ nie zależy od x_i wszystkie równania Eulera-Lagrange'a dają się raz scałkować prowadząc do układu D równań:

$$\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_D^2}} = C_i, \quad i = 1, \dots, D.$$

Wynika z nich, ??e

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{C_i}{C_j} \equiv C_{ij} = \text{const},$$

⁸⁰Należy to porównać z zamianą zmiennych z kartezjańskich do walcowych, rozpatrywaną wyżej: tam wartość funkcjonala nie zależała od wyboru zmiennych, ale sama postać funkcji podcałkowej była inna. Nie była więc to niezmienniczość (czyli symetria).

dla każdej pary indeksów i oraz j , czyli że dowolna współrzędna x_i wyraża się przez dowolną inną współrzędną x_j funkcją liniową (w sensie szkolnym, a nie w ścisłym sensie algebraicznym). Rozwiązaniem są więc związki $x_i(\xi) = \beta_i h(\xi) + \alpha_i$, w których $h(\xi)$ jest dowolną funkcją, co odpowiada dowolności parametryzacji krzywej (prostej). Stałe całkowania C_i są wtedy równe $C_i = \beta_i / \sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_D^2}$. Związki te, to oczywiście parametryczna reprezentacja prostej.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na “hamiltonian”, który, ponieważ funkcja podcałkowa $\mathcal{J}$ w funkcjonale $J[\gamma]$ nie zależy od ξ , powinien być stałą. Znajdujemy jednak, że

$$\sum_{i=1}^D \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{x}_i} - \mathcal{J} \equiv 0.$$

Hamiltonian tożsamościowo znika! Odpowiedzialny jest za to fakt, że funkcja podcałkowa jest funkcją jednorodną rzędu pierwszego prędkości $\dot{x}_i$, tzn, ma własność (w rozpatrywanym wyżej zagadnieniu funkcja $\mathcal{J}$ nie zależy od x_i)

$$\mathcal{J}(x_1, \dots, x_D, \lambda \dot{x}_1, \dots, \lambda \dot{x}_D) = \lambda \mathcal{J}(x_1, \dots, x_D, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_D).$$

Jeśli równość tę zróżniczkujemy się po λ i położymy $\lambda = 1$, otrzymamy związek oznaczający znikanie “hamiltonianu” (jest to tzw. twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych - w termodynamice prowadzi ono do tzw. równania Gibbsa-Duhema). Jest to typowa sytuacja, gdy funkcjonal jest niezmienniczy, tak jak tutaj, względem reparametryzacji, bo niezmienniczość taka wymaga właśnie, by funkcja podcałkowa była funkcją jednorodną rzędu pierwszego prędkości.

Zadanie 7.11

Wyznaczyć kształt łańcucha (o bardzo krótkich ogniwach albo nierozciągliwej jednorodnej liny) o długości L i stałej gęstości ρ masy na jednostkę długości umocowanego swoimi końcami w dwóch różnych punktach A i B nad ziemią i swobodnie zwisającego (bez dotykania ziemi) w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy układ odniesienia o osi z skierowanej do góry i osi x skierowanej poziomo wzdłuż kierunku wyznaczanego przez punkty A i B zaczepienia końców łańcucha. W jednorodnym i stałym polu grawitacyjnym $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ łańcuch przybiera kształt minimalizujący jego energię potencjalną E (przyjmujemy, że łańcuch wisi już nieruchomo). Jest ona dana całką

$$E = \int_A^B ds g \rho z,$$

w której ds jest elementem długości, a z wysokością w stosunku do (dowolnie wybranego) poziomu, na której znajduje się infinitesimalny fragment łańcucha o długości ds . Jest więc to funkcjonal $E[\gamma]$ zależny od krzywej γ jaką tworzy łańcuch. Jeśli krzywą tę sparametryzujemy zmienną x , otrzymamy

$$E[\gamma] = g\rho \int_{x_A}^{x_B} dx z(x) \sqrt{1 + (z'(x))^2}.$$

Szukamy zatem krzywej będącej minimum tego funkcjonału, albo - bo stałe g i ρ nie mają wpływu na to, jaki kształt łańcucha jest optymalny - funkcjonału (również oznaczonego E)

$$E[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} dx z(x) \sqrt{1 + (z'(x))^2}.$$

Ponieważ jednak długość łańcucha jest ustalona, minimum tego należy szukać w klasie krzywych γ o ustalonej długości, czyli takich, że drugi funkcjonal $L[\gamma]$

$$L[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + (z'(x))^2},$$

spełnia warunek⁸¹ $L[\gamma] = L$.

W takiej sytuacji wprowadzamy (stały) mnożnik Lagrange'a λ i szukamy ekstremum pomocniczego funkcjonału $\tilde{E}[\gamma] = E[\gamma] - \lambda L[\gamma]$, czyli

$$\tilde{E}[\gamma] = \int_{x_A}^{x_B} dx (z(x) - \lambda) \sqrt{1 + (z'(x))^2} \equiv \int_{x_A}^{x_B} dx \tilde{\mathcal{E}}(z, z').$$

⁸¹Mamy nadzieję, że czytelnik zdoła odróżnić funkcjonal $L[\gamma]$ od konkretnej liczby L .

Ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy jawnie⁸² od zmiennej x , całką pierwszą równania Eulera - Lagrange'a wyznaczającą krzywą będącą ekstremum $\tilde{E}[\gamma]$ jest "hamiltonian", tj. wielkość

$$z' \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial z'} - \tilde{\mathcal{E}}.$$

Zatem

$$-\frac{z - \lambda}{\sqrt{1 + (z')^2}} = -C,$$

gdzie C jest stałą. Wywlekając stąd z' otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{z - \lambda}{C}\right)^2 - 1}.$$

(Znak $\pm$ jest znakiem pochodnej z' , który może zmieniać się wzdłuż krzywej odpowiadającej konkretnej stałej C . Jest mniej więcej jasne, że tak właśnie tu będzie - od punktu A łańcuch będzie najpierw opadać, a potem wznosić się do punktu B .) Rozdzielając zmienne, i dokonując podstawienia $u = (z - \lambda)/C$ sprowadzamy problem do całki

$$\int dx = \pm C \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Standardowe podstawienie $u = \operatorname{ch} \theta$ daje jako wynik całki po prawej stronie archu i ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{z - \lambda}{C} = \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{C} \right), \quad \text{lub, inaczej,} \quad z(x) = \lambda + C \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{C} \right).$$

Ponieważ ch jest funkcją parzystą, znak $\pm$ znika.

W rozwiązaniu występują trzy stałe dowolne: x_0 , C oraz mnożnik Lagrange'a λ . Trzeba je dobrać tak, by krzywa dana powyższym równaniem przechodziła przez punkty A i B (dwa warunki) oraz by długość łańcucha była równa L (tzn. by odległość od punktu A do punktu B liczona wzdłuż otrzymanej krzywej była równa L). Ten ostatni warunek można teraz napisać jawnie, obliczając całkę:

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \left(\frac{x - x_0}{C} \right)} &= \int_{x_A}^{x_B} dx \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{C} \right) \\ &= C \left[\operatorname{sh} \left(\frac{x_B - x_0}{C} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{x_A - x_0}{C} \right) \right]. \end{aligned}$$

⁸²Bo w zagadnieniach z więzami "globalnymi" mnożnik(i) Lagrange'a jest (są) rzeczywiście stała(y). Natomiast w przypadku więzów "lokalnych", takich jak rozpatrywane w Zadaniu 7.15, mnożnik(i) jest (są) funkcjami zmiennej całkowania i należy je uważać za wprowadzające jawną zależność funkcji podcałkowej pomocniczym funkcjonału od tej zmiennej.

Jest od razu jasne (co od początku powinno być oczywiste, że aby problem miał rozwiązanie, długość L łańcucha musi być nie mniejsza niż $x_B - x_A$, bo wartość powyższej całki jest większa niż $x_B - x_A$ (funkcja kosinus hiperboliczny jest zawsze większa niż 1). Przyjmując (bez straty ogólności), że $x_A = -b$, a $x_B = b$ oraz, że $z(x_A) = h_A = 0$ (poziom zerowy wybieramy na wysokości zawieszenia jednego z końców łańcucha), a $z(x_B) = h_B$ możemy warunki, które trzeba spełnić zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\frac{-\lambda}{C} &= \operatorname{ch}\left(\frac{-b-x_0}{C}\right), \\ \frac{h_B - \lambda}{C} &= \operatorname{ch}\left(\frac{b-x_0}{C}\right), \\ \frac{L}{C} &= \operatorname{sh}\left(\frac{b-x_0}{C}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{-b-x_0}{C}\right).\end{aligned}$$

Fizycznie rzecz biorąc, jeśli tylko $L > (x_B - x_A) = 2b$, warunki te powinny mieć rozwiązanie. W ogólnym przypadku dowolnego h_B jest jednak niemożliwe ich spełnienie analityczne. Dlatego ograniczymy się do rozpatrzenia przypadku z $h_B = 0$ (oba końce łańcucha zaczepione na tej samej wysokości. Jest wtedy jasne, że stała $x_0 = 0$ i dwa pierwsze warunki redukują się do jednego, a w ostatnim warunku z uwagi na nieparzystość funkcji sh , dwa człony po prawej stronie są identyczne. Bez straty ogólności można też położyć $b = 1$ (tzn. przyjąć b za jednostkę długości). Wreszcie wygodnie będzie wprowadzić $\tilde{C} = 1/C$. Warunki, które trzeba spełnić przybiorą wówczas postać

$$\begin{aligned}-\lambda \tilde{C} &= \operatorname{ch} \tilde{C}, \\ L \tilde{C} &= 2 \operatorname{sh} \tilde{C}.\end{aligned}$$

Drugi z nich wyznacza stałą $\tilde{C}$ (czyli C), a następnie pierwszy wyznacza mnożnik λ . Wciąż są one trudne do analitycznego rozwiązania, ale łatwo je przeanalizować w dwóch skrajnych przypadkach: $L \gtrsim 2$ (tzn. $L \gtrsim 2b$) i $L \gg 2$ (tzn. $L \gg 2b$).

Rozwiązanie drugiego warunku sprowadza się do znalezienia odciętej (tak to się chyba za cara Mikołaja II - jednego z głępszych carów - nazywało) punktu przecięcia wykresu funkcji $2 \operatorname{sh} \tilde{C}$ z prostą $L \tilde{C}$ o nachyleniu L (ponieważ w $\tilde{C} = 0$ nachylenie funkcji $2 \operatorname{sh} \tilde{C}$ jest równe 2, te dwie krzywe przecinają się tylko, gdy $L > 2$, co już było przedyskutowane). Jest też jasne, że gdy $L \gtrsim 2$, krzywe te przecinają się blisko początku wykresu, tzn. $\tilde{C} \gtrsim 0$. Dokładniej, rozwijając funkcję sh otrzymujemy pierwszy warunek w postaci

$$L \tilde{C} \approx 2 \tilde{C} + \frac{1}{3} \tilde{C}^3 + \dots,$$

skąd $\tilde{C} \approx \sqrt{3(L-2)}$. Rozwiązaniem pierwszego warunku jest wtedy $\lambda \sim -1/\tilde{C}$, bo kosinus hiperboliczny jest niemal równy 1. Znowu dokładniej, rozwijając funkcję ch

$$-\lambda \tilde{C} = 1 + \frac{1}{2} \tilde{C}^2 + \dots, \quad \text{czyli} \quad \lambda = -\frac{1}{\tilde{C}} - \frac{1}{2} \tilde{C} + \dots$$

Kształt łańcucha jest wtedy dany wzorem

$$z(x) \approx -\frac{1}{\tilde{C}} - \frac{1}{2}\tilde{C} + \frac{1}{\tilde{C}} \operatorname{ch}(\tilde{C}x) \approx -\frac{1}{2}\tilde{C} + \frac{1}{2}\tilde{C}x^2.$$

Zgodnie z oczekiwaniem, łańcuch tworzy między punktami A i B linię niemal prostą z małym tylko ugięciem pośrodku (tj. przy $x = 0$).

Gdy $L \gg 2$ (tzn. $L \gg 2b$), rozwiązaniem drugiego warunku jest $\tilde{C} \gg 1$. Wtedy jednak $\operatorname{sh} \tilde{C} \approx \operatorname{ch} \tilde{C}$ więc, wykorzystując drugi warunek w pierwszym, znajdujemy że $\lambda \approx -L/2$ i kształt łańcucha zadaje wzór

$$z(x) \approx -\frac{L}{2} + \frac{1}{\tilde{C}} \operatorname{ch} \tilde{C}x = -\frac{L}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \tilde{C}x}{\operatorname{ch} \tilde{C}} \right),$$

(druga postać wzoru wynika natychmiast z warunku $z(1) = 0$). Ponieważ $\operatorname{ch} \tilde{C} \gg 1$, przy $x = 0$ łańcuch schodzi, zgodnie z oczekiwaniem, niemal do $z = -L/2$.

Zadanie 7.15

Korzystając z rachunku wariacyjnego znaleźć najkrótszą drogę leżącą na powierzchni bocznej walca o promieniu R łączącą punkty $A = (R, 0, 0)$ i $B = (0, R, h)$. Rozwiązać problem wykorzystując technikę mnożników Lagrange'a oraz inaczej, przechodząc do zmiennych zgodnych z więzami. Uwzględnić także rolę topologii walca.

Rozwiązanie:

Szukamy ekstremum (minimum) funkcjonału

$$L[\gamma] = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

w którym całka jest obliczana wzdłuż łączącej punkty A i B drogi γ . Krzywa γ musi leżeć na powierzchni walca, co narzuca warunek $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

Sparametryzujemy najpierw drogę γ zmienną x . Wówczas

$$L[\gamma] = \int_R^0 dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Warunek uboczny $g(x, y, z) = 0$ uwzględniamy wprowadzając zależny od x mnożnik Lagrange'a (czyli właściwie funkcje mnożnikową) $\lambda(x)$ i szukamy ekstremum funkcjonału

$$\tilde{L}[\gamma] = \int_R^0 dx \left\{ \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda(x) (x^2 + y^2 - R^2) \right\},$$

przy warunku $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Do rozwiązania są więc równania

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} &= -2\lambda(x) y, \\ \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} &= 0, \\ x^2 + y^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Pierwsze z nich wyznacza tylko $\lambda(x)$ (lub właściwie: czynnik $\lambda(x)$ dobieramy tak, by to równanie było spełnione, gdy już znamy $y(x)$ i $z(x)$). Z drugiego wywlekujemy z' :

$$z'^2 = \frac{C^2}{1 - C^2} (1 + y'^2),$$

(C jest stałą całkowania drugiego równania). Z kolei z trzeciego równania (więzów) znajdujemy $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, czyli

$$y' = \frac{\mp x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

co po wstawieniu do wzoru na z'^2 sprowadza go do

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy stąd ($\tilde{C} = RC/\sqrt{1-C^2}$)

$$z(x) = \pm \tilde{C} \arcsin \frac{x}{R} + D.$$

Stałe $\tilde{C}$ i D trzeba dobrać tak, by $z(R) = 0$ i $z(0) = h$. Łatwo znajdujemy, że

$$D = h \quad \text{oraz} \quad \pm \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} = -h.$$

Ekstremala ma zatem postać

$$z(x) = h - \frac{2h}{\pi} \arcsin \frac{x}{R} = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{R} \right) \equiv \frac{2h}{\pi} \varphi,$$

gdzie φ jest standardowo zdefiniowanym kątem cylindrycznego układu współrzędnych. Ekstremalą jest więc linia śrubowa. Oczywiście gdyby rozciąć walec wzdłuż jego tworzącej otrzymana ekstremala okazałaby się linią prostą bo powierzchnia walca jest płaska (ma zerową wewnętrzną krzywiznę).

Topologia walca ma jednak znaczenie przy szukaniu ekstremali: wszystkie bowiem drogi biegnące po powierzchni walca łączące dwa zadane jej punkty A i B można podzielić na klasy charakteryzowane całkowitą liczbą n (w topologii zwanej liczbą nawinięć - ang. *winding number*) mówiącą ile razy dana droga obiega walec dookoła (można przyjąć, że $n > 0$ charakteryzuje drogi obiegające walec n -krotnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a $n < 0$ oznacza drogi obiegające walec $|1+n|$ -krotnie w kierunku przeciwnym). Nietrudno też zrozumieć, że w każdej klasie dróg powinna istnieć jedna ekstremala. Parametryzacja drogi zmienną x nie pozwala jednak otrzymać tych innych ekstremali (ani nawet odróżnić drogi o $n > 0$ od drogi o $n' = 1 - n$), ponieważ na drogach obiegających walec raz lub więcej razy (w jednym bądź drugim kierunku) jednej wartości x musiałoby odpowiadać więcej niż jedna wartość zmiennej z - drogi takie nie są więc zadane uczciwymi funkcjami $z = f(x)$.

Ten sam problem można rozwiązać przechodząc do zmiennych (φ, z) zdefiniowanych standardowo $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$, które są zgodne z więzami, tj. $g(x(\varphi), y(\varphi)) \equiv 0$. W tych zmiennych funkcjonal $L[\gamma]$ przybiera postać

$$L[\gamma] = \int_A^B \sqrt{[d(R \cos \varphi)]^2 + [d(R \sin \varphi)]^2 + dz^2} = R \int_0^{\varphi_n} d\varphi \sqrt{1 + u'^2},$$

gdzie $u \equiv z(\varphi)/R$, prim oznacza pochodną po φ , a wartość końcowa parametru φ zależy od liczby nawinięć, którą trzeba zadać:

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy jawnie od zmiennej całkowania φ , całką pierwszą równania Eulera-Lagrange'a wyznaczającego u jest "hamiltonian"

$$u' \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u'} - \mathcal{J} = -\frac{R}{\sqrt{1 + u'^2}} = -C = \text{const.}$$

Stąd już od razu wynika, że ekstremalą jest droga $u' = D = \text{const.}$, czyli że $z(\varphi) = D\varphi + E$. Warunek $z(0) = 0$ daje $E = 0$, a wartość D wyznaczona przez warunek $z(\varphi_n) = h$ zależy od liczby nawinięć $D = 2h/(1 + 4n)\pi$. Zatem ekstremale mają postać

$$z(\varphi) = \frac{2h}{(1 + 4n)\pi} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Dla $n = 0$ jest to to samo rozwiązanie, co poprzednio i fizycznie jest jasne, że jest to globalne minimum funkcjonału (czyli rzeczywiście najkrótsza droga). Pozostałe ekstremale są jednak także minimami funkcjonału, tyle że jego minimami lokalnymi. Warto też zauważyć, że gdyby punkt B leżał po przeciwnej stronie osi x , to ekstremale odpowiadające $n = 0$ i $n = -1$ (nieodróżnialne przy parametryzacji dróg zmienną x) byłyby obie globalnymi minimami funkcjonału (i tak samo minima lokalne o n i $n' = 1 - n$ miałyby równe “głębokości”).

Warto jeszcze zwrócić uwagę na to, że przejście od pierwszego sposobu rozwiązywania tego problemu do drugiego odpowiada dokładnie temu, co robi się przechodząc od równań Lagrange’a I-go rodzaju (z siłami reakcji proporcjonalnymi do mnożników Lagrange’a) do równań Lagrange’a II-go rodzaju, w których więzy są już automatycznie uwzględnione przez wybór zmiennych.

Przypomnienie

Problemy mechaniki, przede wszystkim, gdy wchodzące w grę siły i oddziaływania są zachowawcze, a ewentualne więzy są holonomiczne i dwustronne, wygodnie jest formułować jako problemy wariacyjne: rzeczywisty ruch układu mechanicznego, tzn. zależność od czasu zmiennych q^i wybranych jako charakteryzujące jego stan (położenie), jest wyznaczony przez warunek stacjonarności pewnego funkcjonału $I[q]$ zwanego działaniem: $\delta I[q] = 0$ w klasie wszystkich możliwych funkcji $q^i(t)$ przyjmujących w chwilach t_1 i t_2 ustalone wartości. W mechanice nierelatywistycznej funkcjonał ten ma postać

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt (T(q, \dot{q}) - V(q)) \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}),$$

w której T jest energią kinetyczną całego układu (w jakimś wybranym *inercjalnym* układzie odniesienia), tj. sumą energii kinetycznych wszystkich mas tworzących układ mierzonych w tym układzie odniesienia, a $V(q)$ sumą energii potencjalnych jego elementów (energii potencjalnych mas w polu grawitacyjnym, energii sprężyn itp.); wielkość $L = L(q, \dot{q})$, centralną w tym sformułowaniu mechaniki, nazywa się lagrangianem (albo funkcją Lagrange'a) układu fizycznego.

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju są bardzo wygodne. Nie wymagają one jawnego rozpatrywania sił reakcji powodowanych więzami. (Gdy więc znajomość tych sił jest potrzebna, trzeba wrócić do równań Lagrange'a pierwszego rodzaju; można w nich jednak wtedy wykorzystać znaleziony przy pomocy równań Lagrange'a drugiego rodzaju ruch - zob. Zadanie 6.8). Rozwiązywanie problemu mechanicznego tą metodą sprowadza się do ustalenia najpierw liczby stopni swobody badanego układu mechanicznego, tj. liczby niezależnych zmiennych, których wartości należy podać, by jednoznacznie określić jego położenie. Liczba ta, n , jest oczywiście równa $3N - p$, gdzie N jest liczbą ruchomych mas badanego układu fizycznego, a p liczbą niezależnych więzów holonomicznych. Drugim krokiem jest konkretny wybór tzw. zmiennych uogólnionych $q^1, \dots, q^n$ charakteryzujących zgodne z więzami położenia mas. Mogą one być wybrane dowolnie; w szczególności mogą one wszystkie, lub tylko niektóre z nich, wyznaczać położenia mas względem jakiegoś układu niekoniecznie inercjalnego, którego położenie względem inercjalnego układu odniesienia jest z góry zadane lub zadane przez pozostałe zmienne q^i . Niektóre ze zmiennych q^i mogą np. charakteryzować położenie jednej masy względem drugiej, której położenie i ruch jest z kolei scharakteryzowane innymi zmiennymi. Należy jednak podkreślić jeszcze raz: mimo iż energie występujące w lagrangianie mogą być wyrażone przez zmienne uogólnione definiujące położenie mas względem dowolnego punktu odniesienia (czyli mogą wyznaczać położenia mas względem układów niekoniecznie inercjalnych), to energie składające się na T muszą być energiami kinetycznymi względem jakiegoś wybranego układu inercjalnego. To jest ta (często nieuświadomiana sobie) podstawa nierelatywistycznej mechaniki klasycznej, którą zostawił nam w spadku Newton: istnieje absolutna przestrzeń i absolutny czas i, wobec tego, cała klasa układów zwanych inercjalnymi, które względem absolutnej przestrzeni poruszają się jednostajnie i prostoliniowo. I tego nie ukryje żadne przejście do formalizmu lagrangeowskiego. Nie wiadomo, dlaczego to działa (por. w rozdziale 16-1 t. I Feynmana uwagi o kawiarnianych

filozofach) ale tak jest. Można to kwestionować i niektórzy starają się skonstruować mechanikę tak, by uwzględnić w niej postulat E. Macha, że znaczenie mogą mieć tylko ruchy względne mas. Polecam tu bardzo ciekawą książkę Juliana Barboura “The discovery of Dynamics” o historycznym rozwoju mechaniki szczególnie skupiającą się na ścieraniu się podejść opartych na ruchu względnym i absolutnym. Autor utrzymuje, że nawet ogólna teoria względności nie w pełni realizuje postulat Macha. (Niestety książka ta nie została wydana po polsku; na Amazonie kosztuje jakieś trzysta kilkadziesiąt złotych...)

W nierelatywistycznej mechanice klasycznej energia kinetyczna ma postać

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_{(i)} \mathbf{v}_{(i)}^2,$$

gdzie $\mathbf{v}_{(i)} = \dot{\mathbf{r}}_{(i)}$, a $\mathbf{r}_{(i)}$ są wektorami położenia poszczególnych mas $m_{(i)}$ w wybranym układzie inercyjnym. Po wyrażeniu położenia $\mathbf{r}_{(i)}$ wszystkich N mas przez $n = 3N - p \leq 3N$ zgodnych z więzami zmiennych uogólnionych q^i , energia kinetyczna T przybiera z reguły postać (dodatnio określonej) formy kwadratowej prędkości uogólnionych $\dot{q}^i$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n T_{ij}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

o współczynnikach T_{ij} będących w ogólności funkcjami zmiennych q^i . Odstępstwo od tej reguły powstaje, gdy niektóre ze zmiennych q^i są zdefiniowane względem jakichś elementów układu, które wykonują zadany z góry (wymuszany przez jakieś czynniki zewnętrzne) ruch: T_{ij} pozostaje wtedy formą kwadratową wszystkich prędkości, w tym także prędkości elementów układu wykonujących zadany ruch; te jednak nie są zmiennymi dynamicznymi i energia kinetyczna T traktowana jako funkcja dynamicznych prędkości $\dot{q}^i$ ma wtedy człony niezależne od $\dot{q}^i$ i może tak mieć człony liniowe w $\dot{q}^i$.

Po wyrażeniu zaś energii potencjalnych elementów układu przez zmienne q^i lagrangian staje się funkcją uogólnionych położenia i prędkości

$$L = L(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n),$$

przy czym zależność od prędkości, jeśli nie zachodzi konieczność wprowadzenia potencjałów uogólnionych - zob. niżej - (co jest konieczne, gdy występują siły zależne od prędkości) jest formą kwadratową.

Z lagrangianu otrzymuje się n równań Lagrange’a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Jest to n równań różniczkowych drugiego rzędu na n funkcji $q^i(t)$. Tak jak w przypadku rachunku wariacyjnego, gdy lagrangian nie zależy od zmiennej q^i (a tylko od odpowiadającej jej prędkości uogólnionej $\dot{q}^i$), i -te równanie całkuje się natychmiast do

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = C_i = \text{const},$$

i staje się równaniem pierwszego rzędu. Gdy zaś lagrangian nie zależy jawnie od czasu, istnieje dodatkowa całka pierwsza - "hamiltonian":

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = h = \text{const}.$$

Dobrze jest też pamiętać, iż dwa lagrangiany L i L' (będące funkcjami tych samych zmiennych) różniące się o wyrażenie będące pełną pochodną po czasie

$$L(t, q, \dots, q) = L'(t, q^1, \dots, q^n) + \frac{d}{dt} f(t, q^1, \dots),$$

dają te same równania Lagrange'a. Innymi słowy, człon lagrangianu będący pełną pochodną po czasie można odrzucić.

Jeśli masy $m_{(i)}$ mają ładunki elektryczne $q_{(i)}$, wpływ na ich ruch pól elektrycznego $\mathbf{E}$ i magnetycznego $\mathbf{B}$ wymaga w tym formalizmie użycia potencjałów φ i $\mathbf{A}$, takich, że⁸³

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Lagrangian N mas ma wtedy człony zależne od uogólnionych prędkości liniowo (nie są one częścią energii kinetycznej układu)

$$L(t, q^1, \dots, q^n) = \dots + \sum_{i=1}^N q_{(i)} \left[\mathbf{A}(t, \mathbf{r}_{(i)}(t, q)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{(i)}(t, q) - \varphi(t, \mathbf{r}_{(i)}(t, q)) \right].$$

Wprawdzie potencjały φ i $\mathbf{A}$ nie są przez pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ wyznaczone jednoznacznie - można zawsze dokonać ich zmiany

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \theta,$$

to jednak transformacja taka zmienia lagrangian jedynie o człon będący pełną pochodną po czasie:

$$\sum_{i=1}^N q_{(i)} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{(i)}(t, q) \cdot (\nabla \theta(t, \mathbf{r}))_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{(i)}(t, q)} + \frac{\partial}{\partial t} \theta(t, \mathbf{r}_{(i)}(t, q)) \right] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N q_{(i)} \theta(t, \mathbf{r}_{(i)}(t, q)),$$

i jako taki nie mający wpływu na równania Lagrange'a. Wziętą z minusem część lagrangianu zależną liniowo od prędkości uogólnionych $\dot{\mathbf{r}}_{(i)}$ nazywa się *potencjałem uogólnionym*.

Ze sformułowania dynamiki w języku lagrangianu wynikają natychmiast prawa skalowania. Jeśli, jak to często ma miejsce, człon energii potencjalnej V w lagrangianie zapisanym przez współrzędne kartezjańskie ciał

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_{(i)} \mathbf{v}_{(i)}^2 - V(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}),$$

⁸³Używamy tu tego niby jedyne legalnego, choć w istocie idiotycznego, układu SI jednostek.

jest funkcją jednorodną rzędu k :

$$V(\alpha \mathbf{r}_{(1)}, \dots, \alpha \mathbf{r}_{(N)}) = \alpha^k V(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}),$$

można bez rozwiązywania równań ruchu wywnioskować prawa skalowania spełniane przez ich rozwiązania. W tym celu transformację skalowania położenia $\mathbf{r}_{(i)} \rightarrow \alpha \mathbf{r}_{(i)}$ uzupełniamy o transformację skalowania czasu $t \rightarrow \beta t$, co powoduje, że prędkości, jako pochodne położenia po czasie, skalują się według reguły $\dot{\mathbf{r}}_{(i)} \rightarrow (\alpha/\beta)\dot{\mathbf{r}}_{(i)}$. Po takiej operacji skalowania

$$L \rightarrow L' = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sum_{i=1}^N m_{(i)} \mathbf{v}_{(i)}^2 - \alpha^k V(\mathbf{r}_{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{(N)}).$$

Jeśli położyć teraz $\beta = \alpha^{1-k/2}$, otrzyma się związek

$$L' = \alpha^k L,$$

z którego wynika (ponieważ czynnik α^k mnożący lagrangian jako całość nie ma wpływu na równania ruchu), że jeśli funkcje $\mathbf{r}_{(i)}(t)$ są rozwiązaniami równań Eulera-Lagrange'a wynikających z L , to funkcje $\alpha \mathbf{r}_{(i)}(\alpha^{1-k/2}t)$ też są rozwiązaniami tychże samych równań. Jeśli więc dwa tory będące rozwiązaniami tych samych równań Eulera-Lagrange'a i mające jakieś długości charakterystyczne a i a' przechodzą na siebie po przeskalowaniu o czynnik α (równy $\alpha = a'/a$), to czasy charakterystyczne T i T' tych ruchów będą do siebie pozostawać w stosunku

$$\frac{T'}{T} = \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{1-k/2},$$

a prędkości charakterystyczne v i v' , w stosunku

$$\frac{v'}{v} = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha^{k/2} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{k/2}.$$

W przypadku ruchu masy m w potencjale keplerowskim $V = -\kappa/|\mathbf{r}|$, który jest funkcją jednorodną rzędu $k = -1$ i którego współczynnik κ (z powodu równości masy grawitacyjnej i masy bezwładnej) jest proporcjonalny do m , dzięki czemu funkcja Lagrange'a jest do masy m proporcjonalna jako całość (i z tego powodu wartość masy m nie ma wpływu na równania ruchu), wynika stąd natychmiast trzecie prawo Keplera

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^3,$$

(stosunki kwadratów okresów obiegu planet są takie same jak stosunki sześciątów dużych pól ich eliptycznych orbit). Z kolei w przypadku oscylatora harmonicznego, którego potencjał jest funkcją jednorodną rzędu $k = 2$, a z prawa skalowania wynika niezależność okresu od amplitudy wychylenia: $T'/T = \alpha^0 = 1$.

Zadanie 8.4

Rozpatrzmy punkt materialny o masie m poddany działaniu siły $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, która jest niezależna od położenia. Translacje przestrzenne są oczywistymi symetrami tego problemu (jeśli $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ jest jakimś rozwiązaniem równania Newtona, to jest nim także $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{a}$). Mimo to, pęd $\mathbf{p}$ cząstki nie jest stałą ruchu. Wyjaśnić to (pozorne) pogwałcenie związku symetrii z prawami zachowania.

Rozwiązanie:

Aby wyjaśnić sprawę trzeba się odwołać do twierdzenia Noether. Działanie I punktu materialnego o masie m poddanego działaniu siły $\mathbf{F}(t)$ ma postać

$$I[\mathbf{r}] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(t) \right].$$

Zmienna $\mathbf{r}$ nie jest jednak niczym wyróżniona i zamiast niej można by używać $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$. Powinien więc istnieć lagrangian $L'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t)$, taki, że jeśli $\mathbf{r}'(t)$ spełnia wynikające z niego równanie, to $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) - \mathbf{a}$ będzie automatycznie spełniać równanie wynikające z $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Nie chodzi tu na razie o symetrię, tylko o dowolność wyboru zmiennej charakteryzującej położenie układu w każdej chwili czasu. Żeby tak było, wystarczy, by

$$I' = \int_{t_0}^{t_1} dt L'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \Lambda(t, \mathbf{r}).$$

Jeśli jednak wykorzystując dowolność wyboru L' (polegającą na dodaniu do niego pełnej pochodnej czasowej jakiejś funkcji $\mathbf{r}'$) można sprawić, że $L'(\cdot, \cdot, t) = L(\cdot, \cdot, t)$, to mamy do czynienia z symetrią i wtedy jeśli $\mathbf{r}(t)$ spełnia równania wynikające z L , to spełnia je też $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{a}$. I tak właśnie jest w tym przypadku: biorąc za L' po prostu L mamy

$$L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}'^2 + (\mathbf{r} + \mathbf{a}) \cdot \mathbf{F}(t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}(t'),$$

czyli właśnie ($\Lambda(t)$ oznacza całkę w ostatnim wzorze, tu niezależną od $\mathbf{r}$)

$$I' \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = I + \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \Lambda(t).$$

Zapewnia to, że $\mathbf{r}'(t)$ jest rozwiązaniem równania ruchu jeśli jest nim $\mathbf{r}(t)$. Odpowiadające tej symetrii prawo zachowania wynikające z twierdzenia Noether otrzymuje się rozpatrując infinytezymalne przekształcenie symetrii $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ (tu $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{a}$), tak iż

$$\begin{aligned} 0 &\equiv I'[\mathbf{r}'] - I[\mathbf{r}] - \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \delta\Lambda(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{d}{dt} \delta\mathbf{r} - \frac{d}{dt} \delta\Lambda(t) \right] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right] \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta\mathbf{r} - \delta\Lambda(t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Przyjmując tu $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{a}$ oraz $\delta\Lambda(t) = \int_{t_0}^t dt' \delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}(t')$, widzimy, że jeśli $\mathbf{r}(t)$ spełnia równanie Eulera-Lagrange'a, wielkością zachowaną jest nie $\mathbf{p}$, lecz

$$\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{F}(t') \equiv \mathbf{p}(t) - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{F}(t').$$

Zadanie 8.8 (Proste, szkoleniowe)

Klin o masie M , kącie nachylenia α i wysokości górnej krawędzi h może przesuwać się bez tarcia po płaskiej powierzchni. Po klinie, wskutek działania skierowanego pionowo w dół pola siły ciężkości $\mathbf{g}$, może zsuwać się bez tarcia klocek o masie m . Znaleźć ruch tego układu wykorzystując równania Lagrange’a drugiego rodzaju. Porównać wynik z otrzymanym w Zadaniu 6.3 w granicy $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Rozwiązanie:

Ponieważ klocek pozostaje zawsze na klinie, układ ma dwa stopnie swobody. Jako dwie zmienne dynamiczne (q^1 i q^2 w notacji ogólnej) całkowicie wyznaczające jego chwilowe położenie można wybrać X - położenie tylnej krawędzi klina na osi poziomej (zob. rysunek 42) oraz z - wysokość na jakiej nad płaską powierzchnią znajduje się klocek. Przez te dwie zmienne można wyrazić wszystkie kartezjańskie współrzędne położenia (w układzie inercyjnym związanym z płaszczyzną) środków masy klina

$$x_M = X + \text{const}, \quad z_M = \text{const},$$

i (traktowanego jak punkt materialny) klocka⁸⁴

$$x_m = X + (z - h) \text{ctg} \alpha, \quad z_m = z.$$

Suma energii kinetycznych klina i klocka wyraża się przez wybrane zmienne dynamiczne wzorem

$$\begin{aligned} T = T_M + T_m &\equiv \frac{1}{2}M(\dot{x}_M^2 + \dot{z}_M^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{X} + \dot{z} \text{ctg} \alpha)^2 + \dot{z}^2]. \end{aligned}$$

Energia potencjalna układu (energia potencjalna klina i klocka) $V = V_M + V_m = Mgz_M + mgz_m$ redukuje się, ponieważ $z_M \equiv 0$, do $V = mgz$. Lagrangian układu, $L = T - V$, ma zatem postać

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{X} + \dot{z} \text{ctg} \alpha)^2 + \dot{z}^2] - mgz.$$

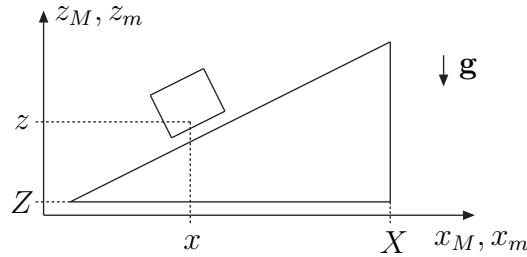
Dwoma równaniami Lagrange’a drugiego rodzaju wynikającymi z tego Lagrangianu są

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{X} + m\ddot{z} \text{ctg} \alpha &= 0, \\ m(1 + \text{ctg}^2 \alpha)\ddot{z} + m\ddot{X} \text{ctg} \alpha &= -mg. \end{aligned}$$

Pierwsze z nich wyraża, oczywiście, stałość poziomej składowej całkowitego pędu układu

$$(M + m)\dot{X} + m\dot{z} \text{ctg} \alpha = \text{const}.$$

⁸⁴Związek między x_m , a X i z (taki sam, jak w zadaniu 6.3) wynika np. z proporcji $(h - z)/(X - x_m) = \text{tg} \alpha$ (oczywiście z rysunku 42).



Rysunek 42: Kłoczek zsuwający się z gładkiego klina. Definicje zmiennych.

Z drugiego zaś otrzymujemy

$$\ddot{X} = -g \operatorname{tg} \alpha - \ddot{z}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = -g \operatorname{tg} \alpha - \frac{\ddot{z}}{\sin \alpha \cos \alpha},$$

co po wstawieniu do pierwszego daje zamknięte równanie na zmienną $\ddot{z}$:

$$\ddot{z} = -g \frac{(m + M) \operatorname{tg} \alpha}{(m + M)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) - m \operatorname{ctg} \alpha},$$

które po pomnożeniu licznika i mianownika przez $\cos \alpha \sin \alpha$ sprowadza się do

$$\ddot{z} = -g \frac{(m + M) \sin^2 \alpha}{m + M - m \cos^2 \alpha} = -g \frac{(m + M) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Wstawienie wyrażenia na $\ddot{z}$ otrzymanego wyżej do wzoru na $\ddot{X}$ daje

$$\ddot{X} = -g \operatorname{tg} \alpha + \frac{g(m + M) \operatorname{tg} \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = g \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Wreszcie, można powyższe wyrażenia na $\ddot{X}$ oraz $\ddot{z}$ wstawić do związku $\ddot{x}_m = \ddot{X} + \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha$ i dostać

$$\ddot{x}_m = -g \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Są to te same wyniki, co w Zadaniu 6.3. Dyskusja szczególnych granicznych przypadków jest więc taka sama, jak tam.

Zadanie 8.9

Klin o masie M i przekroju poprzecznym w kształcie trójkąta wysokości h mającego kąty nachylenia ramion do poziomu równe α i β może przemieszczać się bez tarcia po płaskiej poziomej (w stosunku do pola $\mathbf{g}$) powierzchni. Po jego bocznych płaszczyznach, połączone nierozciągliwą i nieważką linką długości l , mogą przesuwać się dwa klocki o masach m_1 (ta od strony kąta α) i m_2 (zob. rysunek 43). Napisać lagrangian i równania wyznaczające płaskorównoległy ruch tego układu. Zakładając, że w chwili początkowej masa m_1 znajduje się w najwyższym położeniu (na wysokości h nad podstawą klina) obliczyć czas jej zjazdu do najniższego położenia, przyjmując, że $m_1 > m_2$ i $\alpha > \beta$ (i że długość linki to umożliwia). Obliczyć także odległość o jaką przesunie się przy tym klin.

Rozwiązanie:

Ten układ także ma tylko dwa stopnie swobody. Oznaczmy x_M położenie rzutu wierzchołka trójkąta na oś x układu inercjalnego. Jako drugą zmienną uogólnioną wprowadźmy zmienną z zdefiniowaną tak jak na rysunku. Analogiczna zmienna z_2 jest związana z $z_1 \equiv z$ wzorem $z_1 + z_2 = l$. Współrzędne położenia mas m_1 i m_2 w układzie kartezjańskim xy wyrażają się wtedy wzorami

$$\begin{aligned}x_1 &= x_M + z \cos \alpha, & x_2 &= x_M - (l - z) \cos \beta, \\y_1 &= h - z \sin \alpha, & y_2 &= h - (l - z) \sin \beta.\end{aligned}$$

Energia kinetyczna układu jest więc dana wzorem (aby uczynić wzory bardziej przejrzystymi wprowadzamy oznaczenia $c_\alpha \equiv \cos \alpha$, itd.)

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x}_M + \dot{z} c_\alpha)^2 + (\dot{z} s_\alpha)^2] + \frac{1}{2} m_2 [(\dot{x}_M + \dot{z} c_\beta)^2 + (\dot{z} s_\beta)^2],$$

a energia potencjalna (składająca się z energii potencjalnych masy m_1 i masy m_2) jest równa

$$V = (h - z s_\alpha) m_1 g + (h - (l - z) s_\beta) m_2 g.$$

Lagrangianem układu, po pominięciu stałych, jest więc:

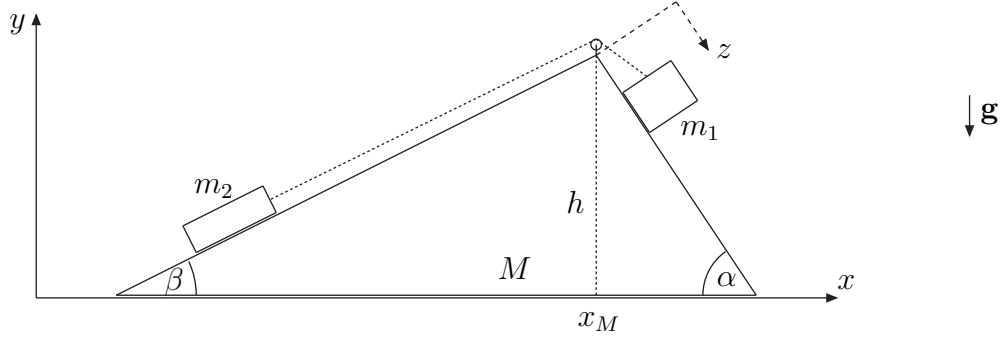
$$L = \frac{1}{2} (M + m_1 + m_2) \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + (m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta) \dot{x}_M \dot{z} + (m_1 s_\alpha - m_2 s_\beta) g z.$$

Wynikające z niego dwa równania Eulera-Lagrange'a mają postać

$$\begin{aligned}(M + m_1 + m_2) \ddot{x}_M + (m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta) \ddot{z} &= 0, \\(m_1 + m_2) \ddot{z} + (m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta) \ddot{x}_M &= (m_1 s_\alpha - m_2 s_\beta) g.\end{aligned}$$

Pierwsze z nich wyraża stałość poziomej składowej całkowitego pędu układu (w tym kierunku na układ nie działa żadna siła zewnętrzna), czego odbiciem jest także niezależność lagrangianu od zmiennej x_M . Z pierwszego z nich znajdujemy, że

$$\ddot{x}_M = -\frac{m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta}{M + m_1 + m_2} \ddot{z},$$



Rysunek 43: Dwa klocki na dwuklinie.

co po wstawieniu do drugiego daje

$$\left[m_1 + m_2 - \frac{(m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta)^2}{M + m_1 + m_2} \right] \ddot{z} = (m_1 s_\alpha - m_2 s_\beta) g.$$

(Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest, oczywiście, dodatnio określone.) Przyspieszenie $\ddot{z}$ klocków w ich ruchu względem klina jest więc stałe i równe

$$a_z \equiv \ddot{z} = \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 s_\alpha - m_2 s_\beta)}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - (m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta)^2}.$$

a zależność od czasu zmiennej z jest dana wzorem $z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t + \frac{1}{2}a_z t^2$. Czas zjazdu klocka o masie m_1 z najwyższego położenia (z zerową prędkością początkową), czyli czas przebycia przezeń w zmiennej z odległości h/s_α jest równy $t_{zj}^2 = 2h/a_z s_\alpha$, czyli

$$t_{zj} = \left(\frac{2h}{s_\alpha} \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - (m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta)^2}{(M + m_1 + m_2)(m_1 s_\alpha - m_2 s_\beta)} \right)^{1/2}.$$

Ponieważ przyspieszenie $a_x \equiv \ddot{x}_M$ klina jako całości jest też stałe, w czasie t_{zj} przebędzie on odległość

$$d = \frac{1}{2} a_x t_{zj}^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta}{M + m_1 + m_2} a_z t_{zj}^2 = -\frac{m_1 c_\alpha + m_2 c_\beta}{M + m_1 + m_2} \frac{h}{s_\alpha}.$$

Przemieszczenie to jest ujemne, bo klin przesunie się w lewo.

Zadanie 8.13

Napisać równania wyznaczające ruch układu składającego się z dwóch mas, z których jedna, m_1 , ślizga się bez tarcia po poziomym pręcie, a druga, m_2 jest z tą samą połączona nieważkim prętem o długości l i może wahać się w płaszczyźnie wyznaczonej przez pole siły ciężkości $\mathbf{g}$ i pręt (rysunek 44). Znaleźć ruch układu w przybliżeniu małych odchylen z położenia równowagi.

Rozwiązanie:

Układ ma dwa stopnie swobody. Jako dwie zmienne dynamiczne wybieramy położenie x masy m_1 na pręcie (punkt scharakteryzowany wartością $x = 0$ można wybrać w dowolnym miejscu pręta) oraz zaznaczony na rysunku 44 kąt φ , o jaki drugi pręt odchyłony jest od pionu (wyznaczonego przez pole $\mathbf{g}$). Energia kinetyczna masy m_1 jest oczywiście równa $\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$. Kartezjańskie współrzędne x_2 i z_2 masy m_2 w układzie inercyjnym są dane przez

$$\begin{aligned}x_2 &= x + l \sin \varphi, \\z_2 &= -l \cos \varphi,\end{aligned}$$

(oś z kierujemy do góry), tak iż jej energia kinetyczna jest dana wzorem

$$\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi).$$

Energia potencjalna masy m_2 jest zaś dana wzorem $V = m_2gz_2 = -m_2gl\cos\varphi$. Zatem Lagrangian ma postać

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) + m_2gl\cos\varphi.$$

Ponieważ L nie zależy od zmiennej x , jedną stałą ruchu jest oczywiście

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi = P = \text{const.}$$

Jest to oczywiście x -owa składowa całkowitego pędu układu. Drugą stałą ruchu jest - ponieważ Lagrangian nie zależy jawnie od czasu - “hamiltonian”:

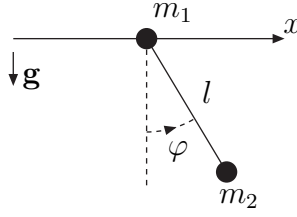
$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) - m_2gl\cos\varphi = E = \text{const.}$$

(W tym przypadku będący stałą ruchu “hamiltonian” jest po prostu całkowitą energią mechaniczną układu). Wstawiając tu $\dot{x}$ wyrażone przez zachowany całkowity pęd układu

$$\dot{x} = \frac{P}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}l\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

eliminujemy zmienną x :

$$\frac{1}{2}\frac{P^2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1 + m_2}l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - m_2gl\cos\varphi = E.$$



Rysunek 44: Wahadło o masie m_2 w polu $\mathbf{g}$ na nieważkim pręcie o długości l ; punkt zawieszenia o masie m_1 może ślizgać się bez tarcia po poziomym pręcie.

Całkowity (x -owy) pęd układu P daje tylko addytywny przyczynek do całkowitej energii E a pozostałe wyrazy od P nie zależą.⁸⁵ Wygodnie jest więc zdefiniować energię “wewnętrzna” $E' = E - P^2/2(m_1 + m_2)$ układu (jest to energia jaką zmierzylby inercjalny obserwator poruszający się z prędkością $P/(m_1 + m_2)$ wzdłuż osi x).

Zachowanie energii E' pozwala sprowadzić ruch do kwadratur: rozdzielając zmienne w równości

$$\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi\right) = E' + m_2gl \cos \varphi,$$

otrzymujemy

$$t - t_0 = \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{E' + m_2gl \cos \varphi}} \sqrt{\frac{m_2l^2}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi\right)}.$$

W przybliżeniu małych wychyleń od oczywistego położenia równowagi $\varphi = 0$, tj. dla $|\varphi| \ll 1$, przybliżamy $\cos^2 \varphi$ przez 1, a $\cos \varphi$ pod pierwiastkiem w mianowniku rozwijamy do wyrazu kwadratowego w φ :

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m_2l^2}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{E' + m_2gl} \sqrt{1 - \frac{m_2gl}{2(E' + m_2gl)} \varphi^2}}.$$

$E' + m_2gl$ jest energią mierzoną od położenia równowagi. Standardowe całkowanie daje w zastosowanym przybliżeniu małych drgań ruch harmoniczny

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2(E' + m_2gl)}{m_2gl}} \cos \omega(t - t_0),$$

z częstością

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}}.$$

Gdy $m_1 \gg m_2$, częstość drgań zbliża się do $\sqrt{g/l}$ (na ruch wahadła jakim jest masa m_2 dużo większa masa m_1 nie wpływa, a sam ruch masy m_1 staje się w tej granicy niemal jednostajny $\dot{x} \rightarrow \text{const}$).

⁸⁵Że tak musi być wynika z symetrii względem przekształceń Galileusza - ruch w zmiennej φ nie może zależeć od wyboru inercjalnego układu odniesienia, od którego to wyboru zależy wartość P .

Zadanie 8.15 (“Waciak”)

Znaleźć ruch “waciaka”, czyli regulatora Watta. Jest to ustrojstwo pokazane na rysunku 11: wokół pionowej osi (w polu $\mathbf{g}$) na wychodzących ze znajdującego się na stałej wysokości pierścienia A , symetrycznie położonych ruchomych ramionach o długości l wirują z ustaloną prędkością kątową ω dwie masy m połączone kolejną parą ramion o długości l z mogącym przesuwac się po osi w górę i w dół obciążającym pierścieniem o masie M . Napisać lagrangian waciaka i wynikające zeń ściśle równanie ruchu. Znaleźć stabilne położenie równowagi i ruch układu w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi trwałej.

Rozwiązanie:

Układ ma oczywiście tylko jeden stopień swobody - do całkowitego wyznaczenia jego położenia wystarczy jedna zmienna, za którą najwygodniej jest przyjąć kąt θ zaznaczony na rysunku 45. Wprowadźmy inercjalny układ odniesienia o osi z skierowanej od punktu A w górę i osiach x i y w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Współrzędna z_M położenia masy M przez kąt θ wyraża się wtedy wzorem

$$z_M = -2l \cos \theta ,$$

a pozostałe dwie współrzędne x_M i y_M masy M są stale równe zeru. Z kolei współrzędne x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 dwu mas m są dane wzorami

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta \cos \omega t , & x_2 &= l \sin \theta \cos(\omega t + \pi) = -l \sin \theta \cos \omega t , \\ y_1 &= l \sin \theta \sin \omega t , & y_2 &= l \sin \theta \sin(\omega t + \pi) = -l \sin \theta \sin \omega t , \\ z_1 &= -l \cos \theta , & z_2 &= -l \cos \theta . \end{aligned}$$

Sumaryczną energię kinetyczną wszystkich elementów układu wyrażoną przez zmienną dynamiczną θ łatwo już teraz napisać:

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{z}_M^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \\ &= 2Ml^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + m \left(\omega^2 l^2 \sin^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right) \end{aligned}$$

Również energia potencjalna składa się trzech przyczynków

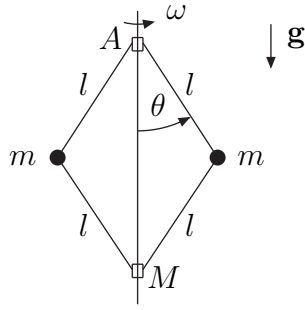
$$V = Mgz_M + mgz_1 + mgz_2 = -2(M + m)gl \cos \theta .$$

Kompletny lagrangian układu, $L = T - V$ ma zatem postać

$$L = \frac{1}{2} l^2 (2m + 4M \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 + m\omega^2 l^2 \sin^2 \theta + 2(M + m)gl \cos \theta ,$$

a ruch wyznacza równanie

$$\frac{d}{dt} [2l^2 (m + 2M \sin^2 \theta) \dot{\theta}] = 2m\omega^2 l^2 \sin \theta \cos \theta - 2(M + m)gl \sin \theta + 4Ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta ,$$



Rysunek 45: “Waciak” (czyli regulator Watta).

Przy wypisywaniu go należy pamiętać, że człon z $\dot{\theta}^2$ w lagrangianie zależy także od θ i jego pochodną po θ trzeba uwzględnić - jest to ostatni wyraz - po prawej stronie równania Eulera-Lagrange’a. Po wykonaniu pochodnej po czasie po lewej stronie wyjdzie tam podobny wyraz, ale z dwa razy większym współczynnikiem, więc oba wyrazy nie zredukują się całkowicie. Jako równanie ruchu otrzymujemy więc ostatecznie

$$2(m + 2M \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + 4M \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = 2m\omega^2 \sin \theta \cos \theta - 2(m + M) \frac{g}{l} \sin \theta.$$

Jak zwykle, położenia równowagi, są to rozwiązania powyższego równania z $\theta(t) = \theta_0 = \text{const}$. Musi więc ono spełniać równanie

$$m\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = (m + M) \frac{g}{l} \sin \theta_0.$$

Zatem albo⁸⁶ $\theta_0 = 0$ lub π , albo

$$\cos \theta_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 \equiv \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{g}{l},$$

oczywiście tylko, jeśli $\omega_0^2/\omega^2 \leq 1$. Powstaje więc pytanie, które z tych położzeń równowagi jest stabilne i w jakich warunkach. W tym celu badamy równanie Eulera-Lagrange’a dla małych odchyłeń od równowagi podstawiając doń $\theta(t) = \theta_0 + \eta(t)$ z $|\eta(t)| \ll 1$ i zachowując w nim tylko wyrazy liniowe w $\eta(t)$ (wyraz $\dot{\eta}^2$ biorący się z członu z $\dot{\theta}^2$, również pomijamy - uzasadnienie, trochę *a posteriori*, jest takie, że w liniowym przybliżeniu, w ruchu, w którym $|\eta(t)| \ll 1$ przez cały czas, również $|\dot{\eta}| \ll 1$ - jest to elementarna wiedza o ruchu harmonicznym). W przybliżeniu takim równanie na $\eta(t)$ ma postać

$$\begin{aligned} (m + 2M \sin^2 \theta_0) \ddot{\eta} &\approx \frac{1}{2} m \omega^2 \sin(2\theta_0 + 2\eta) - (m + M) \frac{g}{l} \sin(\theta_0 + \eta) \\ &\approx \frac{1}{2} m \omega^2 (\sin 2\theta_0 + 2\eta \cos 2\theta_0) - (m + M) \frac{g}{l} (\sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0), \end{aligned}$$

⁸⁶Badamy teraz matematyczną stronę problemu, abstrahując od pytania, czy w realnym waciaku położenia $\theta_0 = 0$ lub π są rzeczywiście możliwe.

czyli (bo pierwszy i trzeci wyraz po prawej stronie redukują się wzajem na mocy warunku spełnianego przez θ_0)

$$(m + 2M \sin^2 \theta_0) \ddot{\eta} = \left[m\omega^2(2 \cos^2 \theta_0 - 1) - (m + M)\frac{g}{l} \cos \theta_0 \right] \eta.$$

Stabilność położenia równowagi θ_0 zależy teraz w sposób oczywisty od znaku kwadratowego nawiasu po prawej stronie (nawias mnożący $\ddot{\eta}$ jest zawsze dodatni).

- Jeśli $\theta_0 = \pi$, znak ten jest dodatni i równanie ma postać $\ddot{\eta} = +\kappa^2 \eta$ i, z wyjątkiem szczególnych warunków początkowych ($\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 0$), prowadzi do eksponencjalnego narastania wychylenia $|\eta|$.
- Jeśli $\theta_0 = 0$,

$$[\dots] = m\omega^2 - (m + M)\frac{g}{l} = -m(\omega_0^2 - \omega^2) \equiv -m\Omega^2,$$

co pokazuje - ponieważ równanie na $\eta(t)$ staje się wtedy równaniem oscylatora harmonicznego, którego rozwiązaniami są małe, jeśli małe były $|\eta(0)|$ i $|\dot{\eta}(0)/\Omega|$, oscylacje wokół położenia $\theta = 0$ - że jest to położenie równowagi trwałej (stabilnej), gdy $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$, czyli, gdy prędkość kątowna ω waciaka jest mniejsza od prędkości krytycznej ω_0 .

- Jeśli $\omega > \omega_0$, stabilnym staje się położenie, w którym $\cos \theta_0 = \omega_0^2/\omega^2$. Wówczas

$$[\dots] = m \left[\omega^2 \left(2\frac{\omega_0^4}{\omega^4} - 1 \right) - \omega_0^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right] = -m \frac{\omega^4 - \omega_0^4}{\omega^2},$$

i możliwe są małe oscylacje wokół tego położenia z częstością

$$\Omega = \left[\frac{\omega^4 - \omega_0^4}{\omega^2} \left(1 + 2\frac{M}{m} \sin^2 \theta_0 \right)^{-1} \right]^{1/2}.$$

Przejście od położenia równowagi w $\theta_0 = 0$ (dla $\omega < \omega_0$) do zależnego od ω położenia w $\cos \theta_0 = \omega_0^2/\omega^2$ jest przykładem tzw. bifurkacji.

Ponieważ lagrangian układu nie zależy jawnie od czasu, całką pierwszą równania Eulera-Lagrange'a jest "hamiltonian", tj. wielkość⁸⁷

$$\dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = l^2(m + 2M \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 - m\omega^2 l^2 \sin^2 \theta - 2(m + M)gl \cos \theta = h = \text{const.}$$

Jej istnienie pozwala - bo układ ma tylko jeden stopień swobody - sprowadzić ruch do kwadratur. Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy ($\tilde{h} \equiv h/ml^2$)

$$t - t_0 = \pm \int d\theta \sqrt{\frac{1 + 2(M/m) \sin^2 \theta}{\tilde{h} + 2\omega_0^2 \cos \theta + \omega^2 \sin^2 \theta}} \equiv \pm \int d\theta \sqrt{\frac{1 + 2(M/m) \sin^2 \theta}{\tilde{h} - V_{\text{eff}}(\theta)}},$$

⁸⁷Zauważmy od razu, że h nie jest tu energią układu $E = T + V$ (mierzoną w układzie inercyjnym).

(znak $\pm$ jest znakiem pochodnej $\dot{\theta}$). Druga postać całki definiuje potencjał efektywny $V_{\text{eff}}(\theta)$. Przybliżenia małych wychyleń można teraz dokonać znajdując położenie θ_0 ekstremum potencjału efektywnego

$$V_{\text{eff}}(\theta) = -2\omega_0^2 \cos \theta - \omega^2 \sin^2 \theta,$$

podstawiając w całce w mianowniku wyrażenia pod pierwiastkiem $\theta = \theta_0 + \eta$ i zachowując wyraz do η^2 , a w liczniku kładąc $\theta = \theta_0$. Aby znaleźć rozwinięcie mianownika piszemy⁸⁸

$$\begin{aligned} 2\omega_0^2 \cos(\theta_0 + \eta) + \omega^2 \sin^2(\theta_0 + \eta) &= 2\omega_0^2 \cos \theta_0 + \omega^2 \sin^2 \theta_0 \\ &+ [-2\omega_0^2 \sin \theta_0 + 2\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0] \eta \\ &- [\omega_0^2 \cos \theta_0 - \omega^2 \cos 2\theta_0] \eta^2. \end{aligned}$$

Widać, że wyraz liniowy w η znika dla $\theta_0 = \pi$, $\theta_0 = 0$ lub $\cos \theta_0 = \omega_0^2/\omega^2$ (jeśli $\omega_0^2/\omega^2 < 1$). W $\theta_0 = \pi$ wyrażenie w nawiasie kwadratowym przed η^2 , które oznaczmy Ω^2 , jest równe $-\omega_0^2 - \omega^2$. Ponieważ jest ono ujemne, $\theta_0 = \pi$ jest lokalnym maksimum $V_{\text{eff}}(\theta)$. Jest to niestabilne położenie równowagi. W punkcie $\theta_0 = 0$ nawias kwadratowy jest równy $\omega_0^2 - \omega^2$. Jest on dodatni, gdy $\omega_0^2 > \omega^2$, tj., gdy szybkość obrotów waciaka jest nie za duża. Punkt $\theta_0 = 0$ jest wtedy położeniem równowagi trwałej. Wreszcie, gdy $\omega_0^2 < \omega^2$ trwałym położeniem równowagi jest to, w którym $\cos \theta_0 = \omega_0^2/\omega^2$ - nawias kwadratowy równy $(\omega^4 - \omega_0^4)/\omega^2$ jest wtedy dodatni. Dyskusja ta jest dokładnie równoważna przeprowadzonej poprzednio, na podstawie równania Eulera-Lagrange'a.

Częstość małych drgań wokół położenia równowagi trwałej znajdujemy standardowo: piszemy ($\eta = \theta - \theta_0$)

$$t - t_0 = \pm \int d\theta \sqrt{\frac{1 + 2(M/m) \sin^2 \theta_0}{\tilde{C} - \Omega^2 \eta^2}},$$

($\tilde{C} = \tilde{h} - V_{\text{eff}}(\theta_0) > 0$) i całkujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2(M/m) \sin^2 \theta_0}} (t - t_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1 - (\Omega \eta / \sqrt{\tilde{C}})^2}} = \pm \frac{1}{\Omega} \arcsin \left(\frac{\Omega \eta}{\sqrt{\tilde{C}}} \right).$$

Stąd już widać, że częstości drgań są równe

$$\sqrt{\frac{\Omega^2}{1 + 2(M/m) \sin^2 \theta_0}},$$

tak jak poprzednio.

⁸⁸Można oczywiście zamiast rozwijania obliczać pochodne $V_{\text{eff}}(\theta)$.

Zadanie 8.24

Napisać lagrangian sferycznego wahadła, tj. masy m na sztywnym nierozciągliwym drucie o długości l zawieszonego na wysokości $h = l$ nad Ziemią na szerokości geograficznej ϕ uwzględniając dobowy obrót Ziemi. Wypisać ściśle równania ruchu (Eulera-Lagrange'a) i znaleźć ich rozwiązanie w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy układ $\mathcal{O}'$ związany z obracającą się Ziemią (a więc nieinercjalny) o początku w punkcie zaczepienia wahadła, osi z' skierowanej w górę, osi x' w kierunku wschodnim, a y' północnym, jak na rysunku 46. W tym układzie położenie wahadła (masy m) zadaje wektor $\mathbf{r} = \mathbf{e}_{x'}x' + \mathbf{e}_{y'}y' + \mathbf{e}_{z'}z'$. Wahadło ma dwa stopnie swobody. Jako zmienne uogólnione wybieramy kąty θ i φ , tak że

$$\begin{aligned}x' &= l \sin \theta \cos \varphi, \\y' &= l \sin \theta \sin \varphi, \\z' &= l \cos \theta.\end{aligned}$$

Wprowadźmy ponadto układ inercjalny $\mathcal{O}$ o początku w środku Ziemi i osi z skierowanej ku biegunowi północnemu. Początek tego układu z punktem zawieszenia wahadła łączy wektor $\mathbf{R}$, który w układzie nieinercjalnym ma postać (zakładamy, że długość l jest dobrana tak, iż wahadło w najniższym swoim położeniu muska powierzchnię Ziemi) $\mathbf{R} = \mathbf{e}_{z'}(R_Z + l)$.

Prędkość $\mathbf{V}$ masy m względem układu inercjalnego $\mathcal{O}$ wyraża się wzorem

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = \frac{d'}{dt}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}),$$

gdzie $\mathbf{v}' \equiv d'\mathbf{r}/dt$ (wektor $\mathbf{R}$ jest w układzie $\mathcal{O}'$ stały).

Z kolei energia potencjalna V masy m jest ściśle rzecz biorąc dana wyrażeniem

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM_Z m}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|} = -\frac{GM_Z m}{\sqrt{\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r}^2}}.$$

Jednakże jest jasne, że $|\mathbf{r}| = l \ll |\mathbf{R}| = R_Z + l \approx R_Z$, co pozwala przybliżyć V następująco:

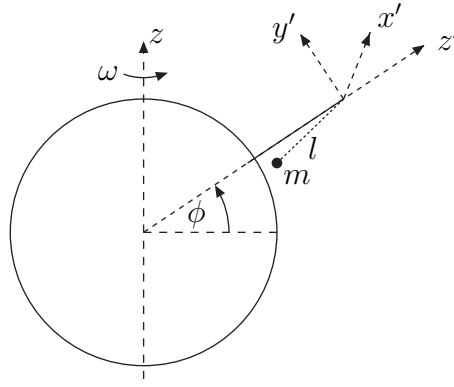
$$V(\mathbf{r}) \approx -\frac{GM_Z m |\mathbf{R}|}{\mathbf{R}^2 \sqrt{1 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{R}|^2 + \mathbf{r}^2/|\mathbf{R}|^2}} \approx -\frac{GM_Z}{\mathbf{R}^2} m |\mathbf{R}| \left(1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{R}|^2} + \dots\right).$$

Ponieważ $GM_Z/\mathbf{R}^2 = GM_Z/(R_Z + l)^2 \approx GM_Z/R_Z^2 = g$, a $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{R}| l \cos \theta$,

$$V(\mathbf{r}) = \text{const.} + mgl \cos \theta + \dots,$$

jak też i należało oczekiwać. Tak więc (energia kinetyczna jest tu tą, jaką masa m ma w układzie inercjalnym!)

$$\begin{aligned}L = T - V &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}))^2 - mgl \cos \theta \\&\approx \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] - mgl \cos \theta,\end{aligned}$$



Rysunek 46: Wahadło Foucault na obracającej się Ziemi (w polu $\mathbf{g}$).

po pominięciu wyrazu rzędu ω^2 . Drugi wyraz jest odpowiedzialny za przyspieszenie Coriolisa.

Wypisany wyżej lagrangian trzeba jeszcze wyrazić przez wybrane współrzędne uogólnione θ i φ .

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] &= -\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{v}' \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] \\ &= -\omega_{y'} [\mathbf{v}' \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})]^{y'} - \omega_{z'} [\mathbf{v}' \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})]^{z'},\end{aligned}$$

bo $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_{y'}\omega_{y'} + \mathbf{e}_{z'}\omega_{z'} \equiv \mathbf{e}_{y'}\omega c_\phi + \mathbf{e}_{z'}\omega s_\phi$ ($c_\phi \equiv \cos \phi$, $s_\phi \equiv \sin \phi$). Z kolei w tymże układzie $\mathcal{O}'$ (aby mniej pisać, niech $R'_Z = R_Z + l$)

$$\mathbf{R} + \mathbf{r} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \cos \varphi \\ l \sin \theta \sin \varphi \\ R'_Z + l \cos \theta \end{pmatrix},$$

więc

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{v}' \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] &= \omega_{y'} \left[-l^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - l (\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) (R'_Z + l \cos \theta) \right] \\ &+ \omega_{z'} \left[l^2 (\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - l^2 (\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta \cos \varphi \right].\end{aligned}$$

Jest to dosyć skomplikowane, ale na szczęście po wymnożeniu trochę się to wyrażenia upraszcza:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{v}' \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] &= \omega_{y'} \left[-l^2 \dot{\theta} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \right. \\ &\quad \left. - R'_Z l \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + R'_Z l \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \right] \\ &+ \omega_{z'} \left[-l^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \right].\end{aligned}$$

Zatem lagrangian wahadła Eco, pardon, wahadła Foucaulta, ma postać

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \\ - m\omega_{y'} l^2 [-\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi] \\ - m\omega_{y'} R'_Z l [-\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi] \\ - m\omega_{z'} l^2 [-\dot{\varphi} \sin^2 \theta] .$$

Trzecią linię tego lagrangianu można pominąć, jako że jest ona pełną pochodną

$$-\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi = \frac{d}{dt} (-\sin \theta \cos \varphi) ,$$

i jako taka nie ma wpływu na równania ruchu. Tym samym wypada całkowicie zależność od R'_Z (poza tą ukrytą w g). Ostatecznie więc

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \\ - m\omega_{y'} l^2 (-\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi) + m\omega_{z'} l^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta .$$

Wypisujemy następnie równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} ml^2 (\dot{\theta} + \omega_{y'} \cos \varphi) = ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl \sin \theta \\ - m\omega_{y'} l^2 \dot{\varphi} \cos 2\theta \sin \varphi + m\omega_{z'} l^2 \sin 2\theta ,$$

$$\frac{d}{dt} ml^2 (\dot{\varphi} \sin^2 \theta - \omega_{y'} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi + \omega_{z'} \sin^2 \theta) = -m\omega_{y'} l^2 \dot{\theta} \sin \varphi \\ - m\omega_{y'} l^2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi .$$

Po obliczeniu pozostałych pochodnych po czasie i podzieleniu przez ml^2 otrzymujemy więc

$$\ddot{\theta} - \omega_{y'} \dot{\varphi} \sin \varphi = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta - \omega_{y'} \dot{\varphi} \cos 2\theta \sin \varphi + \omega_{z'} \dot{\varphi} \sin 2\theta ,$$

$$\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin 2\theta - \omega_{y'} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ - \omega_{y'} \dot{\theta} \cos 2\theta \sin \varphi + \omega_{z'} \dot{\theta} \sin 2\theta = -\omega_{y'} \dot{\theta} \sin \varphi - \omega_{y'} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

Drugie równanie ładnie się upraszcza i ostatecznie (po użyciu w obu tożsamości $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ i podzieleniu drugiego przez $\sin \theta$) dwoma równaniami ruchu wahadła są równania

$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{g}{l} \sin \theta + 2\dot{\varphi} (\omega_{y'} \sin \theta \sin \varphi + \omega_{z'} \cos \theta) \sin \theta , \\ \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + 2\omega_{y'} \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + 2\omega_{z'} \dot{\theta} \cos \theta = 0 .$$

Szukamy najpierw położeń równowagi, czyli rozwiązań ze stałymi kątami θ i φ . Drugie równanie jest zawsze spełnione przez $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$. Spełnienie pierwszego wymaga, by zerował się jeszcze $\sin \theta$. Zatem położeniami równowagi są $\theta = 0$ i π (kąt φ jest wtedy niezdefiniowany) ale ponieważ potencjał miał postać $mgl \cos \theta$, stabilnym położeniem jest $\theta = \pi$. Zmieniamy więc definicje kątów $\theta \rightarrow \pi - \theta$ (czyli $\sin \theta \rightarrow \sin \theta$, $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$, oraz $\ddot{\theta} \rightarrow -\ddot{\theta}$, $\dot{\theta} \rightarrow -\dot{\theta}$). Równania przybierają wtedy postać

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta &= -\frac{g}{l} \sin \theta - 2\dot{\varphi} (\omega_{y'} \sin \theta \sin \varphi - \omega_{z'} \cos \theta) \sin \theta, \\ \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta &= 2\dot{\theta} (\omega_{y'} \sin \theta \sin \varphi - \omega_{z'} \cos \theta).\end{aligned}$$

W przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi trwałej można położyć $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, co sprowadza je do

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \theta \dot{\varphi}^2 &= -\frac{g}{l} \theta + 2\omega_{z'} \theta \dot{\varphi}, \\ \ddot{\varphi} \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} &= -2\omega_{z'} \dot{\theta}.\end{aligned}$$

Widać, że rozwiązaniem drugiego równania jest $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = -\omega_{z'}$. Pierwsze równanie sprowadza się wtedy do

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{l} + \omega_{z'}^2\right) \theta.$$

Zatem ruch jest złożeniem harmonicznym oscylacji kąta θ z częstością $\Omega = \sqrt{(g/l) + \omega_{z'}^2}$ i obrotu wokół osi z' lokalnego układu $\mathcal{O}'$ w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (bo $\dot{\varphi} < 0$).

Zadanie 8.21

Stałe pole magnetyczne o symetrii cylindrycznej, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B(r)$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, jest zlokalizowane w obszarze, którego rzut na płaszczyznę xy jest kołem o promieniu R . Pole to jest takie, że

$$\int_{z=0} ds \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Pokazać, że jeśli cząstka o ładunku elektrycznym q startująca z punktu $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ i pozostająca stale w płaszczyźnie xy opuszcza obszar pola (tzn. obszar $r < R$), to w chwili przekraczania granicy (tj., gdy $r = R$) pola jej prędkość jest skierowana radialnie. Podać warunek, jaki musi spełniać prędkość $\mathbf{v}_0$ cząstki w $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, by mogła ona opuścić obszar pola.⁸⁹

Rozwiązanie:

Załóżmy, że cząstka dociera do $r = R$ w chwili $t = t_{\text{esc}}$ i obliczmy zmianę z -owej składowej jej momentu pędu spowodowaną oddziaływaniem z polem magnetycznym. Zmiana ta musi być równa całce po czasie z z -owej składowej momentu siły działającego na cząstkę:

$$\Delta L^z = \int_0^{t_{\text{esc}}} dt [\mathbf{r} \times (q\mathbf{v} \times \mathbf{B})]^z = q \int_0^{t_{\text{esc}}} dt [v^z(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})B].$$

Jeśli cząstka porusza się pozostając stale w płaszczyźnie xy , to $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0$. Stąd

$$\begin{aligned} \Delta L^z &= -q \int_0^{t_{\text{esc}}} dt (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) B(r(t)) = -q \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} B(r) \\ &= -\frac{1}{2} q \int_0^{R^2} d(\mathbf{r}^2) B(r) = -q \int_0^R dr r B(r) = -\frac{q}{2\pi} \int_{z=0} ds \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

Zatem zmiana ΔL^z z -owej składowej momentu pędu cząstki znika, jeśli znika strumień pola magnetycznego przez płaszczyznę xy , a ponieważ cząstka startująca z $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ma w chwili początkowej zerowy moment pędu, musi mieć również zerową jego składową z -ową. Stąd jej prędkość, gdy opuszcza ona obszar pola, musi być skierowana radialnie, by składowa L^z jej momentu pędu znów była równa zero (oczywiście wewnątrz obszaru działania pola, gdy $|\mathbf{r}(t)| < R$, ta składowa momentu pędu cząstki nie musi znikać, bo strumień $\int ds \cdot \mathbf{B}$ pola magnetycznego przez koło o promieniu $r < R$ nie musi znikać).

Aby znaleźć warunek, jaki musi spełniać prędkość początkowa $\mathbf{v}_0$, by cząstka mogła opuścić obszar pola, trzeba wykorzystać wielkości zachowane podczas ruchu w cylindrycznie symetrycznym polu magnetycznym. Najłatwiej je znaleźć wykorzystując formalizm lagrangeowski. W przypadku cząstki poruszającej się w polu magnetycznym wymaga on wprowadzenia potencjału wektorowego $\mathbf{A}$, takiego, że $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Lagrangian ma wtedy postać

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}.$$

⁸⁹J. Franklin i K. Cole Newton *Am. J. Phys.* **84** (2016) s. 263.

W przypadku cylindrycznie symetrycznego pola $\mathbf{B}$ wygodnie jest przyjąć⁹⁰ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A^\varphi(r).$$

Strumień pola magnetycznego można wyrazić przez $\mathbf{A}$ wzorem (tzw. A-Ampio)

$$\int_{\Sigma} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \oint_{\partial\Sigma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}.$$

W przypadku powierzchni Σ będącej kołem o promieniu R i potencjału wektorowego $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A^\varphi(r)$, wzór ten daje

$$\int d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = 2\pi R A^\varphi(R).$$

Zatem znikanie strumienia pola przez koło o promieniu R oznacza, że $A^\varphi(R) = 0$.

Lagrangian cząstki ma w zmiennych cylindrycznych i przy tym wyborze potencjału wektorowego postać

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + r\dot{\varphi}qA^\varphi(r).$$

Ponieważ nie zależy on jawnie ani od czasu ani od zmiennej φ , wielkościami stałymi są “hamiltonian” (będący tu całkowitą energią - pole magnetyczne nie wykonuje pracy!)

$$h = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = E,$$

oraz (bo Lagrangian nie zależy jawnie od zmiennej φ)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + r q A^\varphi(r) = \text{const}.$$

Jeśli cząstka startuje z $r = 0$, ta druga wielkość zachowana jest równa zeru,⁹¹ czyli w całym ruchu w polu magnetycznym zachodzi związek

$$r\dot{\varphi} = -\frac{q}{m} A^\varphi(r).$$

⁹⁰W zmiennych cylindrycznych, jeżeli $\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A^r + \mathbf{e}_\varphi A^\varphi + \mathbf{e}_z A^z$, to

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A^z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A^\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A^r}{\partial z} - \frac{\partial A^z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA^\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A^r}{\partial \varphi} \right).$$

⁹¹Zakładamy (tu i wyżej, gdy strumień pola $\mathbf{B}$ wyrażony został przez A^φ) na razie, że pole $A^\varphi(r)$ nie jest osobliwe w $r = 0$. Z postaci rotacji wynika, że dla $r \sim 0$ mogłoby ono zachowywać się najwyżej jak $\sim 1/r$, by strumień pola magnetycznego przez płaszczyznę xy był skończony (przy $r \rightarrow 0$ pole magnetyczne nie może być bardziej osobliwe niż $B(r) \sim 1/r^\beta$ z $\beta < 2$); przypadek takiej osobliwości pola $A^\varphi(r)$ uwzględnimy dalej.

Zatem ze stałości energii E , która na początku ruchu jest równa $\frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2$, otrzymujemy (ruch jest płaski, więc $z = 0$ i $\dot{z} = 0$)

$$\mathbf{v}_0^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \left(\frac{q}{m}A^\varphi(r)\right)^2.$$

Ponieważ $\dot{r}^2 \geq 0$, wynika stąd, że aby cząstka mogła opuścić obszar pola musi być spełniona nierówność

$$|\mathbf{v}_0| \geq \max_{0 \leq r \leq R} \left| \frac{q}{m} A^\varphi(r) \right|.$$

Pozostaje jeszcze tylko pytanie o sens tego kryterium wobec tego, że potencjał wektorowy $\mathbf{A}$ nie jest przez pole $\mathbf{B}$ wyznaczony jednoznacznie: $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r})$ daje to samo pole magnetyczne (i zerowe pole elektryczne). Należy jednak zauważyć, że wykorzystana całka pierwsza równania ruchu istnieje tylko wtedy, gdy lagrangian nie zależy od zmiennej φ i co więcej, całe wyprowadzenie warunku jest oparte na tym, że jedyną niezerową składową potencjału wektorowego jest A^φ . Należy więc zapytać, jaka jest swoboda wyboru skalarnej funkcji $\chi(r, \varphi, z)$, by nadal potencjał spełniał te warunki, tzn. by $A'^r = A'^z = 0$ i $A'^\varphi = A^\varphi + f(r)$? Funkcja $\chi(r, \varphi, z)$ musi więc być taka, że

$$\frac{\partial\chi}{\partial r} = \frac{\partial\chi}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = f(r).$$

Ostatnia równość mówi, że

$$\chi(r, \varphi, z) = r\varphi f(r) + g(r, z).$$

Znikanie A'^z , czyli zerowanie się pochodnej $\partial\chi/\partial z$ oznacza, że funkcja g nie może zależeć od z . Z kolei znikanie A'^r (czyli pochodnej $\partial\chi/\partial r$) daje teraz warunek

$$\varphi [f(r) + rf'(r)] + g'(r) = 0.$$

Wynika z niego (bo równość ta musi zachodzić dla dowolnego kąta φ), że $g(r) = \text{const}$, oraz że $f(r) = a/r$. Zatem jedyną dopuszczalną funkcją jest $\chi(r, \varphi, z) = a\varphi + \text{const}$, która daje⁹²

$$A^{\varphi'}(r) = A^\varphi(r) + \frac{a}{r}.$$

Jeśli jednak zamiast $A^\varphi(r)$ użyjemy $A^{\varphi'}(r)$, to na początku ruchu, gdy cząstka startuje z $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, druga wielkość zachowana nie jest już równa zeru, lecz qa . W trakcie ruchu zachodzi wtedy związek

$$r\dot{\varphi} = -\frac{q}{m} \left(A^{\varphi'} - \frac{a}{r} \right).$$

⁹²Nie zmienia to strumienia pola $\mathbf{B}$ obliczanego z A-Ampsia, bo wobec osobliwości $A^{\varphi'}(r)$ trzeba teraz zastosować przejście graniczne przyjmując za brzeg obszaru całkowania duże koło o promieniu R i małe (obiegane w przeciwną stronę) o promieniu ε : $\int d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \int d\varphi R (A^\varphi(R) + a/R) - \int d\varphi \varepsilon (A^\varphi(\varepsilon) + a/\varepsilon)$ i przejść do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Zatem do podania kryterium wylatywania cząstki z obszaru pola wystarczy użyć takiego potencjału wektorowego, że $A^r = A^z = 0$, a pole A^φ jest tylko funkcją zmiennej r nie-osobliwą w $r = 0$ i wybór ten jest (dla danego pola magnetycznego) jednoznaczny; jeśli użyjemy potencjału z osobliwością typu a/r wchodzącą w A^φ addytywnie to i tak musimy szukać maksimum A^φ z członem osobliwym odjętym.

Przypomnienie

Ogólna technika rozwiązywania tej klasy problemów polega na znalezieniu położenia równowagi $(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n)$ układu, którego dynamikę wyznacza lagrangian o ogólnej postaci

$$L = T - V = \frac{1}{2} \dot{q}^i T_{ij}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j - V(q^1, \dots, q^n),$$

i zlinearyzowaniu równań ruchu przy założeniu, że odchylenia od położenia równowagi są małe. Osiąga się to zazwyczaj rozwijając potencjał $V(q^1, \dots, q^n)$ w szereg Taylora wokół punktu $(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n)$ do drugiego rzędu i badając ruch wyznaczony przez przybliżony (“skwadratyzowany”) lagrangian

$$L^{\text{kwadr}} = \frac{1}{2} \dot{q}^i T_{ij}(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n) \dot{q}^j - \frac{1}{2} q^i V_{ij}''(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n) q^j,$$

w którym q^i oznaczają teraz odchylenia od położenia równowagi, tj. dokonane zostało przemianowanie $q^i - q_{(0)}^i$ na q^i (pierwsza pochodna $V'(q^1, \dots, q^n)$ znika w $(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n)$, a stałą $V(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n)$ można pominąć). Macierz $T_{ij} \equiv T_{ij}(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n)$ musi być dodatnio określona i symetryczna (albo: tylko symetryczna część macierzy T_{ij} wchodzi do L^{kwadr}), a symetryczna (z konstrukcji) macierz $V_{ij}''(q_{(0)}^1, \dots, q_{(0)}^n)$, oznaczana dalej V_{ij} , musi być dodatnio określona (jako macierz formy kwadratowej; w sprawie warunków zapewniających dodatniość - zob. np. mój skrypt do algebry) lub przynajmniej dodatnio półokreślona (tj. dopuszczamy jej zerowanie się na pewnych niezerowych wektorach).

Równania Eulera-Lagrange’a wynikające z L^{kwadr} tworzą układ równań

$$T_{ij} \ddot{q}^j + V_{ij} q^j = 0.$$

Rozwiązania szuka się w standardowej formie⁹³

$$q^j(t) = A^j e^{i\omega t},$$

w której A^j są składowymi stałego (tj. niezależnego od czasu) wektora spełniającego algebraiczne równanie

$$-\omega^2 T_{ij} A^j + V_{ij} A^j = 0.$$

Równanie to jest równoważne równaniu własnemu

$$(F - \omega^2 I) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

macierzy $F = T^{-1} \cdot V$. Mimo, że naogół niesymetryczna, macierz F jest zawsze diagonalizowalna, tzn. ma zawsze tyle wektorów własnych, ile wynosi jej wymiar, ponieważ powstała ze złożenia macierzy T^{-1} i macierzy symetrycznej V . Kwadraty ω_a^2 częstości

⁹³Oczywiście fizyczne rozwiązanie jest dane przez część rzeczywistą (lub urojoną) postulowanego rozwiązania.

własnych są pierwiastkami (niektóre mogą być wielokrotne) wielomianu charakterystycznego⁹⁴

$$W_F(\omega^2) = \det(F - \omega^2 I) = 0.$$

Wektory własne $\mathbf{A}_{(a)}$ odpowiadające różnym częstościom ω_a są automatycznie ortogonalne w iloczynie skalarnym zadawanym przez macierz T_{ij} i można (i należy) je unormować względem tego iloczynu skalarnego; wektory własne $\mathbf{A}_{(a_1)}$ i $\mathbf{A}_{(a_2)}$ odpowiadające tej samej częstości ω_a można zortonormalizować stosując procedurę Gramma-Schmidta tak, by

$$A_{(a)}^i T_{ij} A_{(b)}^j = \delta_{ab}.$$

Niżej przyjmujemy, że zostało to zrobione. Ogólne rozwiązanie (zlinearyzowanych) równań ruchu (tj. równań otrzymanych z L^{kwadr})

$$q^j(t) = \sum_{a=1}^n A_{(a)}^j (C_a \cos \omega_a t + S_a \sin \omega_a t) = \sum_{a=1}^n A_{(a)}^j D_a \cos(\omega_a t + \varphi_a),$$

ma postać superpozycji harmoniczných drgań własnych, czyli tzw. modów własnych, układu o różnych częstościach. Stosunki $A_{(a)}^i/A_{(a)}^j$ składowych wektora $\mathbf{A}_{(a)}$ mówią, jak się mają do siebie wychylenia (z położeń równowagi) poszczególnych zmienných dynamiczných w a -tym modzie drgań własnych układu, tj. zadają niezależne od czasu stosunki $q^i(t)/q^j(t)$ w a -tym modzie drgań.⁹⁵

Współrzednymi normalnymi nazywa się zmienne uogólnione, w których uproszczony (skwadratyzowany lagrangian) rozpada się na sumę n lagrangianów poszczególných modów normalnych, z których każdy zależy tylko od jednej współrzednej normalnej i jest lagrangianem oscylatora harmonicznego o odpowiadającej temu modowi częstości ω_a . Współrzedne takie, $Q^a(t)$, tworzy się, gdy już znane są (zortonormalizowane w iloczynie skalarnym zadawanym przez macierz T_{ij}) wektory $\mathbf{A}_{(a)}$, według przepisu:

$$q^i(t) = \sum_{a=1}^n A_{(a)}^i Q^a(t).$$

(Postawione na “sztorc” składowe $A_{(a)}^i$ kolejnych wektorów $\mathbf{A}_{(a)}$ tworzą tu macierz liniowej

⁹⁴Oczywiście te same kwadraty ω_a^2 częstości własnych są pierwiastkami równania

$$W_{T,V}(\omega^2) = \det(-\omega^2 T + V) = 0,$$

gdyż $W_{T,V}(\omega^2) = W_F(\omega^2) \det(T)$.

⁹⁵Często przytome spojrzenie na układ pozwala zgadnąć przynajmniej niektóre z wektorów $\mathbf{A}_{(a)}$, co pozwala od razu, bez rozwiązywania równania $W_F(\omega^2) = 0$ znaleźć (przez bezpośrednie zadziałanie na zgadnięte wektory $\mathbf{A}_{(a)}$ macierzą F) także odpowiadające tym modom częstości ω_a i tym samym - bo już jakieś pierwiastki równania charakterystycznego są znane - uprościć sobie znajdowanie pozostałych poprzez obniżenie rzędu równania je wyznaczającego.

zamiany zmiennych). Rzeczywiście:

$$\begin{aligned} L^{\text{kwadr}} &= \frac{1}{2} \dot{q}^i T_{ij} q^j - \frac{1}{2} q^i V_{ij} q^j = \frac{1}{2} \dot{Q}^a A_{(a)}^i T_{ij} A_{(b)}^j \dot{Q}^b - \frac{1}{2} Q^a A_{(a)}^i V_{ij} A_{(b)}^j Q^b \\ &= \frac{1}{2} \dot{Q}^a \delta_{ab} \dot{Q}^b - \frac{1}{2} Q^a A_{(a)}^i \omega_b^2 T_{ij} A_{(b)}^j Q^a = \sum_a \left(\frac{1}{2} \dot{Q}^a \dot{Q}^a - \frac{1}{2} \omega_a^2 Q^a Q^a \right). \end{aligned}$$

Po drodze wykorzystana została (dwukrotnie) ortogonalność wektorów $\mathbf{A}_{(a)}$ w iloczynie skalarnym zadanym przez macierz T_{ij} i równanie własne wyznaczające te wektory. Stare, “fizyczne” (choć przy ich wyborze, tak jak zawsze przy wyborze zmiennych uogólnionych, jest spora dowolność) zmienne dynamiczne $q^i(t)$ są kombinacjami liniowymi współrzędnych normalnych $Q^a(t)$ i *vice versa* (macierz $A_{(a)}^i$ jest oczywiście odwracalna). Z tego powodu zmienne Q^a nie mają naogół oczywistej interpretacji przemieszczeń jakichś pojedynczych części układu (choć oczywiście, gdy znany jest ich związek z mającymi taką interpretację zmiennymi q^i , podanie wartości wszystkich Q^a wyznacza jednoznacznie położenie układu); są jednak koniecznym krokiem ku kwantowaniu, czyli budowie odpowiedniej kwantowej teorii układu złożonego wykonującego małe drgania na bazie jego teorii klasycznej

Osobnym zagadnieniem jest wyznaczanie częstości i modów własnych drgań cząsteczek zbudowanych z N atomów⁹⁶ (traktowanych jak punktowe masy), których wiązania (mające w rzeczywistości pochodzenie elektromagnetyczne) są modelowane przez siły sprężystości zależne (w przybliżeniu) liniowo od wychyleń atomów cząsteczki z ich położenia równowagi $\mathbf{r}_{a(0)}$, $a = 1, \dots, N$. W ogólności, cząsteczka zbudowana z N atomów ma $3N$ stopni swobody, z których 3 odpowiadają ruchowi postępowemu cząsteczki jako całości (który można wyeliminować przechodząc do układu odniesienia, w którym środek jej masy spoczywa), a kolejne 3 obrotowi cząsteczki jako całości; wyjątkiem jest tu cząsteczka, w której wszystkie atomy w położeniach równowagi leżą na jednej prostej - tylko 2 stopnie swobody takiej cząsteczki odpowiadają jej obrotowi. Pozostałe stopnie swobody odpowiadają wewnętrznym oscylacjom cząsteczki. Przy obliczaniu częstości drgań własnych N atomowej cząsteczki wygodnie jest od razu wyeliminować stopnie swobody związane z jej ruchem postępowym i obrotowym; innymi słowy chcemy rozpatrywać drgania cząsteczki w układzie, w którym jej środek masy spoczywa, nie pozwalając by wykonywała ona ja-

⁹⁶Mając (wyznaczone na podstawie mechaniki klasycznej) częstości oraz momenty bezwładności cząsteczek można, traktując cząsteczki jak wzajemnie nieoddziałujące, zbudować *kwantową* teorię tworzonego przez nie gazu doskonałego przewidującą poprawnie, jakościowo i ilościowo, zależność ciepła właściwego od temperatury. Ciepła właściwe gazów doskonałych (tzn. tworzonych przez cząsteczki, których wzajemne oddziaływania są pomijalnie słabe) nie są bowiem - wbrew temu, co można wnosić z kiepskich kursów termodynamiki - stałe w całym zakresie temperatur, a tylko “kawałkami” prawie stałe: stopnie swobody związane z obrotami cząsteczki jako całości oraz z jej drganiami “włączają” poczynając od pewnych temperatur “progowych”, zwiększając tym samym pojemność cieplną gazu. Owe temperatury progowe kwantowa mechanika statystyczna wiąże ściśle z momentami bezwładności i częstościami własnymi cząsteczek gazu. Jest zabawne, że efekty ściśle kwantowe, jakimi są te wzrosty pojemności cieplnych gazów niemal doskonałych zachodzą przy temperaturach, które są rzędu od kilkuset do kilku tysięcy Kelvinów, a nie, jak można by mniemać, przy bardzo niskich temperaturach.

kilkołwiek ruch obrotowy. W przypadku cząstek kilkuatomowych zmniejsza to wydatnie liczbę stopni swobody, znacznie upraszczając problem.

Eliminację stopni swobody związanych z ruchem środka masy i obrotami przeprowadza się następująco. Zapisujemy wektory $\mathbf{r}_a(t)$, $a = 1, \dots, N$ położenia atomów w formie

$$\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}_{a(0)} + \mathbf{u}_a(t),$$

gdzie stałe wektory $\mathbf{r}_{a(0)}$, $a = 1, \dots, N$ są jakimś (jest ich nieskończenie wiele) niezależnym od czasu rozwiązaniem ścisłych równań ruchu, a $\mathbf{u}_a(t)$ są (małymi z założenia) wychyle-
niami z tych położań równowagi i grają rolę $3N$ zmiennych uogólnionych. Na zmienne $\mathbf{u}_a(t)$ narzucamy najpierw więzy

$$\mathbf{P} \equiv \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a(t) = \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{u}}_a(t) = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{0}.$$

Odzwierciedlają one z to, że chcemy rozpatrywać układ, którego środek masy (w wybranym inercjalnym układzie odniesienia) nie porusza się. Więzy te są, jak widać, całkowalne, tzn. można je przedstawić w postaci warunku wiążącego $3N$ zmiennych $\mathbf{u}_a(t)$:

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{const}.$$

Ponieważ w położeniach równowagi $\mathbf{u}_a = \mathbf{0}$, stała jest wektorem zerowym: $\mathbf{const} = \mathbf{0}$.
Warunki

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{0},$$

pozwalają wyrazić w lagrangianie 3 z $3N$ zmiennych przez pozostałe $3N - 3$.

Eliminację stopni swobody związanych z obrotami przeprowadzamy narzucając warunek znikania całkowitego momentu pędu $\mathbf{J}$ cząsteczki (tj. chcemy rozpatrywać układ w sytuacji, gdy jako całość nie obraca się on):

$$\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a(t) \times \dot{\mathbf{r}}_a(t) = \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{r}_{a(0)} + \mathbf{u}_a(t)] \times \dot{\mathbf{u}}_a(t) = \mathbf{0}.$$

W tej ścisłej postaci są to więzy nieholonomiczne,⁹⁷ których, wobec tego, nie można użyć do wyeliminowania z lagrangianu dalszych trzech (lub dwu) zmiennych. Jeśli jednak badamy tylko małe wychylenia z położań równowagi, to więzy te w przybliżeniu są

⁹⁷Tzn. nie dające się przedstawić w postaci

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, t) = 0.$$

holonomiczne:

$$\mathbf{J} \approx \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{a(0)} \times \dot{\mathbf{u}}_a(t) = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{a(0)} \times \mathbf{u}_a(t),$$

i warunek⁹⁸

$$\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{a(0)} \times \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{0},$$

może zostać użyty do wyeliminowania z lagrangianu dalszych trzech (lub dwu) zmiennych. Otrzymany w ten sposób lagrangian efektywny zależy od $3N - 6$ (lub $3N - 5$, w przypadku cząsteczki dwuatomowej) zmiennych uogólnionych. Dalsze kroki prowadzące do znalezienia częstości własnych drgań cząsteczki i odpowiadających im modów są już takie same, jak opisane w pierwszej części tego Przypomnienia.

⁹⁸Tak jak w przypadku całkowitego pędu, stała, którą w ogólności jest $\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_{a(0)} \times \mathbf{u}_a$ jest równa zeru, bo wektory $\mathbf{u}_a$ zerują się w położeniu równowagi.

Zadanie 9.1 (Instruktażowe)

W przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi znaleźć ruch pokazanego na rysunku 14 układu dwóch mas m mogących ślizgać się bez tarcia po dwu prętach łączących się pod kątem $\pi/3$ (pręty leżą w płaszczyźnie prostopadłej do pola $\mathbf{g}$, czyli pole to jest tu nieistotne) i połączonych jedna z drugą oraz każda z osobną z osobnym punktem złączenia się prętów jednakowymi sprężynkami o długościach swobodnych l_0 i współczynnikach sprężystości k . Znaleźć współrzędne normalne. Podać przykład warunków początkowych, przy których wzbudzony zostanie tylko mod drgań o wyższej częstotliwości.

Rozwiązanie:

Układ ma dwa stopnie swobody - wystarczy podać położenia każdej z dwóch mas m na jej pręcie. Jako zmienne wybieramy więc x i z pokazane na rysunku 14. Energia kinetyczna T układu jest sumą energii kinetycznych obu mas:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2).$$

Energia potencjalna V układu jest sumą energii potencjalnych każdej z trzech sprężynek: $V = V_1 + V_2 + V_3$. Dwie pierwsze z nich są oczywiste:

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}k[(x - l_0)^2 + (z - l_0)^2].$$

Trzecia z nich ma bardziej skomplikowaną postać

$$V_3 = \frac{1}{2}k \left[\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} - l_0 \right]^2 = \frac{1}{2}k \left[\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}z^2} - l_0 \right]^2.$$

(Bo $x_A = x$, $y_A = 0$, $x_B = z \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}z$ i $y_B = z \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}z$ - zob. rysunek 47). Zatem

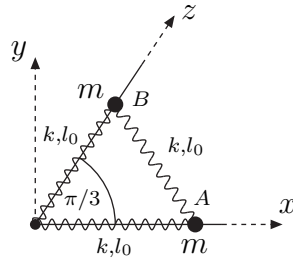
$$V = \frac{1}{2}k \left[(x - l_0)^2 + (z - l_0)^2 + \left(\sqrt{x^2 - xz + z^2} - l_0 \right)^2 \right].$$

Ponieważ potencjał V jest dodatnio określony, ma on minimum (absolutne) tam, gdzie przyjmuje wartość równą zero, tj. w punkcie $x = z = l_0$. Dokonujemy więc przesunięcia zmiennych $\tilde{x} = x - l_0$, $\tilde{z} = z - l_0$. W nowych zmiennych (pomijamy tyldy) ma on postać

$$V = \frac{1}{2}k \left[x^2 + z^2 + \left(\sqrt{l_0^2 + l_0(x + z) + x^2 + z^2 - xz} - l_0 \right)^2 \right].$$

Ponieważ zerowy wyraz rozwinięcia pierwiastka wokół $x = z = 0$ zredukuje się z l_0 , wyraz kwadratowy potencjału pochodzący z pierwiastka bierze się tylko z członu $l_0(x + z)$. Ostatecznie więc, rozwinięty do wyrazów kwadratowych w wychyleniach z położenia równowagi potencjał ma postać

$$V = \frac{1}{2}k \left[x^2 + z^2 + \left(\frac{x + z}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}k \left(\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}xz + \frac{5}{4}z^2 \right).$$



Rysunek 47: Dwie masy na prętach połączone sprężynkami.

Równaniami ruchu wynikającymi z lagrangianu $L = T - V$ są

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \frac{k}{4m} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podstawiamy

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^x \\ A^z \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

co daje równanie własne ($\omega^2 \equiv (k/4m)\eta^2$)

$$\begin{pmatrix} 5 - \eta^2 & 1 \\ 1 & 5 - \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^x \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Warunek znikania wyznacznika wyznacza wartości η^2 : $\eta_1^2 = 4$, $\eta_2^2 = 6$. Odpowiadają one częstościom i wektorom własnym

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \begin{pmatrix} A^x \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{2m}, \quad \begin{pmatrix} A^x \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierz energii kinetycznej T_{ij} była proporcjonalna do macierzy jednostkowej, a odpowiadające dwóm wektorom własnym częstości są różne, są one ortogonalne w zwykłym, “szkolnym” iloczynie skalarnym (tu zostały one od razu unormowane do jednostkowej długości). Ogólne rozwiązanie ma więc postać

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} [C_1 \cos \omega_1 t + S_1 \sin \omega_1 t] + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} [C_2 \cos \omega_2 t + S_2 \sin \omega_2 t],$$

a przykładowymi warunkami początkowymi wzbudzającymi tylko czyste drgania o częstości ω_2 są np. $x(0) = z(0) = a$ z dowolnym $a \neq 0$ i $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Zmienne x i z można wyrazić przez współrzędne normalne Q_1 i Q_2 wzorem

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{pmatrix}.$$

Po wyrażeniu lagrangianu przez zmienne Q_i przyjmuje on postać sumy

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{Q}_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{Q}_2^2 - \omega_2^2 Q_2^2).$$

Masy m pozostały w wyrazach kinetycznych (nie zostały wciągnięte w definicje zmiennych Q_i), bo w charakterze iloczynu skalarnego została wzięta nie macierz T_{ij} , a macierz T_{ij}/m .

Zadanie 9.6

Z dwu końców belki o masie M i długości $2a$ mogącej swobodnie przesuwać się poziomo (w polu $\mathbf{g}$) po nieważkich rolkach zwisają dwa jednakowe sztywne, nieważkie pręty o długościach l zakończone masami m każdy. Masy te są ze sobą połączone sprężyną o współczynniku sprężystości k i długości swobodnej $2a$ (zobacz rysunek 48). Napisać ścisły lagrangian tego układu a następnie wyeliminować z niego stopnie swobody związane z ruchem układu jako całości. W otrzymanym efektywnym lagrangianie dokonać przybliżenia odpowiadającego małym drganiom dwu wahadeł. Znaleźć w tym przybliżeniu ruch układu.

Rozwiązanie:

Układ ma trzy stopnie swobody. Jako trzy uogólnione zmienne dynamiczne można przyjąć x_M (przesunięcie środka belki względem środka odległości między rolkami), φ_1 i φ_2 zdefiniowane na rysunku 17. Położenia mas m w zdefiniowanym na tymże rysunku układzie inercyjnym są następujące:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_M - a + l \sin \varphi_1, & x_2 &= x_M + a + l \sin \varphi_2, \\z_1 &= -l \cos \varphi_1, & z_2 &= -l \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

Zatem energia kinetyczna T układu to

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_M + l\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1)^2 + l^2\dot{\varphi}_1^2 \sin^2 \varphi_1] \\&\quad + \frac{1}{2}m[(\dot{x}_M + l\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \varphi_2] \\&= \frac{1}{2}(M + 2m)\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + ml\dot{x}_M(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2).\end{aligned}$$

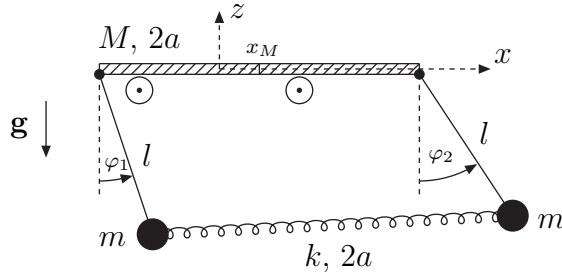
Energia potencjalna V układu składa się z sumy energii potencjalnych V_g mas m w polu siły ciężkości $\mathbf{g}$:

$$V_g = mgz_1 + mgz_2 = -mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2),$$

oraz energii potencjalnej V_k sprężyny

$$\begin{aligned}V_k &= \frac{k}{2} \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - 2a \right)^2 \\&= \frac{k}{2} \left(\sqrt{(2a + l \sin \varphi_2 - l \sin \varphi_1)^2 + (l \cos \varphi_2 - l \cos \varphi_1)^2} - 2a \right)^2.\end{aligned}$$

Pełny lagrangian $L = T - V_g - V_k$ jest więc dość skomplikowany. Nie zależy on jawnie od zmiennej x_M , wobec czego stałą ruchu jest wielkość $P = (\partial L / \partial \dot{x}_M)$ będąca oczywiście x -ową składową całkowitego pędu układu. Stałą ruchu jest też “hamiltonian” h , który jest tu całkowitą energią mechaniczną układu (mierzoną w układzie inercyjnym).



Rysunek 48: Dwa wahadła powieszono do ruchomej platformy.

Jeśli w trakcie ruchu kąty φ_1 i φ_2 oscylują wokół zera, można lagrangian przybliżyć przez wyrażenie

$$L \approx \frac{1}{2}(M + 2m)\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + ml(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\dot{x}_M - \frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{k}{2}l^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Istotnie,

$$V_k \approx \frac{k}{2} \left(\sqrt{4a^2 + 4al(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots} - 2a \right)^2 = \frac{k}{2} \left[2a \left(1 + \frac{l}{2a}(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots \right) - 2a \right]^2.$$

Aby przeanalizować małe drgania wygodnie jest wielkość zachowaną P

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = (M + 2m)\dot{x}_M + ml(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) = P,$$

wykorzystać do bezpośredniego wyeliminowania z lagrangianu zmiennej $\dot{x}_M$. Wolno tak zrobić, gdyż równanie wyrażające stałość P można przedstawić w postaci więzów holonomicznych

$$(M + 2m)x_M + ml(\varphi_1 + \varphi_2) - Pt = 0.$$

Podstawiając

$$\dot{x}_M = \frac{1}{M + 2m} [P - ml(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)],$$

do uproszczonego (‘‘skwadratyzowanego’’) lagrangianu otrzymujemy lagrangian efektywny

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{1}{2} \frac{m}{M + 2m} ml^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 - \frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{2}kl^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2,$$

wyznaczający dynamikę małych zmian zmiennych φ_1 i φ_2 . Pominięta została w nim, nie mająca wpływu na równania ruchu, stała $P^2/2(M + 2m)$ będąca energią kinetyczną ruchu postępowego całego układu. Macierz energii kinetycznej w L_{eff} jest, jak łatwo sprawdzić, dodatnio określona.

Równania ruchu otrzymane z L_{eff} mają postać ($r \equiv (M+m)/(M+2m)$, $s \equiv m/(M+2m)$, $a \equiv g/l$, $b \equiv k/m$)

$$\begin{pmatrix} r & -s \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Podstawienie $\varphi(t) = \mathbf{A}e^{i\omega t}$ prowadzi do równania charakterystycznego

$$(a+b-r\omega^2)^2 - (s\omega^2-b)^2 = 0,$$

które najlepiej jest zapisać w postaci (zamiast ślepo stosować szkolne wzory z $\Delta = b^2 - 4ac$...)

$$a+b-r\omega^2 = \pm(s\omega^2-b),$$

o pierwiastkach

$$\omega_1^2 = \frac{a}{r-s} = \frac{M}{M+2m} \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{a+2b}{r+s} = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}.$$

Odpowiednimi wektorami własnymi są wektory, na których zerują się macierze

$$\begin{pmatrix} a+b-r\omega_1^2 & s\omega_1^2-b \\ s\omega_1^2-b & a+b-r\omega_1^2 \end{pmatrix} = \frac{rb-s(a+b)}{r-s} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+b-r\omega_2^2 & s\omega_2^2-b \\ s\omega_2^2-b & a+b-r\omega_2^2 \end{pmatrix} = \frac{s(a+b)-rb}{r+s} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem po prostu

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

co zresztą można było przewidzieć patrząc na układ. Z oczekiwaniami opartymi na intuicji fizycznej zgadza się też to, że częstość ω_1 nie zależy od współczynnika k sprężyny - jeśli wychylenia obu masek są zgodne i równe, tak jak to wynika ze stosunku składowych wektora $\mathbf{A}_1$, to w trakcie ich ruchu długość sprężyny pozostaje (w liniowym przybliżeniu) stale równa $2a$ - oraz to, że częstość ω_2 nie zależy od masy M - przy przeciwnych i równych wychyleniach obu masek belka pozostaje w spoczynku.

Wektory $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ są nawzajem do siebie ortogonalne w iloczynie skalarnym zadanym przez macierz energii kinetycznej⁹⁹

$$\begin{pmatrix} r & -s \\ -s & r \end{pmatrix}.$$

⁹⁹Przypadkowo są one także ortogonalne w "szkolnym" iloczynie skalarnym.

Po unormowaniu w tymże iloczynie skalarnym zadają one współrzędne normalne Q_1 , Q_2 układu

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{M+2m}{2M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Q_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} Q_2(t).$$

Najogólniejsze rozwiązanie jest dane powyższym wzorem z $Q_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1)$ i $Q_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$, a w zmiennych Q_1 i Q_2 “skwadratyzowany” lagrangian ma postać

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{Q}_1^2 - \omega_1^2 Q_1^2) + \frac{1}{2}ml^2(\dot{Q}_2^2 - \omega_2^2 Q_2^2).$$

Znaleźć mody drgań i odpowiadające im częstości układu N jednakowych mas m mogących ślizgać się bez tarcia po prostym pręcie i połączonych jednakowymi sprężynkami o współczynnikach sprężystości κ i długościach swobodnych l (zob. rysunek 49). Odległość między ściankami, do których zamocowane są skrajne sprężyny jest równa $(N + 1)l$.

Wyrażony przez współrzędne uogólnione zdefiniowane na rysunku 49 lagrangian rozpatrywanego układu ma postać

a równania ruchu tworzą układ N równań ($\omega_0^2 = k/m$)

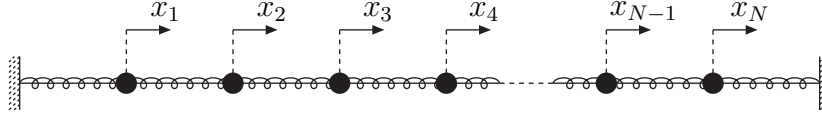
Standardowe podstawienie $x^l(t) = A^l e^{-i\omega t}$ redukuje rozwiązanie tego układu równań do problemu własnego ($\lambda \equiv \omega^2/\omega_0^2$):

Obliczenie wyznacznika tej macierzy wymiaru $N \times N$ nie jest łatwe. Jeszcze trudniejsze byłoby znalezienie N pierwiastków równania charakterystycznego, a następnie odpowiadających im wektorów własnych. Dlatego w przypadkach takich jak tu stosuje się inną metodę.

Pomijamy najpierw zależne od warunków brzegowych pierwsze i ostatnie równanie powyższego układu N jednorodnych równań na składowe wektora $\mathbf{A}$ i rozpatrujemy typowe równanie “środkowe”:

Jego rozwiązania szukamy w formie¹⁰⁰

¹⁰⁰Uwaga: A^n oznacza n -tą składową wektora $\mathbf{A}$; z kolei a^n oznacza n -tą potęgę liczby a . Ten konflikt oznaczeń bierze się z chęci porządnego oznaczania kontrawariantnych składowych wektorów.



Rysunek 49: Układ N jednakowych mas m mogących ślizgać się bez tarcia po prostym pręcie i połączonych jednakowymi sprężynkami o współczynnikach sprężystości k i długościach swobodnych l . Odległość między ściankami ograniczającymi układ z obu stron jest równa $(N + 1)l$. Pokazane są wygodne zmienne uogólnione.

Liczbę a wyznacza więc równanie kwadratowe

$$a^2 + (\lambda - 2)a + 1 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania

$$a_{\mp} = 1 - \frac{\lambda}{2} \mp i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2},$$

które wygodnie jest przedstawić w postaci $a_{\mp} = e^{\mp i\theta}$ utożsamiając $1 - \frac{1}{2}\lambda$ z $\cos \theta$. Oczywiście, tak jak każą wzory Viète'a

$$a_- + a_+ = 2 - \lambda.$$

Ogólnie więc

$$A^n = \mathbb{C}_- a_-^n + \mathbb{C}_+ a_+^n,$$

gdzie $\mathbb{C}_{\mp}$ są dwiema zespolonymi stałymi (dopiero na końcu wydzielimy część rzeczywistą zespolonego rozwiązania).

Na tym etapie są wciąż jeszcze dwie niewiadome: jedną jest λ , a drugą stosunek $\mathbb{C}_-/\mathbb{C}_+$ (ponieważ równanie własne na wektor $\mathbf{A}$ jest jednorodne, nie da się oczywiście wyznaczyć bezwzględnych wartości stałych $\mathbb{C}_{\mp}$). Do spełnienia pozostały jednak jeszcze równania skrajne, pierwsze i ostatnie:

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)A^1 - A^2 &= 0, \\ -A^{N-1} + (2 - \lambda)A^N &= 0. \end{aligned}$$

Podstawiając do nich ustaloną wyżej ogólną postać n -tej składowej wektora $\mathbf{A}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)(\mathbb{C}_- a_- + \mathbb{C}_+ a_+) - \mathbb{C}_- a_-^2 - \mathbb{C}_+ a_+^2 &= 0, \\ (2 - \lambda)(\mathbb{C}_- a_-^N + \mathbb{C}_+ a_+^N) - \mathbb{C}_- a_-^{N-1} - \mathbb{C}_+ a_+^{N-1} &= 0. \end{aligned}$$

Po skorzystaniu ze wzoru Viète'a $2 - \lambda = a_- + a_+$ pierwsze z tych dwu równań sprowadza się do

$$(\mathbb{C}_- + \mathbb{C}_+)a_- a_+ = 0,$$

i daje $\mathbb{C}_- = -\mathbb{C}_+$, a po wykorzystanie tej równości drugie można sprowadzić do

$$a_-^{N-1}[a_-(2-\lambda)-1] = a_+^{N-1}[a_+(2-\lambda)-1].$$

To zaś, po użyciu wzoru Viète'a i wykorzystaniu przedstawienia $a_{\mp} = e^{\mp i\theta}$ (iloczyn a_+a_- skasują się z jedynkami), daje warunek

$$e^{-i(N+1)\theta} = e^{+i(N+1)\theta},$$

wyznaczający dopuszczalne wartości θ , czyli (znów przez wzór Viète'a) wartości λ , tj. częstości drgań układu. Zatem dopuszczalne wartości θ tworzą zbiór dyskretny

$$\theta_a = \frac{\pi a}{N+1}, \quad a = 1, 2, \dots, N.$$

Wartość $a = 0$ trzeba pominąć, bo dawałaby $a_+ = a_- = 1$, co w połączeniu z $\mathbb{C}_- = -\mathbb{C}_+$ prowadziło by do trywialnego rozwiązania $x^i(t) \equiv 0$; wartości $a > N$ nie dają już nowych rozwiązań: $a = N+1$, tak jak $a = 0$, daje wszystkie $x^n(t)$ zerowe, $a = N+2$ jest równoważne $a = N$ itd., aż do $a = 2N+1$ równoważnego $a = 1$, gdyż

$$\begin{aligned} \pi \frac{N+2}{N+1} &= 2\pi - \pi \frac{N}{N+1}, \\ \pi \frac{2N+1}{N+1} &= 2\pi - \pi \frac{1}{N+1}; \end{aligned}$$

cosinusy wyznaczające częstości są parzyste, a sinusy wyznaczające składowe wektorów własnych zmieniają znaki na przeciwne (co nie zmienia stosunków składowych). Następnie, poczynając od $a = 2(N+2)$, cały cykl się powtarza. Zatem częstości drgań układu są dane wzorem

$$\omega_a^2 = \lambda_a \omega_0^2 = (2 - a_- - a_+) \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(2 - 2 \cos \frac{\pi a}{N+1} \right) = 4 \omega_0^2 \sin^2 \frac{\pi a}{2(N+1)}.$$

Ogólne rozwiązanie równań ruchu układu N mas przedstawionego na rysunku 49 jest dane przez ($\mathbb{C}_+ = -\mathbb{C}_- \equiv \mathbb{C}$)

$$x^n(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{a=1}^N \mathbb{C}_a (e^{in\theta_a} - e^{-in\theta_a}) e^{-i\omega_a t} \right\}.$$

N dowolnych zespolonych stałych $\mathbb{C}_a$ daje konieczne do spełnienia warunków początkowych $2N$ rzeczywistych stałych dowolnych. Rozwiązanie to można przedstawić na dwa równoważne sposoby:

a) Niech $\mathbb{C}_a = (C_a/2i) e^{i\varphi_a}$, gdzie $C_a > 0$ oraz φ_a są stałymi rzeczywistymi. Wtedy

$$x^n(t) = \sum_{a=1}^N C_a \sin \left(\frac{\pi a}{N+1} n \right) \cos(\omega_a t + \varphi_a),$$

jest superpozycją fal stojących.

b) Niech $\mathbb{C}_a = C_a e^{i\varphi_a}$ z rzeczywistymi $C_a > 0$. Wtedy

$$x^n(t) = \sum_{a=1}^N C_a [\cos(\theta_a n - \omega_a t + \varphi_a) - \cos(\theta_a n + \omega_a t - \varphi_a)],$$

jest superpozycją fal biegnących w lewo i w prawo z ustalonymi względnymi amplitudami (co właśnie oznacza, że te fale biegnące składają się w fale stojące). Interpretację “falową” można uściślić definiując $x = nl$ jako położenie równowagi (na poziomej osi) n -tej masy, a $k_a = \theta_a/l$ jako (jednowymiarowy) wektor falowy. Czynniki $\sin(\theta_a n)$ i $\cos(\theta_a n \mp \omega_a t + \varphi_a)$ przybiorą wtedy postać $\sin(k_a x)$ oraz $\cos(k_a x \mp \omega_a t + \varphi_a)$. Długością fali danego modu drgań jest wtedy $\lambda_a = 2\pi/k_a = 2\pi l/\theta_a$. Gdy $N \gg 1$ najdłuższe fale (podłużne) mają długość $\lambda_1 = 2l(N+1)$, a najkrótsze $\lambda_N = 2l(N+1)/N \approx 2l$. Są to oczywiście odpowiednio fale, w których wszystkie masy przesuwają się zgodnie w tym samym kierunku i fale, w których sąsiednie masy przesuwają się w kierunkach dokładnie przeciwnych. W języku kwantowej teorii pola można to ująć stwierdzeniem, że skończone rozmiary układu stanowią obcięcie w podczerwieni, a jego dyskretny charakter zapewnia obcięcie w ultrafioletowe.

W a -tym modzie drgań stosunki wychyleń poszczególnych mas są ustalone przez stosunki odpowiadających im składowych wektora $\mathbf{A}_{(a)}$, który ma postać

$$\mathbf{A}_{(a)} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi a}{N+1} \\ \sin \frac{2\pi a}{N+1} \\ \sin \frac{3\pi a}{N+1} \\ \dots \\ \sin \frac{N\pi a}{N+1} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ macierz energii kinetycznej rozpatrywanego tu układu mas jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej, wektory $\mathbf{A}_{(a)}$ i $\mathbf{A}_{(b)}$ są, gdy $a \neq b$, wzajemnie ortogonalne w zwykłym iloczynie skalarnym. Sprawdzenie tego jest prostym ćwiczeniem z trygonometrii, sumowania szeregów geometrycznych i manipulowania liczbami zespolonymi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(a)} \cdot \mathbf{A}_{(b)} &= \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi a}{N+1} n\right) \sin\left(\frac{\pi b}{N+1} n\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[\cos\left(\frac{\pi(a-b)}{N+1} n\right) - \cos\left(\frac{\pi(a+b)}{N+1} n\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ e^{i\frac{\pi(a-b)}{N+1}} \frac{1 - e^{i\frac{\pi(a-b)N}{N+1}}}{1 - e^{i\frac{\pi(a-b)}{N+1}}} + \text{c.c.} - [(a-b) \rightarrow (a+b)] \right\}. \end{aligned}$$

c.c. oznacza tu wyrażenie sprzężone do poprzedniego.¹⁰¹ Następnie eksponens w liczniku

¹⁰¹Skorzystaliśmy tu ze znanego wzoru

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \beta - \cos \alpha),$$

ułamka przepisujemy w postaci

$$e^{i\frac{\pi(a-b)N}{N+1}} = e^{i\frac{\pi(a-b)(N+1-1)}{N+1}} = e^{i\pi(a-b)} e^{-i\frac{\pi(a-b)}{N+1}},$$

i “wpuszczamy” eksponens stojący na przedzie na kreskę ułamka, co daje

$$\mathbf{A}_{(a)} \cdot \mathbf{A}_{(b)} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi(a-b)}{N+1}} - e^{i\pi(a-b)}}{1 - e^{i\frac{\pi(a-b)}{N+1}}} + \text{c.c.} - [(a-b) \rightarrow (a+b)] \right\}.$$

Należy teraz odróżnić dwa przypadki. Jeśli $a-b$ (a więc także $a+b$) jest liczbą parzystą, to $e^{i\pi(a-b)} = e^{i\pi(a+b)} = 1$ i w nawiasie kręconym dostajemy $\{-1 - 1 - [-1 - 1]\} = 0$. Jeśli $a-b$ (i $a+b$) jest liczbą nieparzystą, to $e^{i\pi(a-b)} = e^{i\pi(a+b)} = -1$ i wtedy, pisząc α w miejsce $\pi(a \mp b)/(N+1)$, mamy

$$\frac{e^{i\alpha} + 1}{1 - e^{i\alpha}} + \text{c.c.} = -2 + \frac{2}{1 - e^{i\alpha}} + \frac{2}{1 - e^{-i\alpha}} = -2 + 2 \frac{1 - e^{-i\alpha} + 1 - e^{i\alpha}}{(1 - e^{i\alpha})(1 - e^{-i\alpha})} = 0.$$

Z rachunku tego można też w zasadzie wyznaczyć normalizację wektorów $\mathbf{A}_{(a)}$, czyli $|\mathbf{A}_{(a)}|^2$, ale ponieważ dla $b = a$ występuje tu wyrażenia typu $0/0$, łatwiej obliczyć od początku:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_{(a)}|^2 &= \sum_{n=1}^N \sin^2 \left(\frac{\pi a}{N+1} n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi a}{N+1} n \right) \right] \\ &= \frac{N}{2} - \frac{1}{4} \left[e^{i\frac{2\pi a}{N+1}} \frac{1 - e^{i\frac{2\pi a}{N+1}N}}{1 - e^{i\frac{2\pi a}{N+1}}} + \text{c.c.} \right]. \end{aligned}$$

Po zrobieniu tej samej sztuczki, co poprzednio: $e^{i\frac{2\pi a}{N+1}N} = e^{i2\pi a} e^{-i\frac{2\pi a}{N+1}}$ i zauważeniu, że $e^{i2\pi a} = 1$ znajdujemy, że

$$|\mathbf{A}_{(a)}|^2 = \frac{N+1}{2}.$$

Zadanie to można też rozwiązać nieco prostszym sposobem, który jest użyteczniejszy przy bardziej skomplikowanych układach tego typu, postulując od razu rozwiązanie “średkowego” równania ruchu

$$\ddot{x}^n + \omega_0^2 (2x^n - x^{n-1} - x^{n+1}) = 0,$$

oraz ze wzoru na sumę (od $k = 1$, nie od zera!)

$$\sum_{k=1}^N q^k = q \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

w postaci fali stojącej $x^n(t) = e^{-i\omega t} e^{\pm i\theta n}$. Wypisane równanie daje wtedy od razu “związek dyspersyjny”

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2 \cos \theta) = 4 \omega_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

Ruch n -tej masy jest wtedy dany wzorem

$$x^n(t) = e^{-i\omega t} (\mathbb{C}_+ e^{in\theta} + \mathbb{C}_- e^{-in\theta}),$$

z dowolnymi (zespolonymi) stałymi $\mathbb{C}_\pm$. Warunek, by masa o numerze $n = 0$ (której niema) pozostawała nieruchoma daje związek $\mathbb{C}_- = \mathbb{C}_+$, a warunek by nieruchoma pozostawała (również nieistniejąca) masa o numerze $N + 1$ wyznacza (te same, co poprzednio) dopuszczalne dyskretne wartości “wektora falowego” θ . Reszta rachunków przebiega tak samo jak poprzednio.

Zadanie 9.12

Wyznaczyć częstości drgań podłużnych układu $2N$ jednakowych mas m mogących ślizgać się bez tarcia po poziomym pręcie i połączonych ze sobą i z odległymi jedna od drugiej o $(2N + 1)l$ ściankami sprężynkami o długościach swobodnych l i współczynnikach sprężystości naprzemian k_A i k_B . Wykazać, że otrzymane wzory na częstości drgań i wychylenia mas z położeń równowagi przechodzą w granicy $k_A = k_B = k$ w te otrzymane w zadaniu 9.10.

Rozwiązanie:

Przy odrobinie wprawy równania ruchu $2n$ -tej i $2n + 1$ -szej masy w zmiennych zdefiniowanych na rysunku 50 można napisać “od ręki”, bez wypisywania już lagrangianu:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{2n} + \omega_A^2 (x^{2n} - x^{2n-1}) + \omega_B^2 (x^{2n} - x^{2n+1}) &= 0, \\ \ddot{x}^{2n+1} + \omega_B^2 (x^{2n+1} - x^{2n}) + \omega_A^2 (x^{2n+1} - x^{2n+2}) &= 0.\end{aligned}$$

Równania mas pierwszej i $2N$ -tej są inne, ale jeśli przyjąć, że istnieją fikcyjne masy zerowa i $2N + 1$ -a, to wypisane równania będą słuszne dla wszystkich mas; warunek, że masy zerowa i $2N + 1$ -a nie przemieszczają się zostanie narzucony na końcu i posłuży do wyznaczenia częstości drgań układu. Takie podejście pozwoli też rozpatrzeć i inne możliwe warunki brzegowe.

Ponieważ można oczekiwać, że mody drgań układu będą miały charakter (podłużnych) fal stojących, rozwiązania wypisanych równań poszukujemy w postaci (amplitudy $\mathbb{A}_\pm$, $\mathbb{B}_\pm$ mogą być zespolone)

$$\begin{aligned}x^{2n}(t) &= \mathbb{A}_\pm e^{\pm i 2n\theta} e^{-i\omega t}, \\ x^{2n+1}(t) &= \mathbb{B}_\pm e^{\pm i (2n+1)\theta} e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

Ponieważ wychylenia mas o numerach parzystych i nieparzystych mogą się różnić, dopuszczamy różne ich amplitudy. Podstawienie tych wzorów do wypisanych wyżej równań różniczkowych sprowadza je do równań algebraicznych:

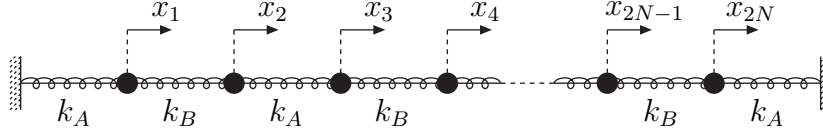
$$\begin{aligned}-\omega^2 \mathbb{A}_\pm + \omega_B^2 (\mathbb{A}_\pm - \mathbb{B}_\pm e^{\mp i\theta}) + \omega_A^2 (\mathbb{A}_\pm - \mathbb{B}_\pm e^{\pm i\theta}) &= 0, \\ -\omega^2 \mathbb{B}_\pm + \omega_A^2 (\mathbb{B}_\pm - \mathbb{A}_\pm e^{\mp i\theta}) + \omega_B^2 (\mathbb{B}_\pm - \mathbb{A}_\pm e^{\pm i\theta}) &= 0.\end{aligned}$$

Równania te wygodniej jest przepisać w formie macierzowej (jako tzw. równanie “wiekowe” - ang. *secular equation*)

$$\begin{pmatrix} \omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega^2 & -\omega_B^2 e^{\mp i\theta} - \omega_A^2 e^{\pm i\theta} \\ -\omega_A^2 e^{\mp i\theta} - \omega_B^2 e^{\pm i\theta} & \omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_\pm \\ \mathbb{B}_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Widać wtedy, że warunkiem istnienia niezerowych amplitud $\mathbb{A}_\pm$ i $\mathbb{B}_\pm$ jest znikanie wyznacznika wypisanej macierzy. Warunek ten mający postać

$$\begin{aligned}(\omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega^2)^2 &= (-\omega_B^2 e^{\mp i\theta} - \omega_A^2 e^{\pm i\theta})(-\omega_A^2 e^{\mp i\theta} - \omega_B^2 e^{\pm i\theta}) \\ &\equiv \omega_A^4 + \omega_B^4 + \omega_A^2 \omega_B^2 (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}),\end{aligned}$$



Rysunek 50: Układ $2N$ jednakowych mas m mogących ślizgać się bez tarcia po prostym pręcie i połączonych naprzemiennie sprężynkami o współczynnikach sprężystości k_A i k_B . Długości swobodne wszystkich sprężyn są równe l . Odległość między ściankami ograniczającymi układ z obu stron jest równa $(2N + 1)l$. Pokazane są wygodne zmienne uogólnione.

wyznacza związek dyspersyjny, tzn. zależność częstości modów drgań układu od “liczby falowej” θ :

$$\omega^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2 \mp \sqrt{(\omega_A^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_A^2\omega_B^2 \cos^2 \theta}.$$

Związek ten ma tu, jak widać, dwie gałęzie odpowiadające dwóm znakom przed pierwiastkiem. Widać też, że gdy “liczba falowa” θ dąży do zera, tj. w granicy fal długich, częstości ω gałęzi odpowiadającej znakowi $-$ też dążą do zera, ale częstości drugiej gałęzi dążą do wartości niezerowej. Mody drgań o częstościach tworzących pierwszą z tych gałęzi są zwane drganiami “akustycznymi”, a te drugie “optycznymi”.

Należy teraz zapewnić spełnianie przez zapostulowane rozwiązania

$$\begin{aligned} x^{2n}(t) &= (\mathbb{A}_+ e^{i2n\theta} + \mathbb{A}_- e^{-i2n\theta}) e^{-i\omega t}, \\ x^{2n+1}(t) &= (\mathbb{B}_+ e^{i(2n+1)\theta} + \mathbb{B}_- e^{-i(2n+1)\theta}) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

warunków brzegowych. Jeśli pierwsza masa jest połączona sprężynką ze ścianką, co jest równoważne żądaniu, by $x^0(t) \equiv 0$, należy położyć $\mathbb{A}_- = -\mathbb{A}_+$. Zatem

$$x^{2n}(t) = e^{-i\omega t} 2i \mathbb{A}_+ \sin(2n\theta),$$

a amplitudy $\mathbb{B}_\pm$ są, przy zadanych częstościach ω , wyznaczone przez równania wiekowe. Wybierając dolne (górne jest odeń liniowo zależne, gdy ω spełnia związek dyspersyjny) otrzymujemy

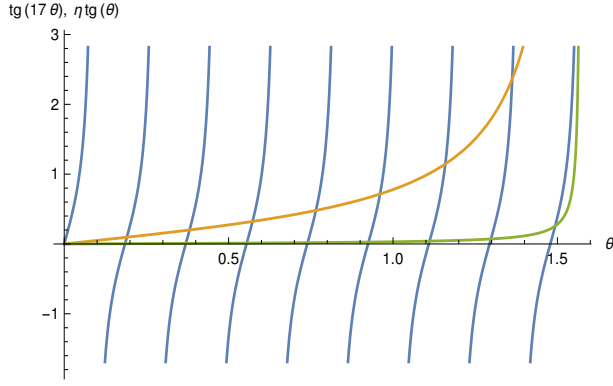
$$\mathbb{B}_\pm = \frac{\omega_A^2 e^{\mp i\theta} + \omega_B^2 e^{\pm i\theta}}{\omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega^2} \mathbb{A}_\pm.$$

Zatem

$$x^{2n+1} = \frac{\mathbb{A}_+}{\omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega^2} [(\omega_A^2 e^{-i\theta} + \omega_B^2 e^{i\theta}) e^{i(2n+1)\theta} - (\omega_A^2 e^{i\theta} + \omega_B^2 e^{-i\theta}) e^{-i(2n+1)\theta}] e^{-i\omega t},$$

albo, po uporządkowaniu,

$$x^{2n+1} = \frac{2i\mathbb{A}_+}{\omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega^2} [\omega_A^2 \sin(2n\theta) + \omega_B^2 \sin(2(n+1)\theta)] e^{-i\omega t}.$$



Rysunek 51: Graficzne rozwiązywanie warunku wyznaczającego “wektory falowe” θ układu $2N = 16$ mas z rysunku 50 z naprzemiennie rozmieszczonymi sprężynkami o dwu różnych stałych sprężystości. Przyjęto iż $\eta \equiv (\omega_A^2 - \omega_B^2)/(\omega_A^2 + \omega_B^2) = 0.5$ (krzywa czerwona) i $\eta = 0.02$ (krzywa zielona). Możliwe wartości θ są odciętymi punktów przecięcia krzywych niebieskich ($\text{tg}[17\theta]$) z krzywą czerwoną i zieloną ($\eta \text{tg}\theta$).

Jeśli mas jest $2N$ (ostatnia sprężynka ma współczynnik sprężystości k_A) i ostatnia z nich jest połączona sprężynką ze ścianką, należy zażądać, by $x^{2N+1}(t) \equiv 0$. Wykorzystując wypisaną wyżej ogólną postać $x^{2n+1}(t)$ znajdujemy, iż warunek ten będzie spełniony, gdy

$$\omega_A^2 \sin(2N\theta) = -\omega_B^2 \sin(2(N+1)\theta).$$

Warunek ten można zapisać w bardziej czytelnej postaci, jeśli napisać najpierw $\sin(2N\theta) = \sin[(2N+1)\theta - \theta]$ i $\sin[2(N+1)\theta] = \sin[(2N+1)\theta + \theta]$ i skorzystać z tożsamości $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$. Po prostych przekształceniach można sprowadzić warunek do postaci

$$\text{tg}[(2N+1)\theta] = \frac{\omega_A^2 - \omega_B^2}{\omega_A^2 + \omega_B^2} \text{tg}\theta.$$

Wyznacza on możliwe wartości “liczby falowej” θ . Powinno być ich dokładnie N : układ $2N$ mas musi mieć $2N$ (ogólnie rzecz biorąc, niekoniecznie różnych, ale tu degeneracja nie wystąpi) częstości, a związek dyspersyjny ma tu dwie gałęzie. Graficzny sposób wyznaczania wartości θ jest pokazany na rysunku 51.

Jak widać z rysunku 51, gdy czynnik $\eta \equiv (\omega_A^2 - \omega_B^2)/(\omega_A^2 + \omega_B^2)$, $-1 \leq \eta \leq 1$ jest dodatni i niezbyt bliski zeru, oczywistych rozwiązań, czyli możliwych wartości “wektora falowego” θ jest przedziale $0 < \theta < \pi/2$ o jedno za mało (na rysunku 51 przecięć krzywej czerwonej z niebieską jest 7 zamiast 8). Jest tu jakiś problem wyboru jeszcze jednego rozwiązania. Gdy czynnik η jest bliski zeru lub ujemny problem znika - rozwiązań jest przedziale $0 < \theta < \pi/2$ tyle ile być powinno.

Gdy $\omega_A = \omega_B$, rozwiązanie rozpatrywanego tu problemu powinno się sprowadzać do rozwiązania zadania 9.10, w którym należy zamienić N na $2N$. Po takiej zamianie, “liczby falowe” tam znalezione są równe $\theta_a = \pi a/(2N+1)$ z $a = 1, \dots, 2N$, a częstości są dane

wzorem

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[2 - 2 \cos \left(\frac{\pi a}{2N+1} \right) \right].$$

Należy jednak zauważyć, że $\cos(\pi a/(2N+1))$ jest dla $a = 1, \dots, N$ dodatni, a dla $a = N+1, \dots, 2N$ ujemny i, co więcej,

$$\cos \left(\frac{\pi(2N+1-a)}{2N+1} \right) = -\cos \left(\frac{\pi a}{2N+1} \right),$$

co oznacza, że z punktu widzenia częstości można by a ograniczyć do $a = 1, \dots, N$ i uwzględnić dwa znaki przed funkcją cosinus. Jest to dokładnie to, co dają w granicy $\omega_A^2 = \omega_B^2 = \omega_0^2$ dwie gałęzie związku dyspersyjnego układu z naprzemiennymi sprężynkami (można pokazać, że niezależnie od liczby N , dla dostatecznie bliskich sobie wartości ω_A^2 i ω_B^2 warunek $\text{tg}[(2N+1)\theta] = \eta \text{tg}\theta$ ma zawsze N rozwiązań w przedziale $0 < \theta_a < \pi/2$). Ponadto, wzór na x_{2n} jest formalnie taki sam, jak otrzymany w zadaniu 9.10 (różnica polegająca na innych zakresach θ_a zostanie wyjaśniona niżej), a otrzymany tu wzór na x_{2n+1} w granicy $\omega_A^2 = \omega_B^2 = \omega_0^2$ przechodzi we wzór na x_{2n+1} z zadania 9.10: aby to zobaczyć, trzeba skorzystać z tożsamości trygonometrycznej

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

by napisać

$$\omega_A^2 \sin(2n\theta) + \omega_B^2 \sin(2(n+1)\theta) \rightarrow 2\omega_0^2 \cos \theta_a \sin[(2n+1)\theta_a].$$

Ponieważ w tej granicy mianownik $\omega_A^2 + \omega_B^2 - \omega_a^2$ przechodzi w $\pm 2\omega_0^2 \cos \theta_a$ (gdy $0 < \theta_a < \pi/2$, cosinus jest dodatni) otrzymujemy $x_{2n+1} \propto \pm \sin[(2n+1)\theta_a]$. Aby zobaczyć, że jest to to samo, co w zadaniu 9.10 trzeba uwzględnić jeszcze to, że tam $a = 1, \dots, 2N$, a tu $a = 1, \dots, 2$. Jednakże

$$\sin \left(\pi \frac{2N+1-a}{2N+1} (2n+1) \right) = -\sin \left(\pi \frac{a}{2N+1} (2n+1) \right),$$

czyli, innymi słowy, wartości sinusów dla $a = 2N, \dots, N+1$ są dokładnie przeciwne odpowiednim ich wartościom dla $a = 1, \dots, N$. Jest też jasne, że

$$\sin \left(\pi \frac{2N+1-a}{2N+1} 2n \right) = \sin \left(\pi \frac{a}{2N+1} 2n \right).$$

Tak więc rzeczywiście w granicy otrzymane tu wzory przechodzą w te z zadania 9.10.

Zadanie 9.14

Posługując się metodą eliminacji translacyjnych i rotacyjnych stopni swobody znaleźć mody własne drgań i odpowiadające im częstości cząsteczki zbudowanej z trzech identycznych atomów tworzących w położeniu równowagi (w stanie niewzbudzonym, mówiąc językiem mechaniki kwantowej) trójkąt równoboczny o bokach długości l . Atomy traktujemy tu jak punktowe masy m , a siły je wiążące (których prawdziwym źródłem są oddziaływania elektromagnetyczne) jak zwykłe sprężynki o długościach swobodnych l i współczynnikach sprężystości κ .

Rozwiązanie:

Układ trzech mas ma łącznie 9 stopni swobody. Z tego trzy odpowiadają modom translacyjnym (przesunięcia cząsteczki jako całości), a trzy następne modom rotacyjnym. Tylko trzy stopnie swobody odpowiadają zatem modom oscylacyjnym. Aby nie rozpatrywać skomplikowanego problemu z dziewięcioma zmiennymi należy tu zastosować metodę eliminacji zbędnych stopni swobody poprzez narzucenie odpowiednich więzów.

Przyjmijmy inercjalny układ odniesienia taki, jak pokazany na rysunku 52, w którym w chwili początkowej trzy atomy (trzy masy m) znajdują się każdy na innej osi układu. Ich położenia w dowolnej chwili t czasu można wtedy przedstawić wektorami

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} l/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{u}_1(t) \equiv \mathbf{r}_{10} + \mathbf{u}_1(t),$$

$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{u}_2(t)$ oraz $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_{30} + \mathbf{u}_3(t)$. Energia kinetyczna T jest więc równa

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) = \frac{1}{2} m \sum_{a=1,2,3} \sum_{i=x,y,z} (\dot{u}_a^i)^2.$$

Energia potencjalna jest sumą energii potencjalnych trzech wiązań, czyli - w przyjętym modelu - sumą energii trzech sprężynek.

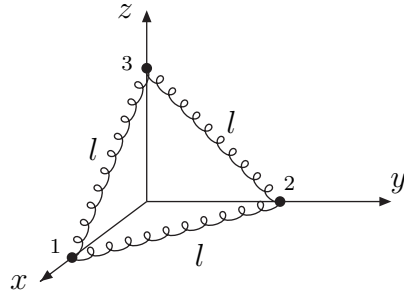
$$V = V_{12} + V_{13} + V_{23}.$$

Np.

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{\kappa}{2} (|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - l)^2 \\ &= \frac{\kappa}{2} \left(\sqrt{(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20})^2 + 2(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2} - l \right)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20})^2 = l^2$, wyrażenie w nawiasie pod kwadratem można przepisać w postaci

$$\sqrt{\dots} - l = l \sqrt{1 + 2\mathbf{e}_{12} \cdot \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)}{l} + \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2}{l^2}} - l \approx \mathbf{e}_{12} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2),$$



Rysunek 52: Cząsteczka zbudowana z trzech identycznych atomów. Definicja inercjalnego układu odniesienia.

w której $\mathbf{e}_{12} = (\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20})/|\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}| = (\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20})/l$ jest wektorem jednostkowym skierowanym od masy drugiej do pierwszej. Jawnie

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

W przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi lagrangian ma zatem postać

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) - \frac{\kappa}{2} ([\mathbf{e}_{12} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)]^2 + [\mathbf{e}_{13} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3)]^2 + [\mathbf{e}_{23} \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)]^2).$$

Aby wyeliminować stopnie swobody odpowiadające modom translacyjnym i rotacyjnym narzucamy na wektory $\mathbf{u}_i$ odchylenia z położenia równowagi warunki

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_{10} \times \mathbf{u}_1 + \mathbf{r}_{20} \times \mathbf{u}_2 + \mathbf{r}_{30} \times \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Warunki te stanowią układ sześciu jednorodnych równań liniowych na dziewięć niewiadomych (dziewięć kartezjańskich składowych wektorów $\mathbf{u}_i$ zdefiniowanych we wprowadzonym na rysunku 52 inercjalnym układzie odniesienia) i pozwalają wyrazić przez wybrane trzy zmienne sześć pozostałych. Jako trzy niezależne zmienne wybierzemy $q_1 \equiv u_1^x$, $q_2 \equiv u_2^y$ i $q_3 \equiv u_3^z$, tj. przemieszczenia każdego z atomów wzdłuż “jego” osi. W składowych powyższe warunki to:

$$\begin{aligned} q_1 + u_2^x + u_3^x &= 0, & u_2^z - u_3^y &= 0, \\ u_1^y + q_2 + u_3^y &= 0, & u_3^x - u_1^z &= 0, \\ u_1^z + u_2^z + q_3 &= 0, & u_1^y - u_2^x &= 0. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu z układu trzech wypisanych po lewej stronie równań zmiennych u_3^x , u_1^y i u_2^z z pomocą związków podanych po prawej stronie przyjmuje on postać

$$\begin{aligned} u_2^x + u_1^z &= -q_1, \\ u_2^x + u_3^y &= -q_2, \\ u_1^z + u_3^y &= -q_3. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jego są

$$\begin{aligned}u_2^x &= u_1^y = \frac{1}{2}(q_3 - q_1 - q_2), \\u_3^y &= u_2^z = \frac{1}{2}(q_1 - q_2 - q_3), \\u_1^z &= u_3^x = \frac{1}{2}(q_2 - q_1 - q_3).\end{aligned}$$

Należy teraz wyrazić energię kinetyczną i potencjalną przez zmienne q_1 , q_2 i q_3 .

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_1^2 &= \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_3 - \dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2, \\ \dot{\mathbf{u}}_2^2 &= \frac{1}{4}(\dot{q}_3 - \dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \dot{q}_2^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2, \\ \dot{\mathbf{u}}_3^2 &= \frac{1}{4}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2 + \dot{q}_3^2,\end{aligned}$$

a zatem, jak łatwo obliczyć,

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{5}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \dot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_2\dot{q}_3 - \dot{q}_3\dot{q}_1 \right).$$

Aby wyrazić przez zmienne q_1 , q_2 i q_3 energię potencjalną rozpisujemy jawnie iloczyny skalarne:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{12} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1^x - u_2^x - u_1^y + u_2^y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_1 - 2 \times \frac{1}{2}(q_3 - q_1 - q_2) + q_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2q_1 + 2q_2 - q_3).\end{aligned}$$

Wykorzystując symetrię wybranych zmiennych nietrudno się zorientować, że

$$\begin{aligned}V &= \frac{\kappa}{2} \frac{1}{2} [(2q_1 + 2q_2 - q_3)^2 + (2q_2 + 2q_3 - q_1)^2 + (2q_3 + 2q_1 - q_2)^2] \\ &= \frac{\kappa}{2} \frac{9}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2).\end{aligned}$$

Równania ruchu zatem, to

$$m \left(\frac{5}{2} \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} \ddot{q}_2 - \frac{1}{2} \ddot{q}_3 \right) + \kappa \frac{9}{2} q_1 = 0,$$

etc., lub w postaci macierzowej ($\omega_0^2 \equiv 9\kappa/m$)

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Postępując standardowo, podstawiamy¹⁰²

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} e^{-i\omega t},$$

i otrzymujemy problem własny ($\lambda \equiv \omega^2/\omega_0^2$)

$$\begin{pmatrix} 1-5\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1-5\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1-5\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Równanie charakterystyczne, po uporządkowaniu ma postać

$$-108\lambda^3 + 72\lambda^2 - 15\lambda + 1 \equiv -4(3\lambda)^3 + 8(3\lambda)^2 - 5(3\lambda) + 1 = 0.$$

Aby je łatwo rozwiązać, zauważamy na podstawie symetrii układu, iż jednym z wektorów własnych powinien być wektor

$$\mathbf{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

któremu, jak łatwo zobaczyć działając nań wypisaną wyżej macierzą, odpowiada wartość $\lambda = \frac{1}{3}$. Dzieląc wielomian $4\xi^3 - 8\xi^2 + 5\xi - 1$ ($\xi \equiv 3\lambda$) przez $\xi - 1$ otrzymujemy równanie

$$4\xi^2 - 4\xi + 1 = (2\xi - 1)^2 = 0.$$

Zatem równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek $\lambda = \frac{1}{3}$ i podwójny pierwiastek $\lambda = \frac{1}{6}$, czyli częstościami drgań rozpatrywanej cząsteczki są

$$\omega_1^2 = \frac{1}{3} \frac{9k}{m} = \frac{3k}{m}, \quad \omega_{2,3}^2 = \frac{1}{6} \frac{9k}{m} = \frac{3k}{2m}.$$

Jako dwa wektory $\mathbf{A}_{(2)}$ i $\mathbf{A}_{(3)}$ można wybrać na przykład

$$\mathbf{A}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że wektory $\mathbf{A}_{(1)}$ i $\mathbf{A}_{(2)}$ oraz $\mathbf{A}_{(1)}$ i $\mathbf{A}_{(3)}$ są parami ortogonalne w iloczynie skalarnym zadawanym przez macierz energii kinetycznej

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

¹⁰²Należy pamiętać, że utworzony tu wektor $\mathbf{q}$ nie jest wektorem w kartezjańskim układzie inercyjnym z rysunku 52, lecz wektorem w abstrakcyjnej przestrzeni $\mathbb{R}_3$ (w “theory space” - jak powiedzieliby spece od dekonstrukcji i dynamicznej generacji dodatkowych wymiarów czasoprzestrzeni; niema to jak wymyślić mądrze brzmiąca nazwę!).

Wektory $\mathbf{A}_{(2)}$ i $\mathbf{A}_{(3)}$ odpowiadające tej samej wartości własnej nie są do siebie ortogonalne - trzeba by je dopiero zortogonalizować. Ponieważ nie będziemy się tu zajmować współrzędnymi normalnymi, nie będziemy tu tego robić.

Mając wektory $\mathbf{A}_{(a)}$, $a = 1, 2, 3$ modów własnych drgań układu w “theory space” i wyrażając jawnie wektory $\mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$ przemieszczeń atomów w fizycznej przestrzeni przez zmienne q_i

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{1}{2}(q_3 - q_1 - q_2) \\ \frac{1}{2}(q_2 - q_1 - q_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_3 - q_1 - q_2) \\ q_2 \\ \frac{1}{2}(q_1 - q_2 - q_3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_2 - q_1 - q_3) \\ \frac{1}{2}(q_1 - q_2 - q_3) \\ q_3 \end{pmatrix},$$

można także podać, jak wyglądają te trzy mody drgań w fizycznej przestrzeni. I tak, w modzie drgań o częstości ω_1 odpowiadającym wektorowi $\mathbf{A}_{(1)}$

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} Q_1(t), \quad \mathbf{u}_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} Q_1(t), \quad \mathbf{u}_3(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} Q_1(t),$$

gdzie $Q_1(t) = C_1 \cos \omega_1 t + S_1 \sin \omega_1 t$, w modzie drgań o częstości ω_2 odpowiadającym wektorowi $\mathbf{A}_{(2)}$

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} Q_2(t), \quad \mathbf{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} Q_2(t), \quad \mathbf{u}_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} Q_2(t),$$

gdzie $Q_2(t) = C_2 \cos \omega_2 t + S_2 \sin \omega_2 t$, a w modzie drgań o częstości ω_3 odpowiadającym wektorowi $\mathbf{A}_{(3)}$

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} Q_3(t), \quad \mathbf{u}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} Q_3(t), \quad \mathbf{u}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} Q_3(t),$$

gdzie $Q_3(t) = C_3 \cos \omega_3 t + S_3 \sin \omega_3 t$. Oczywiście w każdym z modów, jak łatwo sprawdzić, $\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{u}_3(t) = \mathbf{0}$ oraz (co już zobaczyć jest trudniej) $\mathbf{r}_{10} \times \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{r}_{20} \times \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{r}_{30} \times \mathbf{u}_3(t) = \mathbf{0}$.

Przypomnienie

Moment pędu $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ masy m poruszającej się pod działaniem (wypadkowej) siły $\mathbf{F}$ jest stały ($d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$), gdy znika moment $\mathbf{D}$ działającej nań (wypadkowej) siły,¹⁰³ tj. gdy

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Jest tak zawsze (choć nie jest to jedyna możliwość) w przypadku zachowawczej (potencjalnej) siły centralnej

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\mathbf{e}_r V'(r).$$

Jeśli moment pędu jest stały podczas ruchu, stała jest również tzw. prędkość połowa $|\mathbf{L}|/2m$: wielkość

$$\frac{|\mathbf{L}|}{2m} dt = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|,$$

jest bowiem połową pola infinytezymalnego równoległoboku rozpiętego przez wektor wodzący $\mathbf{r}$ i jego zmianę $d\mathbf{r}$ w infinytezymalnym odcinku czasu dt , czyli polem trójkąta tworzonego przez wektory $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ i $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$.

Stałość wektora $\mathbf{L}$ podczas ruchu w polu zachowawczej siły centralnej oznacza, że wyróżniona jest pewna płaszczyzna prostopadła do $\mathbf{L}$: jest to ta płaszczyzna, w której zachodzi ruch. Umożliwia to rozpatrywanie go we współrzędnych biegunowych (r, φ) na tej płaszczyźnie (tj. zredukowanie zagadnienia znalezienia ruchu do problemu dwuwymiarowego). Możliwe są dwie metody rozwiązywania takiego zagadnienia.

Metoda 1. Wykorzystanie samej tylko stałości w czasie składowej $L^z \equiv L$ momentu pędu. W równaniu Newtona $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(r)$ rozpisany na składowe we współrzędnych biegunowych

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r(r) = -V'(r), \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= 0, \end{aligned}$$

drugie z równań wyraża właśnie stałość L : po pomnożeniu stronami przez r , jest ono równoważne równości $d(mr^2\dot{\varphi})/dt \equiv dL/dt = 0$. Zatem,

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}.$$

Umożliwia to przekształcenie pierwszego z równań Newtona w równanie wyznaczające tor, czyli zależność $r = r(\varphi)$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r},$$

¹⁰³Ponieważ mamy na myśli masę punktową, moment wypadkowej siły jest tym samym, co wypadkowy moment sił.

i stąd

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right) = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r}.$$

Po wyrażeniu $\ddot{r}$ w ten sposób i wyeliminowaniu $\dot{\varphi}$ z pomocą L , pierwsze z równań Newtona staje się *wzorem Bineta*

$$-\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} \right] = F_r(r).$$

Jeśli znany jest tor ruchu, czyli zależność $r = r(\varphi)$, wzór ten pozwala znaleźć siłę F_r wzdłuż trajektorii. W ogólności, gdy siła F_r zależy¹⁰⁴ i od r i od φ , tylko zależność $F_r(r(\varphi), \varphi)$; jeśli jednak wiadomo, że siła jest tylko funkcją odległości, wzór Bineta pozwala znaleźć $F_r(r)$. Jeśli zaś zależność $F_r(r)$ jest znana, wzór Bineta jest zwyczajnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu wyznaczającym tor.

W przypadku siły $F_r(r) = -\kappa/r^2$ wzór Bineta

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\kappa m}{L^2},$$

zapisany w zmiennej $u = 1/r$ daje się łatwo scałkować (potraktowany jak równanie różniczkowe na tor jest formalnie identyczny z równaniem oscylatora harmonicznego poddanego działaniu stałej siły) i daje

$$r(\varphi) = \frac{L^2/\kappa m}{1 + A \cos(\varphi + \delta)} = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos(\varphi + \delta)},$$

gdzie $p \equiv L^2/|\kappa|m$. Jest to równanie krzywej stożkowej tj. krzywej będącej przecięciem stożka i płaszczyzny. W zależności od wartości parametru ε (który można przyjąć za nieujemny - jego znak można wciągnąć w fazę δ) oraz znaku $\pm$ (czyli, geometrycznie, od nachylenia płaszczyzny względem osi stożka) jest to albo elipsa (w szczególnym przypadku redukująca się do okręgu) albo hiperbola albo parabola będąca formą przejściową od elipsy do hiperboli.

Metoda 2. Wykorzystujemy zarówno stałość L , jak i stałość (wynikającą z tego, że $F_r(r) = -V'(r)$) energii E

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E.$$

Po wyeliminowaniu z powyższego wzoru $\dot{\varphi}$ na rzecz L/mr^2 otrzymujemy związek¹⁰⁵

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E, \quad V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

¹⁰⁴Siła taka nie mogłaby być siłą potencjalną.

¹⁰⁵Przy okazji warto tu zwrócić uwagę na to, iż postępowanie polegające na podstawieniu $\dot{\varphi} = L/mr^2$

Redukuje to znalezienie ruchu w zmiennej radialnej r do problemu jednowymiarowego (takiego jak rozpatrywane w rozdziale III); ruch w zmiennej r jest wtedy dany w kwadraturach

$$\int dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}}.$$

Znak $\pm$ jest tu znakiem pochodnej dr/dt . Jedyną różnicą w porównaniu z prawdziwym ruchem jednowymiarowym jest to, że zakresem zmienności r jest zbiór $\mathbb{R}_+$ (a nie $\mathbb{R}$, jak w przypadku zmiennej x w ruchu prawdziwie jednowymiarowym); należy też pamiętać, że w punkcie $r = 0$ zmienna φ układu biegunowego jest źle określona.

Skorzystanie w różniczkowym związku $dt = \pm \sqrt{m/2} dr / \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}$ z równości $dt = (mr^2/L)d\varphi$ (wynikającej z tego, że $\dot{\varphi} = L/mr^2$) pozwala¹⁰⁶ przekształcić powyższą kwadraturę (tj. całkę) w kwadraturę dającą równanie toru, czyli związek r z φ :

$$\int d\varphi = \pm \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = \mp \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int \frac{du}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(1/u)}}.$$

Znak $\pm$ jest teraz znakiem pochodnej $dr/d\varphi$. Jeśli $V(r) = -\kappa/r$, otrzymuje się stąd ten sam wzór na zależność $r = r(\varphi)$, co otrzymany ze wzoru Bineta ale ze stałymi p i ε od razu wyznaczonymi przez całkowitą energię E i moment pędu L .

Wyznaczywszy $r = r(\varphi)$ albo ze wzoru Bineta, albo z powyższej kwadratury (naogół w postaci uwikłanej), zależność położenia od czasu można otrzymać całkując związek

$$r^2(\varphi) d\varphi = \frac{L}{m} dt,$$

do samego lagrangianu (ufamy, że L - moment pędu i L - lagrangian nie pochrzanią się czytelnikowi...)

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r),$$

i wykorzystanie niezależności od czasu tak otrzymanego lagrangianu $L'(r, \varphi, \dot{r}) = L(r, \dot{r}, L/mr^2)$ dałoby w efekcie błędny wniosek, jakoby stałą ruchu była wielkość

$$h' = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Powodem tego jest to, że związek $\dot{\varphi} - L/mr^2 = 0$, albo lepiej, związek $d\varphi - (L/mr^2)dt = 0$, nie jest całkowalny, tj. nie daje się przedstawić w postaci $df(r, \varphi, t)/dt = 0$ (nie ma on bowiem nawet czynnika całkującego) i jako taki nie reprezentuje więzów holonomicznych, a tylko związki będące (lub dające się przedstawić jako takie) więzami holonomicznymi można wykorzystywać bezpośrednio w lagrangianie do eliminowania zmiennych: więzy holonomiczne można bowiem zawsze - na tym polega przecież cała metoda równań Lagrange's II-go rodzaju! - wyeliminować przez wybór odpowiednich zmiennych uogólnionych zgodnych z tymi więzami i to właśnie de facto czynimy, eliminując z lagrangianu jakąś zmienną wyznaczając ją ze związku reprezentującego więzy holonomiczne (por. uwagi o eliminacji zmiennych w Przypomnieniu do rozdziału IX).

¹⁰⁶Do tego samego prowadzi też wyrażenie w podanym wzorze na energię E pochodnej r po czasie przez pochodną r po φ zgodnie z wyprowadzonym już związkiem $\dot{r} = -(L/m)d(1/r)/d\varphi$.

który (znów: naogół w postaci uwikłanej) daje $\varphi = \varphi(t)$ a w konsekwencji także $r = r(\varphi(t)) \equiv r(t)$.

Tak jak w przypadku ruchów jednowymiarowych, Metoda 2 pozwala tu przy ustalonym momencie pędu L zbadać charakter ruchu jakościowo w zależności od całkowitej energii E .¹⁰⁷ Np. Jeśli $V_{\text{eff}}(r)$ ma w $r = r_0$ minimum równe $V_{\text{eff}}^{\min}$, zmienna r będzie oscylować wokół r_0 pomiędzy wartościami $r_- < r_0$ i $r_+ > r_0$ wyznaczonymi przez warunki $V_{\text{eff}}(r_{\pm}) = E$ i, jeśli energia E ruchu jest niewiele wyższa niż $V_{\text{eff}}^{\min}$ (jak bardzo musi być bliska $V_{\text{eff}}^{\min}$, to zależy od bardziej globalnej postaci $V_{\text{eff}}(r)$), można zależność $r(t)$ (lub $r(\varphi)$) przybliżyć przez oscylacje harmoniczne wokół $r = r_0$. Ponieważ $\dot{\varphi} \propto L$ ma stały znak, który przez wybór strony, z której patrzymy na płaszczyznę ruchu, można przyjąć za dodatni, masa m , obiegając centrum $r = 0$, znajduje się zawsze (“falując” pomiędzy nimi) pomiędzy dwoma okręgami o promieniach r_- i r_+ . Powstaje wtedy naturalne pytanie, czy tor ruchu jest krzywą zamkniętą. Odpowiedź daje całka

$$\sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{u_+}^{u_-} \frac{du}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(1/u)}} = \Delta\varphi, \quad u_{\pm} = 1/r_{\pm}.$$

Jeśli $\Delta\varphi = 2\pi(n/k)$ z jakimiś naturalnymi n i k , tor jest krzywą zamkniętą. Dowodzi się (zob. zadanie 10.13), że tylko w potencjałach $V(r) = -\frac{1}{2}|k|r^2$ i $V(r) = -|\kappa|/r$ wszystkie trajektorie ograniczone (tzn. nie rozciągające się do nieskończoności) są zamknięte

Na podstawie analizy potencjału efektywnego $V_{\text{eff}}(r)$ widać też, że spadek ciała na centrum siły przyciągającej jest możliwy tylko wtedy, gdy $V(r)$ “niweluje” skutki istnienia bariery odśrodkowej (“centryfugalnej” w niektórych starszych podręcznikach) reprezentowanej w $V_{\text{eff}}(r)$ przez wyraz $L^2/2mr^2$. Jest tak, gdy

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r^2 V(r)) < -\frac{L^2}{2m}.$$

Np. gdy $V(r) = -|\kappa|/r^2$ i $|\kappa| > L^2/2m$, lub gdy $V(r) = -|\kappa|/r^\beta$ i $\beta > 2$ i, oczywiście, zawsze (w przypadku potencjału przyciągającego na małych odległościach), gdy $L = 0$, co odpowiada ruchowi po prostej przechodzącej przez centrum.

¹⁰⁷Stałe E i L są dwiema niezależnymi globalnymi charakterystykami ruchu; dwiema pozostałymi - ponieważ ruch płaski jest zadany dwoma zwyczajnymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, muszą być cztery stałe dowolne (warunki początkowe) wyznaczające jednoznacznie zależność położenia od czasu - są wybór chwili początkowej $t = 0$ i wybór kierunku, od którego liczony jest kąt φ - nie mają więc one charakteru globalnego.

Zadanie 10.4

Wykazać metodami geometrii analitycznej, że wzór

$$r(\varphi) = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

w którym parametr ε jest z definicji nieujemny (tak wybrany jest sposób odmierzenia kąta φ), rzeczywiście zadaje znane z geometrii krzywe stożkowe: elipsę (gdy $0 \leq \varepsilon < 1$ i znak $+$), hiperbolę (gdy $\varepsilon > 1$, oba znaki) i parabolę (gdy $\varepsilon = 1$ i znak $+$). Wyprowadzić w ten sposób związki między różnymi charakterystykami tych krzywych (np. między długościami a i b półosi elipsy, parametrami p i ε oraz odległością $2c$ między dwoma ogniskami elipsy i sumą $2f$ odległości dowolnego punktu na elipsie od jej ognisk).

Rozwiązanie:

Elipsa jest to krzywa płaska (przyjmujemy, że leży ona w płaszczyźnie xy) tworzona przez takie punkty o współrzędnych (x, y) , że suma (kartezjańskich) odległości r_- i r_+ (zob. lewy rysunek 53) każdego z nich od ustalonych dwu punktów P_- i P_+ o współrzędnych odpowiednio $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ jest stała i równa $2f$. Hiperbolę z kolei tworzą punkty, których różnica odległości r_- i r_+ od punktów P_- i P_+ jest równa $2f$ lub $-2f$ (zob. prawy rysunek 53). Wszystkie te przypadki ujmuje związek

$$|r_- \pm r_+| = 2f, \quad r_{\mp} = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}.$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu daje on równanie (znak $-$ po prawej stronie odpowiada elipsie, a znak $+$ hiperboli)

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2f^2 = \mp \sqrt{[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2]},$$

które, po jeszcze jednym podniesieniu stronami do kwadratu, daje (mający już taką samą postać dla obu krzywych) związek $4(f^2 - c^2)x^2 + 4f^2y^2 = 4f^2(f^2 - c^2)$ równoważny znanym ze szkoły równaniom

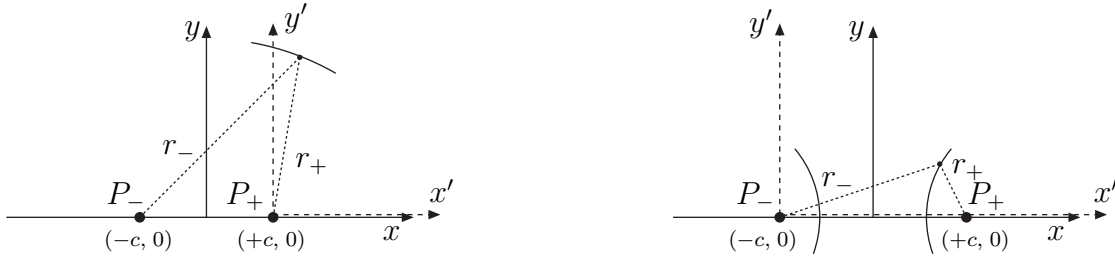
$$\frac{x^2}{f^2} \pm \frac{y^2}{|f^2 - c^2|} = 1.$$

(Znak $+$, gdy $f^2 > c^2$, a znak $-$, gdy $f^2 < c^2$). Jest geometrycznie oczywiste, że w przypadku elipsy musi zachodzić nierówność $f^2 > c^2$ (gdy $f \rightarrow c$ elipsa redukuje się do odcinka łączącego punkty P_- i P_+). Z kolei z prostych rozważań nietrudno wywnioskować, że w przypadku hiperboli $f^2 < c^2$ (tj. zbiór punktów spełniających warunek $|r_- - r_+| = 2f$ jest, gdy $f^2 > c^2$, zbiorem pustym). Zatem długości a i b półosi elipsy we wzorze $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ wiążą się z parametrami c i f wzorami

$$a^2 = f^2, \quad b^2 = f^2 - c^2, \quad (\text{elipsa}),$$

tj. $c^2 = a^2 - b^2$, a parametry a i b we wzorze $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ definiującym hiperbolę są dane przez

$$a^2 = f^2, \quad b^2 = c^2 - f^2, \quad (\text{hiperbola}),$$



Rysunek 53: Definicje wielkości i primowanych układów kartezjańskich (x', y') przy konstrukcji elipsy ($r_- + r_+ = 2f$, $f > c$) i hiperboli ($|r_- - r_+| = 2f$, $f < c$).

tj. w tym przypadku $c^2 = a^2 + b^2$.

Aby sprowadzić równanie elipsy do postaci podanej w Przypomnieniu (tj. aby wykazać, że wzór tam otrzymany i przytoczony w treści tego Zadania rzeczywiście definiuje elipsę) zapisujemy je w zmiennych biegunowych (r, φ) zdefiniowanych w układzie (x', y') o początku w punkcie P_+ (zobacz lewy rysunek 53): $x = c + x' = c + r \cos \varphi \equiv c + r c_\varphi$, $y = y' = r \sin \varphi \equiv r s_\varphi$:

$$\frac{1}{a^2} (c + r c_\varphi)^2 + \frac{1}{b^2} r^2 s_\varphi^2 = 1,$$

i traktujemy ten wzór jak równanie kwadratowe

$$(c_\varphi^2 + \frac{a^2}{b^2} s_\varphi^2) r^2 + 2c c_\varphi r - b^2 = 0,$$

(wykorzystany tu został związek $c^2 = a^2 - b^2$) wyznaczające odległość r od punktu P_+ w funkcji kąta φ . Rozwiązaniem jego jest

$$r = \frac{1}{2[c_\varphi^2 + (a^2/b^2)s_\varphi^2]} \left[-2c c_\varphi + \sqrt{4c^2 c_\varphi^2 + 4(b^2 c_\varphi^2 + a^2 s_\varphi^2)} \right] = \frac{a - c c_\varphi}{(a^2/b^2) + [1 - a^2/b^2] c_\varphi^2}.$$

(Fizyczny jest tylko jeden pierwiastek, bo zmienna r jest nieujemna; w drugim kroku ponownie wykorzystana została równość $c^2 = a^2 - b^2$). Wzór ten jest właśnie wzorem otrzymanym w Przypomnieniu (w sytuacji, gdy $\kappa > 0$), jeśli zdefiniować

$$\varepsilon \equiv \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1.$$

Wówczas bowiem

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon c_\varphi)}{(a^2/b^2)[1 - \varepsilon^2 c_\varphi^2]} = \frac{b^2/a}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Otrzymujemy stąd ponadto związek $p = b^2/a$. Zakres zmienności kąta φ nie jest w tym przypadku niczym ograniczony: $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Równanie hiperboli $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ przepisujemy na odmianę w zmiennych biegunowych (r, φ) zdefiniowanych w układzie (x', y') o początku w punkcie P_- (zobacz prawy rysunek 53): $x = -c + x' = -c + r \cos \varphi$, $y = y' = r \sin \varphi$:

$$\frac{1}{a^2} (c - rc_\varphi)^2 - \frac{1}{b^2} r^2 s_\varphi^2 = 1,$$

co, po skorzystaniu z tego, że w tym przypadku $c^2 = a^2 + b^2$, prowadzi do wzoru na r

$$r = \frac{b^2}{a} \frac{\mp 1 + \varepsilon c_\varphi}{-1 + \varepsilon^2 c_\varphi^2} = \frac{b^2}{a} \frac{\mp 1 + \varepsilon c_\varphi}{(-1 + \varepsilon c_\varphi)(1 + \varepsilon c_\varphi)},$$

w którym teraz (parametr $p = b^2/a$, tak jak poprzednio)

$$\varepsilon \equiv \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$$

Oba pierwiastki równania kwadratowego są w tym przypadku fizyczne i dają zależności $r = r(\varphi)$ odpowiadające dwu różnym gałęziom hiperboli: znak $-$ daje gałąź lewą (przebiegającą bliżej lewego ogniska, tj. początku układu (x', y')), a znak $+$ gałąź prawą. Zakres zmienności kąta φ jest na obu gałęziach ograniczony do $-\varphi_{\max} < \varphi < \varphi_{\max}$ przez warunek dodatniości mianownika; kąt graniczny $\varphi_{\max}$ zależy od gałęzi: na lewej $\pi/2 < \varphi_{\max} < \pi$, a na prawej $0 < \varphi_{\max} < \pi/2$.

Geometrycznie parabola jest krzywą płaską (przyjmujemy, że leżącą w płaszczyźnie xy), której każdy punkt jest równoodległy od ustalonego punktu P - przyjmujemy, że jest to punkt o współrzędnych $(-p/2, 0)$ - i ustalonej prostej ℓ (nieprzechodzącej przez wybrany punkt); bez straty ogólności przyjmujemy, że jest to prosta $x = p/2$. Współrzędne punktów leżących na paraboli spełniają zatem związek $r_\ell = r_P$, czyli

$$\left| x - \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + y^2},$$

Aby wykazać, że wyprowadzony w Przypomnieniu tor ruchu w potencjale $V(r) = -\kappa/r$ jest, gdy $\varepsilon = 1$, parabolą, zapisujemy równanie paraboli $y^2 = -2px$, otrzymane po podniesieniu stronami do kwadratu powyższego związku, w układzie biegunowym związanym z układem (x', y') o początku w punkcie P : $x = -p/2 + x' = -p/2 + r \cos \varphi$, $y = y' = r \sin \varphi$. Daje to równanie kwadratowe na r

$$r^2 s_\varphi^2 + 2pc_\varphi r - p^2 = 0.$$

Jego rozwiązanie (tylko jeden pierwiastek jest fizyczny, gdyż $r \geq 0$)

$$r = \frac{1}{2s_\varphi^2} \left(-2pc_\varphi + \sqrt{4p^2 c_\varphi^2 + 4p^2 s_\varphi^2} \right) = \frac{p(1 - c_\varphi)}{1 - c_\varphi^2} = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$$

Tak więc w przypadku paraboli, wprowadzony w Przypomnieniu parametr p jest tym samym, który charakteryzuje parabolę geometrycznie (jest odległością punktu P od prostej ℓ). Zakresem zmienności kąta φ jest tu przedział otwarty $(-\pi, +\pi)$.

Zadanie 10.5

Wiedząc, że torami ruchu masy m w polu siły centralnej o potencjale $V(r) = -\kappa/r$ ($\kappa > 0$ - siła przyciągająca, $\kappa < 0$ - odpychająca) są krzywe stożkowe: okrąg, elipsa, parabola lub hiperbola, wyprowadzić związki między różnymi charakterystykami elipsy i hiperboli: (c, f) , (a, b) i (p, ε) bez jawnego wyprowadzania (jak w Zadaniu 10.4) związków między równaniami w układach kartezjańskim i biegunowym. Powiązać te charakterystyki z momentem pędu L i całkowitą energią mechaniczną E cząstki. W przypadku ruchu po elipsie wyprowadzić z otrzymanych związków trzecie prawo Keplera.

Rozwiązanie:

Jak to ustalone zostało w Przypomnieniu, we wzorze

$$r(\varphi) = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

w którym występuje znak $+$, gdy siła jest przyciągająca ($\kappa > 0$), a znak $-$, gdy siła jest odpychająca ($\kappa < 0$). Parametr ε jest z definicji (tak wybrany jest sposób odmierzenia kąta φ) nieujemny. Stała $p > 0$ wiąże się z momentem pędu L wzorem $p = L^2/m|\kappa|$. Aby powiązać parametr ε z momentem pędu i całkowitą energią mechaniczną E cząstki, wystarczy zauważyć, iż w punkcie toru, w którym r przyjmuje swą najmniejszą wartość

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon \pm 1},$$

we wzorze

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E,$$

na całkowitą energię ruchu znika pochodna $\dot{r}$ (lub pochodna $d(1/r)/d\varphi$). Zatem równość¹⁰⁸

$$E = V_{\text{eff}}(r_{\min}) = \mp \frac{|\kappa|}{p} (\varepsilon \pm 1) + \frac{L^2}{2mp^2} (\varepsilon \pm 1)^2 = \mp \frac{m\kappa^2}{L^2} (\varepsilon \pm 1) + \frac{m\kappa^2}{2L^2} (\varepsilon \pm 1)^2,$$

stanowi równanie wyznaczające $\varepsilon \pm 1$, czyli ε w funkcji E i L . Ponieważ $\varepsilon > 0$, tylko jeden pierwiastek powyższego równania kwadratowego jest fizyczny i otrzymuje się stąd związek

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\kappa^2}},$$

ślusznym (ponieważ znak $\pm$ w $\varepsilon \pm 1$ jest skorelowany ze znakiem wyrazu liniowego względem niewiadomej $\varepsilon \pm 1$ w równaniu) dla obu znaków parametru κ (tj. zarówno dla siły przyciągającej, jak i odpychającej).

¹⁰⁸Taka sama równość zachodzi także w punkcie o maksymalnej wartości $r_{\max}$ zmiennej r , jeśli tor jest zamknięty, tzn. jest okręgiem lub elipsą, co z kolei jest możliwe tylko w przypadku siły przyciągającej ($\kappa > 0$).

Ponieważ gdy $\kappa < 0$, potencjał efektywny $V_{\text{eff}}(r)$ jest wszędzie ściśle dodatni, energia całkowita ruchu E musi być też ściśle dodatnia (energia kinetyczna ruchu radialnego $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ jest nieujemna, więc tor ruchu może przechodzić tylko przez obszary, w których zmienna r jest taka, że $E \geq V_{\text{eff}}(r)$), przy ruchu w polu siły odpychającej parameter ε jest zawsze większy od jedności. Wzór

$$r(\varphi) = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

wyznacza wtedy hiperbole:¹⁰⁹ ponieważ zmienna r musi być ściśle dodatnia (przy $L \neq 0$ dotarcie do $r = 0$ jest przy skończonej energii ruchu E niemożliwe) zakres zmienności kąta φ jest ograniczony warunkiem $\cos \varphi > 1/\varepsilon$, czyli do zakresu $-\varphi_{\text{max}} < \varphi < \varphi_{\text{max}}$ przy czym $0 < \varphi_{\text{max}} < \pi/2$; gdy $\varphi \rightarrow \pm\varphi_{\text{max}}$, cząstka oddala się do nieskończoności.

Przy ruchu w potencjale siły przyciągającej ($\kappa > 0$) potencjał efektywny $V_{\text{eff}}(r)$ jest w pewnym zakresie zmiennej r ujemny i ma minimum $V_{\text{eff}}^{\text{min}}(L) = -m\kappa^2/2L^2$ w (zależącym od L) punkcie $r_0(L) = L^2/m|\kappa| \equiv p$. Jeśli energia ruchu E jest (przy ustalonym L) dokładnie równa $V_{\text{eff}}^{\text{min}}(L)$, możliwy jest tylko ruch po okręgu (zmiana odległości r od centrum siły jest niemożliwa, bo zniknąć musi $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$). Jest to zgodne z otrzymanym wzorem: w takiej sytuacji $\varepsilon = 0$ i równanie toru redukuje się do związku $r(\varphi) = p = \text{const}$.

Gdy $V_{\text{eff}}^{\text{min}}(L) < E < 0$, parametr ε jest ograniczony przez nierówności $0 < \varepsilon < 1$ i wzór

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

wyznacza wtedy elipsę: mianownik nigdy się nie zeruje (kąt φ przebiega cały zakres od 0 do 2π), a zmienna r , będąca odległością punktu na elipsie od jednego (przyjmujemy konwencję, że od prawego, czyli od punktu P_+ na lewym rysunku 53) z jej ognisk, zmienia się od

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad (\text{gdy } \varphi = 0 + 2n\pi) \quad \text{do} \quad r_{\text{max}} = \frac{p}{1 - \varepsilon} \quad (\text{gdy } \varphi = \pi + 2n\pi).$$

Jak wiadomo ze szkoły, elipsę (na płaszczyźnie xy) można zadać albo wzorem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

w którym a i b są długościami jej półosi, albo scharakteryzować jako zbiór punktów których suma odległości $r_- + r_+$ od dwu ustalonych punktów (ognisk elipsy) P_- i P_+ płaszczyzny odległych od siebie o $2c$ jest stała i równa $2f$ (zob. Zadanie 10.4). Związki między różnymi sposobami charakteryzowania elipsy łatwo ustalić: wybierając osie x i y tak, by współrzędnymi punktów P_- i P_+ były $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ - powyższe szkolne równanie elipsy jest napisane właśnie w takim układzie odniesienia - rozpatrujemy punkt elipsy o

¹⁰⁹Z rozwiązania Zadania 10.4 wiadomo też, że jest to gałąź hiperboli dalsza od ogniska.

współrzędnych $(-a, 0)$ leżący na osi x na lewo od punktu P_- ; jego odległości od ognisk, czyli punktów P_- i P_+ , są, jak nietrudno zobaczyć, równe $r_- = a - c$ i $r_+ = a + c$, czyli

$$2f = r_- + r_+ = 2a.$$

Wynika stąd, że $f = a$. Rozpatrując następnie punkt elipsy o współrzędnych $(0, b)$, z twierdzenia Pitagorasa znajdujemy, że $b = \sqrt{f^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$. Z kolei związki parametrów a i b z parametrami p i ε można ustalić następująco: po pierwsze jest jasne, że

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon},$$

skąd wnioskujemy, że

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$

Wynika stąd także, iż

$$r_{\min} = a(1 - \varepsilon), \quad r_{\max} = a(1 + \varepsilon).$$

Chwyt pozwalający bez kłopotów wyrazić b przez p i ε polega na zauważeniu, że długość b jest równa maksymalnej wartości zmiennej $y = r \sin \varphi$; przyrównując do zera pochodną

$$\frac{d}{d\varphi} y(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \frac{p \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

znajdujemy, że znika ona w $\cos \varphi = -\varepsilon$, gdzie $y = (p\sqrt{1 - \varepsilon^2})/(1 - \varepsilon^2)$. Zatem

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

i zachodzi związek

$$b^2 = ap.$$

Zatem $b^2/a^2 = 1 - \varepsilon^2$ i stąd

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}.$$

Alternatywnie można rozpatrzyć na elipsie punkt odpowiadający kątowi $\varphi = \pi/2$. Punkt ten w układzie kartezjańskim o środku w połowie odległości pomiędzy ogniskami elipsy (chodzi tu o układ xy z lewego rysunku 53) ma współrzędne $x = c + r(\varphi) \cos \varphi = c$, $y = r(\varphi) \sin \varphi = p$. Współrzędne te muszą spełniać równanie elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Podstawiając tu $x^2 = c^2 = a^2 - b^2$ i $y^2 = p^2$ znajdujemy, że $p = b^2/a$, czyli że $b = \sqrt{ap}$, co daje podany już wzór wyrażający b przez p i ε .

Znalezione wyżej związki prowadzą natychmiast do trzeciego prawa Keplera. Przypomnijmy bowiem (przypomnieliśmy to już w Przypomnieniu), że stałość momentu pędu L jest równoważna stałości prędkości polowej (A od “area”)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \cdot r \dot{\varphi} = \frac{L}{2m}.$$

Całkując obie strony po całym obiegu elipsy, czyli od zera do okresu ruchu T , otrzymamy po lewej stronie pole elipsy $A = \pi ab$. Prowadzi to do związku

$$\pi^2 a^2 b^2 \equiv \pi^2 a^3 p = \frac{L^2}{4m^2} T^2.$$

Jest to właśnie trzecie prawo Keplera: stosunek kwadratów okresów obiegu planet (Układu Słonecznego) do sześciątów długości dużych półosi ich orbit nie zależy od planety. Rzeczywiście:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m^2 p}{L^2} = 4\pi^2 \frac{m}{\kappa} = \frac{4\pi^2}{GM_S},$$

po uwzględnieniu tego, że $\kappa = GM_S m$ (M_S jest tu masą Słońca). Wyrażając z kolei we wzorach $a = p/(1 - \varepsilon^2)$ i $b = p/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ parametry p i ε przez E i L znajdujemy, że

$$a = \frac{\kappa}{2|E|}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}},$$

co pozwala wyrazić okres obiegu elipsy przez energię:

$$T = 2\pi \frac{m}{L} ab = \pi \sqrt{\frac{m\kappa^2}{2|E|^3}}.$$

Okoliczność, że okres T nie zależy od momentu pędu L jest cechą szczególną ruchu Keplera (i niekiedy istotną w dalszych Zadaniach).

Zauważmy też, że wzór $a = \kappa/2|E|$ zapisany w postaci

$$E = -\frac{\kappa}{2a}$$

uogólnia znany (łatwy do wykazania) związek $E = -\kappa/2r$ między całkowitą energią ruchu zachodzącego w potencjale $V(r) = -\kappa/r$ po orbicie kołowej, a promieniem tej orbity.

Związki między parametrami a i b występującymi w “szkolnym” równaniu hiperboli $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$, a parametrami c i f , gdzie $2c$ jest odległością ogniska P_- od ogniska P_+ , a $2f$ jest stałą różnicą $|r_- - r_+|$ odległości punktów hiperboli od jej ognisk, ustalamy rozpatrując najpierw punkt A hiperboli o współrzędnych $(a, 0)$ w kartezjańskim układzie xy z prawego rysunku 53. Jego odległości od ognisk są równe $r_- = c + a$, $r_+ = c - a$, co pozwala stwierdzić, że $f = a$ (tak jak w przypadku elipsy). Z kolei rozpatrujemy punkt B o współrzędnych (w tymże samym układzie kartezjańskim) (c, y_B) . Odległości tego punktu

od ognisk są równe $r_- = \sqrt{(2c)^2 + y_B^2}$, $r_+ = y_B$, tak iż $r_- - r_+ = 2f = 2a$ daje (po podniesieniu stronami równości $r_- = 2a + r_+$ do kwadratu) $y_B = (c^2 - a^2)/a$. Wstawiając współrzędne punktu B do równanie hiperboli dostajemy związek

$$c^4 - (2a^2 + b^2)c^2 + a^2(a^2 + b^2) = 0,$$

który potraktowany jak równanie bikwadratowe na c ma dwa rozwiązania: $c^2 = a^2$, które trzeba odrzucić, gdyż w przypadku hiperboli musi być $c > a$ oraz drugie, dające dobry związek

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Z kolei związek parametrów a i b z parametrami p i ε znajdujemy następująco. Najpierw rozpatrujemy punkt na lewej gałęzi hiperboli odpowiadający kątowi $\varphi = \pi/2$. Ma on w kartezjańskim układzie xy z prawego rysunku 53 współrzędne $(-c, p)$ gdyż $x = -c + r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$, a na lewej gałęzi $r = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)$. Wstawiając je do równania hiperboli $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ i wykorzystując to, że $c^2 = a^2 + b^2$ otrzymujemy związek $p = b^2/a$. Następnie bierzemy na lewej gałęzi hiperboli punkt o współrzędnych $(x, y) = (-a, 0)$ najbliższy ognisku P_- , które jest początkiem kartezjańskiego układu $x'y'$, w którym zdefiniowane są zmienne r i φ (zobacz Zadanie 10.4). Punkt ten jest od tego ogniska odległy o $r_- = c - a$. Ta sama odległość r_- jest też równa $p/(1 + \varepsilon)$. Zatem

$$p = (1 + \varepsilon)(c - a),$$

co po skorzystaniu z ustalonych już związków $p = b^2/a$ i $b^2 = c^2 - a^2$ daje

$$\frac{b^2}{a^2} \equiv \frac{c^2}{a^2} - 1 = \left(\frac{c}{a} - 1\right) \left(\frac{c}{a} + 1\right) = (1 + \varepsilon) \left(\frac{c}{a} - 1\right).$$

Stąd, w przypadku hiperboli

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

W przypadku potencjału siły przyciągającej $V(r) = -|\kappa|/r$ potencjał efektywny $V_{\text{eff}}(r)$ dąży przy $r \rightarrow \infty$ do zera od dołu ($V_{\text{eff}} \rightarrow 0^-$) i możliwy jest ruch nieograniczony z zerową energią całkowitą ($E = 0$). Torem ruchu jest w tym szczególnym przypadku parabola, będąca tworem przejściowym pomiędzy baaardzo wydłuuuużoooooną elipsą a hiperbolą. Ponieważ wtedy $\varepsilon = 1$, zmienna r dąży do nieskończoności, gdy $|\varphi|$ dąży do π . Gdy energia ruchu jest dodatnia ($E > 0$) torem jest już hiperbola, a zmienna r dąży do nieskończoności, gdy kąt $|\varphi|$ dąży do kąta φ_{max} leżącego pomiędzy $\pi/2$ a π . Różnica między ruchem po hiperboli w przypadku siły przyciągającej ($\kappa > 0$) i odpychającej ($\kappa < 0$) jest więc taka (zobacz rysunek ??), że w pierwszym przypadku nadlatująca z nieskończoności cząstka zawraca za centrum siły (za dalszym ogniskiem), a w drugim *przed* centrum siły (tj. przed dalszym ogniskiem, ale za bliższym).

Zadanie 10.6

Wyprowadzić wzory zadające (w sposób uwikłany) zależność od czasu położenia masy m poruszającej się w potencjale $V(r) = -\kappa/r$ ($\kappa > 0$ - siła przyciągająca, $\kappa < 0$ - odpychająca) we wszystkich możliwych przypadkach: ruchu po elipsie (możliwym przy $\kappa > 0$), ruchu po hiperboli (trzeba tu odróżnić przypadki ruchu po gałęzi hiperboli bliższej centrum siły, co zachodzi, gdy $\kappa > 0$ i po gałęzi dalszej, gdy $\kappa < 0$) oraz w przypadku ruchu po paraboli (możliwym tylko, gdy $\kappa > 0$).

Rozwiązanie:

Zależność położenia od czasu jest dana ogólnym związkiem

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{E + \kappa/r - L^2/2mr^2}},$$

znak $+$ dotyczy tu oddalania się masy m od centrum siły, a $-$ zbliżania. W przypadku ruchu po elipsie ($\kappa > 0$, $E = -|E|$) wzór ten, “zwijając do pełnego kwadratu” wyrażenie pod pierwiastkiem, przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{(\kappa^2/4E^2) - (L^2/2m|E|) - (r - \kappa/2|E|)^2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{ma}{\kappa}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r - a)^2}}. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tu z tego (zob. Zadanie 10.5), że a jest długością dużej półosi elipsy)

$$a = \frac{\kappa}{2|E|}, \quad \frac{\kappa^2}{4E^2} - \frac{L^2}{2m|E|} = a^2 \left(1 - \frac{2|E|L^2}{m\kappa^2}\right) = a^2\varepsilon^2.$$

Niech czas t będzie liczony od $r = r_{\min}$ (*perygeum* w ruchu wokół Ziemi, lub *perihelium* w ruchu wokół Słońca, a ogólnie *pericentrum*). Zatem

$$t = \sqrt{\frac{ma}{\kappa}} \int_{r_{\min}}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (r - a)^2}}.$$

W powyższej całce robimy podstawienie

$$r(\xi) - a = -a\varepsilon \cos \xi, \quad dr = d\xi a\varepsilon \sin \xi.$$

Zmienna ξ biegnie tu od 0 do π : $r(0) = a(1 - \varepsilon) = r_{\min} < a$ (stąd znak minus po prawej stronie wzoru na $r - a$) oraz $r(\pi) = a(1 + \varepsilon) = r_{\max}$. Wybieramy także znak $+$ przed całką, gdyż na tym odcinku czasu $\dot{r} > 0$. Stąd ($\sin \xi' > 0$ w rozpatrywanym zakresie ξ')

$$t = \sqrt{\frac{ma}{\kappa}} \int_0^\xi \frac{d\xi' a(1 - \varepsilon \cos \xi') a\varepsilon \sin \xi'}{a\varepsilon \sin \xi'} = \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} \int_0^\xi d\xi' (1 - \varepsilon \cos \xi').$$

Całka jest elementarna i otrzymujemy wyrażoną w sposób parametryczny zależność r od czasu

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (\xi - \varepsilon \sin \xi), \\ r &= a(1 - \varepsilon \cos \xi), \end{aligned}$$

przy czym (na razie) $0 \leq \xi \leq \pi$. Będący połową okresu T czas ruchu od $r_{\min}$ do $r_{\max}$ jest równy $t(\pi)$, czyli

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} = \pi \sqrt{\frac{m\kappa^2}{2|E|^3}},$$

co zgadza się z wynikiem uzyskanym na podstawie stałości prędkości połowej (zobacz Zadanie 10.5).

Zakres zmiennej ξ można w powyższych związkach przedłużyć do 2π , o czym można przekonać się następująco. Gdy $t > T/2$ powinniśmy napisać (ponieważ na tym odcinku czasu $\dot{r} < 0$, wybieramy przed całką znak minus)

$$t = \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{ma}{\kappa}} \int_{r_{\max}}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (r - a)^2}}.$$

Podstawiamy tu następnie $r - a = +a\varepsilon \cos \eta$ z $0 \leq \eta < 2\pi$ (teraz $\eta = 0$ odpowiada *apogeum*, *aphelium* lub ogólnie *apocentrum*, czyli $r_{\max} > a$), co prowadzi analogicznie jak wyżej, do

$$t = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} \int_0^\eta d\eta' (1 + \varepsilon \cos \eta') = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (\eta + \varepsilon \sin \eta),$$

czyli do

$$\begin{aligned} t &= \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (\eta + \varepsilon \sin \eta) \equiv \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (\pi + \eta + \varepsilon \sin \eta), \\ r &= a(1 + \varepsilon \cos \eta). \end{aligned}$$

Widać jednak, że te same t i r otrzymamy kładąc we wzorze słusznym na razie w zakresie $0 \leq \xi \leq \pi$ zmienną $\xi = \pi + \eta$, jako że $-\varepsilon \sin(\pi + \eta) = \varepsilon \sin \eta$, $\varepsilon \cos(\pi + \eta) = -\varepsilon \cos \eta$. Pokazuje to, że zależność r od czasu jest w całym ruchu po elipsie dana w sposób uwikłany związkami

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (\xi - \varepsilon \sin \xi), \\ r &= a(1 - \varepsilon \cos \xi), \end{aligned}$$

w których $0 \leq \xi \leq 2\pi$.

Wykorzystujemy teraz związek $r = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)$ w postaci

$$\cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{r} - 1 \right), \quad \sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right)^2},$$

do wyrażenia we wzorach $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ kąta φ przez $r = r(\xi(t))$:

$$x = \frac{p-r}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (p - a + a\varepsilon \cos \xi) = a \left[\cos \xi + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{p}{a} - 1 \right) \right],$$

a ponieważ

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{p}{a}},$$

więc $1 - p/a = \varepsilon^2$. Zatem $(p - r)/\varepsilon = a(\cos \xi - \varepsilon)$. Otrzymujemy w ten sposób (w postaci uwikłanej) zależność kartezjańskich zmiennych x i y od czasu masy m poruszającej się po elipsie wokół centrum (znajdującego się w punkcie $(x = 0, y = 0)$) w układzie kartezjańskim:¹¹⁰

$$\begin{aligned} x(t) &= a(-\varepsilon + \cos \xi(t)), \\ y(t) &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \xi(t). \end{aligned}$$

W przypadku ruchu po hiperboli, gdy $E > 0$, zależność zmiennej r od czasu jest dana wzorem

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr r}{\sqrt{(r + \kappa/2E)^2 - (\kappa^2/4E^2) - (L^2/2mE)}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{ma}{\kappa}} \int \frac{dr r}{\sqrt{(r \pm a)^2 - a^2\varepsilon^2}}, \end{aligned}$$

gdzie, ponieważ teraz $a = p/(\varepsilon^2 - 1) = |\kappa|/2E$ (zob. Zadanie 10.5), górny znak (+) w wyrażeniu pod pierwiastkiem odnosi się do ruchu w potencjale siły przyciągającej, a dolny (−) odpychającej ($\kappa = -|\kappa|$). Przyjmując, że $t = 0$, w punkcie $r = r_{\min}$ i podstawiając¹¹¹

$$r \pm a = a\varepsilon \operatorname{ch} \xi, \quad dr = d\xi a\varepsilon \operatorname{sh} \xi,$$

¹¹⁰W Zadaniu 10.4 układ ten był oznaczany (x', y') . Zauważmy (wracając do oznaczeń z tamtego Zadania), że otrzymane wzory są zgodne z równaniem elipsy w pierwotnym układzie (x, y) : $x' + a\varepsilon \equiv x' + c = x = a \cos \xi$, $y' = y = a\sqrt{1 - c^2/a^2} \sin \xi = b \sin \xi$, a zatem $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

¹¹¹Jest to zgodne z tym, że $r_{\min} = a(\varepsilon \mp 1)$ (górny znak, gdy $\kappa > 0$, dolny, gdy $|\kappa| < 0$), gdyż

$$r_{\min} = \frac{p}{\varepsilon \pm 1} \equiv \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon \mp 1) \equiv a(\varepsilon \mp 1).$$

otrzymujemy, po podobnych krokach jak wykonane wyżej,

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\kappa}} (-\xi + \varepsilon \operatorname{sh} \xi),$$

$$r = a(-1 + \varepsilon \operatorname{ch} \xi),$$

w przypadku siły przyciągającej (tj. gdy $\kappa > 0$) i

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{|\kappa|}} (\xi + \varepsilon \operatorname{sh} \xi),$$

$$r = a(1 + \varepsilon \operatorname{ch} \xi),$$

w przypadku siły odpychającej (tj. gdy $\kappa < 0$). W obu przypadkach $-\infty < \xi < \infty$. Ponieważ w przypadku hiperboli

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{p}{a}},$$

więc $1 + p/a = \varepsilon^2$ i po krokach analogicznych do wykonanych w przypadku ruchu po elipsie, znajdujemy, że w ruchu po hiperboli

$$x(t) = a(\varepsilon - \operatorname{ch} \xi(t)),$$

$$y(t) = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \operatorname{sh} \xi(t),$$

gdy potencjał jest przyciągający ($\kappa > 0$) oraz

$$x(t) = a(\varepsilon + \operatorname{ch} \xi(t)),$$

$$y(t) = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \operatorname{sh} \xi(t),$$

gdy potencjał jest odpychający ($\kappa < 0$).

Ruch po paraboli masy m (możliwy tylko, gdy $\kappa > 0$, tj. w polu siły przyciągającej) zachodzi z zerową energią. Ogólny wzór daje więc

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\kappa/r - L^2/2mr^2}} = \pm \int \frac{dr r}{\sqrt{(2\kappa/m)r - L^2/m^2}}.$$

Przyjmując jak zawsze, iż $r(0) = r_{\min}$ podstawiamy tu

$$r = \frac{L^2}{2m\kappa} (1 + \xi^2) \equiv \frac{p}{2} (1 + \xi^2), \quad dr = p \xi d\xi,$$

co po prostych przekształceniach prowadzi do związków

$$t = \frac{mp^2}{2L} \left(\xi + \frac{1}{3} \xi^3 \right) \equiv \sqrt{\frac{mp^3}{4\kappa}} \left(\xi + \frac{1}{3} \xi^3 \right),$$

$$r = \frac{p}{2} (1 + \xi^2),$$

w których $-\infty < \xi < \infty$.

Zadanie 10.13 (tzw. Problem Bertranda)

Udowodnić, że tylko w potencjałach $V(r) = -|\kappa|/r$ oraz $V(r) = \frac{1}{2}|k|r^2$ wszystkie ruchy ograniczone z $L \neq 0$ zachodzą po torach zamkniętych.¹¹²

Rozwiązanie:

Aby w potencjale $V(r)$ możliwe były, przy $L \neq 0$, ruchy w obszarze ograniczonym, $V_{\text{eff}}(r, L) = V(r) + L^2/2mr^2$ musi być taki, że dla pewnych wartości całkowitej energii E ruchu warunek $V_{\text{eff}}(r, L) \leq E$ wyznacza pewien skończony zakres¹¹³ zmiennej r . Dla tych to wartości energii (których widmo - mówiąc językiem mechaniki kwantowej - może być ciągle i/lub dyskretne) ruch będzie zachodzić pomiędzy jakimiś¹¹⁴ $r_{\min} > 0$ i $r_{\max} < \infty$.

Rozpatrzmy taki skończony przedział $[r_{\min}, r_{\max}]$. Jeśli potencjał jest funkcją różniczkowalną w $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, to musi istnieć w tym obszarze co najmniej jeden punkt r_0 , w którym $V'_{\text{eff}}(r_0, L) = 0$ (taka jest treść jakiegoś twierdzenia Rolle'a, czy kogoś takiego - kto by tam te nazwy szkolnych twierdzeń pamiętał). Możliwy jest wtedy ruch z energią $E = V_{\text{eff}}(r_0, L)$ po orbicie kołowej o promieniu r_0 . $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$ jest równoważne stwierdzeniu, że

$$-\left. \frac{d}{dr} V(r) \right|_{r_0} \equiv F_r(r_0) = -\frac{L^2}{mr_0^3}.$$

Widać stąd, że wartość $F_r(r_0)$ musi być ujemna - orbity takie są możliwe tylko (co w sumie jest oczywiste), gdy siła jest przyciągająca.

Rozpatrzmy teraz ruch o energii E nieco większej niż $V_{\text{eff}}(r_0, L)$ - jeśli wszystkie tory ograniczone mają być zamknięte, to także i takie. Tor takiego ruchu musi odchyłać się od kołowego, ale jeśli w r_0 potencjał $V_{\text{eff}}(r, L)$ ma minimum, odchylenie to może być dowolnie małe, gdy $E \gtrsim V_{\text{eff}}(r_0, L)$. Ogólnie, tor (każdego) ruchu musi być rozwiązaniem równania Bineta ($1/r(\varphi) = u(\varphi)$):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = J(u) \equiv -\frac{m}{L^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right) \equiv -\frac{m}{L^2 u^2} F_r\left(\frac{1}{u}\right).$$

Ruch po orbicie kołowej o $u(\varphi) = u_0 = 1/r_0$ jest rozwiązaniem tego równania, gdy¹¹⁵ $u_0 = J(u_0)$. Poszukamy rozwiązania mało odbiegającego od orbity kołowej, tj. rozwiązania $u(\varphi) = u_0 + w(\varphi)$, zakładając, że $|w(\varphi)|/u_0 \ll 1$. Można wtedy prawą stronę równania Bineta rozwinąć w szereg Taylora wokół $u = u_0$:

$$J(u) = J(u_0) + w J_1 + \frac{1}{2} w^2 J_2 + \frac{1}{6} w^3 J_3 + \dots,$$

¹¹²Ruchy, w których $L = 0$ zachodzą wzdłuż prostej przechodzącej przez centrum siły; jeśli $V(r)$ ma "dołek" (albo dołki), to każdy ruch w takim dołku jest okresowy - zobacz zadania w rozdziale 3 - i jego tor jest trywialnie "zamknięty".

¹¹³Dla niektórych wartości E obszar dostępny zmiennej r może się składać z rozłącznych odcinków - rozpatrujemy wtedy jeden z nich.

¹¹⁴Trzeba założyć, że $r_{\min} > 0$, gdyż ruchy z $L \neq 0$, w trakcie których dla $t = t_{\text{cr}}$ zachodzi spadek na centrum, są "patologiczne" - ruchu naogół nie daje się przedłużyć na $t > t_{\text{cr}}$ (zobacz zadania 10.15 i 10.16) i problem zamkniętości toru traci sens.

¹¹⁵Równość ta jest oczywiście tym samym, co warunek $|F_r(r_0)| = mv^2/r_0$ bo $mv^2/r_0 \equiv L^2/mr_0^3$.

gdzie J_i są kolejnymi pochodnymi funkcji $J(u)$ obliczonymi w $u = u_0$. Ograniczymy się najpierw do pierwszego wyrazu rozwinięcia, co prowadzi do równania

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + (1 - J_1) w = 0,$$

na funkcję $w(\varphi)$.

$$\begin{aligned} J_1 &\equiv \left. \frac{dJ(u)}{du} \right|_{u_0} = \left. \frac{d}{du} \left(-\frac{m}{L^2 u^2} F_r \left(\frac{1}{u} \right) \right) \right|_{u_0} \\ &= \frac{2m}{L^2 u_0^3} F_r \left(\frac{1}{u_0} \right) + \frac{m}{L^2 u_0^2} r_0^2 \left. \frac{dF_r(r)}{dr} \right|_{1/u_0}. \end{aligned}$$

Korzystając z warunku $u_0 = J(u_0)$ możemy teraz w obu członach tej pochodnej zastąpić $1/L^2$ przez $-u_0^3/mF_r(1/u_0)$, co da

$$J_1 = -2 - \frac{r_0}{F_r(r_0)} \left. \frac{dF_r}{dr} \right|_{r_0}.$$

Zatem przybliżone równanie na $w(\varphi)$ ma postać

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \beta^2 w = 0, \quad \beta^2 \equiv 3 + \frac{r_0 F'_r(r_0)}{F_r(r_0)}.$$

Jeśli $\beta^2 \leq 0$, rozwiązania $w(\varphi)$, z wyjątkiem szczególnie dobranych warunków w jakimś ustalonym $\varphi = \varphi_0$, rosną nieograniczenie z φ i dokonane przybliżenie równania Bineta szybko przestaje być słuszne. Ponieważ rozpatrywaliśmy punkt r_0 z przedziału wyznaczonego przez warunek $V_{\text{eff}}(r, L) \leq E$, sytuacja taka może się zdarzyć, gdy $V_{\text{eff}}(r, L)$ ma w $r_0 = 1/u_0$ lokalne maksimum mniejsze od E a nie minimum; ruch wokół takiego lokalnego maksimum musi, oczywiście - w powodu warunku $V_{\text{eff}}(r, L) \leq E$ - zachodzić w ograniczonym obszarze, ale z powodu załamania się przybliżenia nie można powiedzieć, czy jego tor jest zamknięty, czy nie. Niemniej z tego samego powodu muszą wtedy w rozpatrywanym przedziale zmiennej r istnieć inne punkty, w których $V_{\text{eff}}(r, L)$ ma lokalne minimum i przenosimy wtedy analizę do jednego z takich punktów.

Jeśli $\beta^2 > 0$, rozwiązaniem są rzeczywiście małe oscylacje

$$w(\varphi) = a \cos(\beta\varphi + \delta).$$

czyli

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1}{r_0} + a \cos(\beta\varphi + \delta).$$

Ruch zachodzi pomiędzy r_- osiąganym dla $\beta\varphi + \delta = 0$, a r_+ osiąganym dla $\beta\varphi + \delta = \pi$. Kąt Φ zakreślany pomiędzy $r = r_+$, a $r = r_-$ w bogatej literaturze poświęconej problemowi Bertranda nazywa się kątem apsydalnym (ang. *the apsidal angle*) i jest jak widać równy

$$\Phi = \frac{\pi}{|\beta|} = \frac{\pi}{\sqrt{3 + r_0 F'_r(r_0)/F_r(r_0)}}.$$

Pouczające jest otrzymanie wzoru na kąt Φ drugą metodą (tak, jak w swojej niezwykle interesującej, choć fizyka trochę denerwującej, książce o mechanice każe W.I. Arnold). Jak zawsze,

$$\Phi = -\sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{r_+}^{r_-} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}(r)}} = \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{E - W(u)}},$$

gdzie $W(u) \equiv V_{\text{eff}}(1/u)$. Jeśli odchylenia u od u_0 są małe (tj. u_+ i u_- niewiele się różnią od u_0 będącego punktem ekstremalnym $W(u)$, w którym $dW/du = 0$, to w powyższej całce można $W(u)$ rozwinąć do drugiego rzędu w $u - u_0$:

$$\Phi \approx \sqrt{\frac{L^2}{2m}} \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{E - W_0 - \frac{1}{2}W_0''(u - u_0)^2}} = \pi \sqrt{\frac{L^2}{mW_0''}}.$$

(W polskim wydaniu książki Arnolda jest tu misprint - zamiast W jest jakieś niezdefiniowane V i zbędny czynnik r^2 ; poza tym Arnold ma $m = 1$, a jego M oznacza moment pędu L).

$$\begin{aligned} W_0'' \equiv \left. \frac{d^2 W(u)}{du^2} \right|_{u_0} &= -r_0^2 \left. \frac{d}{dr} \left(-r^2 \frac{d}{dr} \left(V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right) \right|_{1/u_0} \\ &= r_0^2 \left(2r_0 V'(r_0) + r_0^2 V''(r_0) + \frac{L^2}{mr_0^2} \right). \end{aligned}$$

Ponownie korzystając z warunku $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$ zastępujemy L^2/m przez $r_0^3 V'(r_0)$, otrzymując ten sam wzór na Φ , co wyżej, jeśli uwzględnimy to, że $F_r = -V'$.

Ważną cechą kąta Φ jest jego niezależność (w tym przybliżeniu) od energii (lub raczej nadwyżki energii nad energią odpowiadającą orbicie kołowej), czyli od wielkości zaburzenia.¹¹⁶ Cecha ta jest wykorzystywana w dowodzie twierdzenia Bertranda podanym przez W.I. Arnolda. Jasne w każdym razie jest, że aby rozpatrywany tor był zamknięty, β musi być liczbą wymierną.

Wyrażenie L przez $V'(r_0)$ (tj. przez $F_r(r_0)$) jest ważnym krokiem, bo umożliwia odpowiedź na pytanie, jak w okolicy r_0 musi zmieniać się potencjał $V(r)$, żeby kąt Φ nie zależał od wyboru r_0 . Istotnie, ponieważ szukamy potencjału w którym wszystkie ruchy ograniczone odbywają się po torach zamkniętych, można i należy rozpatrzeć, jak będzie wyglądał ruch po torze niewiele odchylającym się od nowego punktu r'_0 położonego nieskończenie blisko od punktu r_0 ; punkt r'_0 musi oczywiście odpowiadać trochę zmienionej wartości L^2 tak dobranej, by potencjał efektywny $V_{\text{eff}}(r, L)$ miał w nim minimum. Dzięki

¹¹⁶Może się to wydać dziwne na pierwszy rzut oka, bo w pierwszym odruchu ma się wrażenie, że orbicie kołowej powinien odpowiadać kąt $\Phi = 0$ i wtedy ciągłość Φ powinna prowadzić do jego zależności od wielkości odstępstwa od orbity kołowej. Tak jednak nie jest: kąt Φ jest dla orbity kołowej nieokreślony, tak samo jak współrzędna φ układu biegunowego nie jest określona, gdy $r = 0$ - przy schodzeniu do $r = 0$ z różnych kierunków kąt φ jest różny.

wyrażeniu L^2 przez $V'(r_0)$ można uzyskany wzór na Φ potraktować jak funkcję r_0 . Ponieważ rozpatrujemy punkt r'_0 przesunięty nieskończenie blisko r_0 , nowy tor będzie (na mocy ciągłości Φ jako funkcji punktu r_0) zamknięty jeśli Φ nie zmieni się (a β jest liczbą wymierną). Niezależność Φ od r_0 jest wtedy równoważna równaniu (pomijamy już ten subskrypt 0)

$$3 + \frac{r}{F_r(r)} \frac{dF_r(r)}{dr} = \beta^2,$$

które po scałkowaniu daje

$$F_r(r) = -\frac{|\kappa|}{r^{3-\beta^2}}.$$

Znak siły musi być ujemny - siła musi być przyciągająca, co jest intuicyjnie oczywiste (ale wyszło też już wcześniej jako warunek matematyczny). Tak więc potencjał musi być potęgowy. Co więcej, wzór na kąt apsydalny Φ mówi, że aby zamknięty mógł być tor nieskończenie odchylający się od kołowego, β musi być liczbą wymierną: $\beta = k/n$ (wtedy tor zamknie się po n pełnych oscylacjach promienia wokół $r = r_0$).

W literaturze spotyka się różne metody obliczania kąta Φ dla nieinfinityezymalnych odchyleń toru od kołowego. Tu rozpatrzmy metodę opartą na rachunku zaburzeń. W tym celu szukamy rozwiązania równania Bineta z funkcją $J(u)$ po prawej stronie rozwiniętą do trzeciego rzędu u wokół $u = u_0$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + \beta^2 w = \frac{1}{2}J_2w^2 + \frac{1}{6}J_3w^3,$$

w postaci szeregu ($\theta \equiv \beta\varphi$)

$$w(\varphi) = A_1 \cos \theta + A_0 + A_2 \cos 2\theta + A_3 \cos 3\theta + \dots,$$

traktując J_2 , A_0 i A_2 jak małe pierwszego rzędu ($\propto \varepsilon$), a J_3 i A_3 jak małe drugiego rzędu ($\propto \varepsilon^2$; A_1 jest oczywiście rzędu ε^0). Szukana postać rozwiązania zapewnia zamykanie się toru (jeśli $\beta = n/k$). Wstawiając postulowane rozwiązanie do równania i zachowując tylko wyrazy do rzędu ε^2 włącznie dostajemy po lewej stronie

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + \beta^2 w = \beta^2 A_0 - 3\beta^2 A_2 \cos 2\theta - 8\beta^2 A_3 \cos 3\theta,$$

a po prawej¹¹⁷

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_2w^2 + \frac{1}{6}J_3w^3 &= \frac{1}{2}J_2 (A_1^2 \cos^2 \theta + 2A_0A_1 \cos \theta + 2A_1A_2 \cos \theta \cos 2\theta) + \frac{1}{6}J_3A_1^3 \cos^3 \theta \\ &\equiv \frac{1}{2}J_2 \left[\frac{1}{2}A_1^2(1 + \cos 2\theta) + 2A_0A_1 \cos \theta + A_1A_2 \cos \theta + A_1A_2 \cos 3\theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{24}J_3A_1^3 [3 \cos \theta + \cos 3\theta]. \end{aligned}$$

¹¹⁷Przekształcając prawą stronę korzystamy z łatwych do udowodnienia tożsamości trygonometrycznych $2 \cos \theta \cos 2\theta = \cos \theta + \cos 3\theta$, $4 \cos^3 \theta = 3 \cos \theta + \cos 3\theta$.

Równanie Bineta będzie spełnione (z dokładnością do wyrazów rzędu ε^2) jeśli równe będą współczynniki przy takich samych wyrazach po obu stronach. Przyrównania do siebie po obu stronach wyrazów rzędu ε : stałych i proporcjonalnych do $\cos 2\theta$ oraz wyrazów rzędu ε^2 z $\cos 3\theta$ narzuca związki

$$A_0 = \frac{A_1^2 J_2}{4\beta^2}, \quad A_2 = -\frac{A_1^2 J_2}{12\beta^2}, \quad A_3 = -\frac{1}{8\beta^2} \left(\frac{A_1 A_2 J_2}{2} + \frac{A_1^3 J_3}{24} \right).$$

Wstawiając tak wyznaczone A_0 i A_2 do warunku zerowania się po prawej stronie wyrazów rzędu ε^2 proporcjonalnych do $\cos \theta$ (bo po lewej $\cos \theta$ nie występuje)

$$A_0 A_1 J_2 + \frac{1}{2} A_1 A_2 J_2 + \frac{1}{8} A_1^3 J_3 = 0,$$

znajdujemy, że równanie Bineta może być spełnione przez taki szereg wyższych harmonicznych, tylko jeśli

$$\frac{5J_2^2}{24\beta^2} + \frac{J_3}{8} = 0, \quad \text{czyli, tylko gdy} \quad 5J_2^2 + 3\beta^2 J_3 = 0.$$

Pozostaje więc obliczyć J_2 i J_3 dla $F_r(r) = -|\kappa|r^{\beta^2-3}$ czyli $F_r(1/u) = -|\kappa|u^{3-\beta^2}$. Mamy

$$J(u) = -\frac{m}{L^2 u^2} F_r(1/u) = \frac{m|\kappa|}{L^2} u^{1-\beta^2}.$$

Zatem (pamiętamy: $L^2 = -mu_0^{-3} F_r(1/u_0) = m|\kappa|u_0^{-\beta^2}$, co jest tym samym, co warunek $J(u_0) = u_0$ wyznaczający u_0 ; stąd $(m|\kappa|/L^2) = u_0^{\beta^2}$)

$$J_2 = \left. \frac{d^2 J(u)}{du^2} \right|_{u_0} = \frac{m|\kappa|}{L^2} (1 - \beta^2)(-\beta^2) u_0^{-1-\beta^2} = -\beta^2(1 - \beta^2) \frac{1}{u_0},$$

$$J_3 = \left. \frac{d^3 J(u)}{du^3} \right|_{u_0} = \frac{m|\kappa|}{L^2} (1 - \beta^4) \beta^2 u_0^{-2-\beta^2} = (1 - \beta^4) \beta^2 \frac{1}{u_0^2}.$$

Warunek przybiera więc postać

$$5\beta^4(1 - \beta^2)^2 + 3\beta^4(1 - \beta^4) \equiv 2\beta^4(1 - \beta^2)[4 - \beta^2] = 0.$$

Ponieważ czynnik β ma być większy od zera, jedynymi dopuszczalnymi rozwiązaniami są $\beta^2 = 1$ i $\beta^2 = 4$, czyli siły postaci

$$F_r(r) = -\frac{|\kappa|}{r^2}, \quad (\beta^2 = 1) \quad \text{oraz} \quad F_r(r) = -|\kappa|r, \quad (\beta^2 = 4).$$

Oczywiście przedstawione tu rozumowanie nie dowodzi, że dowolnie duże zaburzenia orbit kołowych ruchu w polu tych dwóch sił centralnych będą zawsze torami zamkniętymi - to wiemy z bezpośredniej analizy rozwiązań - wyklucza ono jednak, by taką właściwość mogły mieć jakieś inne siły centralne.

Zadanie 10.21

Zgodnie z prawami elektrodynamiki klasycznej ładunek elektryczny q poruszając się z przyspieszeniem promieniuje i traci energię. Wypromieniowana (czyli stracona) w przedziale dt czasu energia dE jest dana (w tym nienormalnym układzie SI) wzorem

$$dE = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \mathbf{a}^2(t) dt.$$

Przyjmując że spowodowana promieniowaniem strata energii elektronu na bohrowskiej orbicie kołowej¹¹⁸ w atomie wodoropodobnym (jeden elektron krążący wokół jądra o ładunku Ze) jest mała, oszacować czas życia takiego rządzonego prawami fizyki klasycznej atomu (tj. czas po którym elektron spadłby na jądro).

Rozwiązanie:

Na orbicie kołowej zachodzi związek ($|\kappa| = Ze^2/4\pi\epsilon_0$, a m_e jest masą elektronu) $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_e v^2 = |\kappa|/2r$ wynikający z tego, że iloczyn masy i przyspieszenia dośrodkowego jest równy sile przyciągającej. Stąd energia całkowita elektronu $E = E_{\text{kin}} - |\kappa|/r$ jest równa $E = -|\kappa|/2r$ i $dE = (|\kappa|/2r^2) dr$. Ponieważ powodująca zmianę promienia orbity zmiana energii dE elektronu jest skutkiem wypromieniowywania przez elektron energii, musi także zachodzić związek

$$\frac{|\kappa|}{2r^2} dr = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2 dt.$$

Przyspieszenie a jest w przybliżeniu równe przyspieszeniu dośrodkowemu (pomijamy także związane z hamowaniem przyspieszenie styczne do orbity), zatem

$$m_e a \approx \frac{m_e v^2}{r} = \frac{|\kappa|}{r^2}.$$

Wyrażając stąd a przez r otrzymujemy więc związek

$$\frac{|\kappa|}{2r^2} dr = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{|\kappa|^2}{m_e^2 r^4} dt,$$

który, po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu stronami (od r_0 do 0 i od 0 do τ - czasu życia), daje

$$r_0^3 = 4 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar c}{c^3} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar c}{m_e^2} \tau,$$

Pamiętając, że $e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c = \alpha_{\text{EM}} = 1/137$, i że za promień r_0 powinno się przyjąć promień Bohra $a_B = \hbar c/m_e c^2 Z \alpha_{\text{EM}} \approx 0.5 \cdot 10^{-10} \text{m}$, znajdujemy, że

$$\tau = \frac{1}{4Z\alpha_{\text{EM}}^2} \left(\frac{m_e c^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{a_B^3}{c} = \frac{1}{4Z^4 \alpha_{\text{EM}}^5} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{1}{c},$$

¹¹⁸Jak wiadomo N. Bohr był z matematyki noga (wielkość Bohra leżała w czymś zupełnie innym) i konstruując swój model atomu był w stanie rozpatrzeć jedynie orbity kołowe; eliptyczne musiał już opracować A. Sommerfeld. Tu jednak jest to okoliczność szczęśliwa, gdyż przyjętą tu metodę można zastosować w zasadzie tylko do orbit kołowych.

Ponieważ $\hbar c = 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm} = 197 \cdot 10^{-15} \text{ MeV}\cdot\text{m}$, a $m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV}$ otrzymujemy, dla $Z = 1$, około 10^{-11} s .

Zadanie 10.22 ¹¹⁹

Posługując się mechaniką newtonowską obliczyć jak zmienia się z czasem częstotliwość ν fal grawitacyjnych (rejestrowanych na Ziemi przez detektory LIGO) emitowanych przez układ dwóch czarnych dziur o masach M_1 i M_2 wirujących wokół swojego środka masy, jeśli wiadomo, że częstość $2\pi\nu$ emitowanych fal jest równa podwojonej prędkości kątowej ω ich obrotów, a moc P wypromieniowywana przez taki układ jest dana wzorem

$$P = \alpha G^a I^2 \omega^b c^d,$$

w którym $\alpha = 32/5$, c jest prędkością światła, a I jest momentem bezwładności względem osi obrotu układu dwóch czarnych dziur. Wykładniki a , b i d w podanym wzorze na P trzeba ustalić na podstawie analizy wymiarowej. Przyjąć, że środek masy układu czarnych dziur pozostaje w spoczynku w układzie, w którym emitowane przezeń promieniowanie jest rejestrowane, a ruch względny czarnych dziur odbywa się po orbicie kołowej.

Rozwiązanie:

Układ równań wyznaczający ruch przyciągających się grawitacyjnie dwóch mas M_1 i M_2 ($\kappa = GM_1 M_2$):

$$M_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\kappa \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad M_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \kappa \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

można przepisać w równoważnej postaci

$$\frac{d^2}{dt^2}(M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2) = \mathbf{0}, \quad M_{\text{red}} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\kappa \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

w której $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, a $M_{\text{red}} = M_2 M_2 / (M_1 + M_2)$. W ten sposób ruch układu dwóch ciał sprowadzony zostaje do swobodnego ruchu środka ich masy i ich ruchu względnego. Zgodnie z założeniem, problem ruchu układu dwóch czarnych dziur rozpatrujemy w układzie odniesienia, w którym ich środek masy pozostaje w spoczynku; przyjmiemy też, że jest on początkiem układu odniesienia, tj. że $M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$. Wówczas

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mathbf{r}.$$

Ze zróżniczkowania tych wzorów po czasie wynikają też związki

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mathbf{v}.$$

Jeśli względny ruch czarnych dziur odbywa się po orbicie kołowej¹²⁰ wielkości takie jak względna prędkość $v = |\mathbf{v}|$ dziur i ich wzajemna odległość $r \equiv |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| \equiv r_1 + r_2$,

¹¹⁹H. Mathur, K. Brown, A. Lowenstein, *Am. J. Phys.* **85** (2017) 676.

¹²⁰Dokładniejsze rachunki pokazują, iż wskutek wypromieniowywania przez taki układ energii początkowo eliptyczna orbita szybko staje się orbitą kołową.

a zatem także prędkość kątowna $\omega \equiv v/r$ ich obrotu oraz moment bezwładności układu (względem ich środka dziur) $I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2$ są ze sobą ściśle powiązane: dowolne trzy z tych czterech wielkości można wyrazić przez czwartą. Ponieważ częstotliwość rejestrowanych fal grawitacyjnych jest proporcjonalna do prędkości kątowej ω , wygodnie będzie od razu wyrazić przez nią wszystkie pozostałe wielkości.

W szczególności moment bezwładności I dwóch dziur można wyrazić przez ich wzajemną odległość r korzystając z wypisanych już związków:

$$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = M_1 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} r \right)^2 + M_2 \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} r \right)^2 = M_{\text{red}} r^2.$$

Ponieważ, jak zawsze przy ruchu po orbicie kołowej, spełniony jest związek

$$M_{\text{red}} \frac{v^2}{r} \equiv M_{\text{red}} r \omega^2 = \frac{\kappa}{r^2},$$

odległość względna r jest powiązana z prędkością kątowną wzorem

$$r^3 = \frac{\kappa}{M_{\text{red}} \omega^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{\omega^2}.$$

Zatem

$$I = M_{\text{red}} r^2 = M_{\text{red}} [G(M_1 + M_2)]^{2/3} \omega^{-4/3} = \frac{G^{2/3} M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} \omega^{-4/3}.$$

Ponadto, całkowita energia E ruchu względnego po orbicie kołowej jest równa¹²¹

$$\frac{1}{2} M_{\text{red}} v^2 - \frac{\kappa}{r} \equiv \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{\kappa}{r} = -\frac{\kappa}{2r}.$$

Zatem

$$E = -E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2} I \omega^2 = -\frac{1}{2} \frac{G^{2/3} M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} \omega^{2/3}.$$

W analogiczny sposób wzór na wypromieniowywaną moc P można wyrazić przez samą prędkość kątowną ω . Najpierw trzeba jednak ustalić w tym wzorze wykładniki a , b i c .

Wymiarem fizycznym stałej G jest $[G] = [L]^3 [M]^{-1} [T]^{-2}$. Z kolei moc P ma wymiar $[P] = [M] [L]^2 [T]^{-3}$. Zatem zgodność wymiarów obu stron związku $P \propto G^a I^2 \omega^b c^d$:

$$\frac{[M] [L]^2}{[T]^3} = \left(\frac{[L]^3}{[M] [T]^2} \right)^a [M]^2 [L]^4 \frac{1}{[T]^b} \left(\frac{[L]}{[T]} \right)^d,$$

¹²¹Energia kinetyczna ruchu względnego jest oczywiście tożsama z energią kinetyczną całego układu liczoną względem inercjalnego układu środka jego masy:

$$\frac{1}{2} (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2) = \frac{1}{2} \left[M_1 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} v \right)^2 + M_2 \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} v \right)^2 \right] = \frac{1}{2} M_{\text{red}} v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Tym samym również całkowita energia ruchu względnego jest tożsama z całkowitą energią układu.

wymaga, by $a = 1$, $b = 6$, $d = -5$. Zatem

$$P = \alpha \frac{GI^2\omega^6}{c^5} = \alpha \frac{G^{7/3}}{c^5} \omega^{10/3} \frac{M_1^2 M_2^2}{(M_1 + M_2)^{2/3}}.$$

Przyrównując teraz (zob. zadania 10.20, 10.21 oraz 2.15) szybkość

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3} \frac{G^{2/3} M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} \omega^{-1/3} \frac{d\omega}{dt},$$

utruty energii układu do wypromieniowywanej mocy P , otrzymuje się równanie

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{1}{3\alpha} \omega^{-11/3} \frac{d\omega}{dt} \right)^{3/5},$$

wyznaczające zależność prędkości kątowej ω , a więc także i częstotliwości ν rejestrowanych przez detektory LIGO fal grawitacyjnych, od czasu. Mająca wymiar masy wielkość $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \equiv \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}},$$

jest w literaturze zwana masą *ćwierkania* lub *świergotu* (the *chirp mass*). Po scałkowaniu od $\omega(t_1) = \pi\nu(t_1) \equiv \pi\nu_1$ do $\omega(t_2) = \pi\nu(t_2) \equiv \pi\nu_2$ (bo $2\omega = 2\pi\nu$) otrzymujemy stąd związek

$$\frac{1}{\nu_1^{8/3}} - \frac{1}{\nu_2^{8/3}} = 8\alpha\pi^{8/3} \frac{G^{5/3} \mathcal{M}^{5/3}}{c^5} (t_2 - t_1).$$

Zgodnie z tym związkiem, $\nu_2 \rightarrow \infty$ po skończonym czasie $t_2 - t_1$. W rzeczywistości w momencie tym układ dziur zaczyna się zlewać by, w końcu, stworzyć jedną czarną dziurę. Wykorzystywane proste newtonowskie rozważania przestają więc być wtedy słuszne (ten etap ewolucji układu czarnych dziur musi być już modelowany przy użyciu równań Ogólnej teorii względności, które w tym celu trzeba rozwiązywać numerycznie), a rzeczywisty wykres $\nu(t)$ urywa się na pewnej wartości $\nu_{\max}$. Niemniej, znajdując na wykresie zależności od czasu rejestrowanej częstotliwości ν punkt t_2 , w którym ν zaczyna ostro iść do góry (tak, iż można położyć $\nu(t_2) \approx \infty$) i odczytując wartość $\nu(t_1)$ dla jakiegoś wcześniejszego czasu t_1 można ze związku

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G\pi^{8/5}(8\alpha)^{3/5}\nu_1^{8/5}(t_2 - t_1)^{3/5}},$$

wyznaczyć wartość $\mathcal{M}$. W ten sposób z oryginalnego przedstawionego przez kolaborację LIGO wykresu odpowiadającego zdarzeniu oznaczanemu GW150914, na którym $\nu_1 \approx 42$ Hz w chwili t_1 , a $t_2 - t_1 \approx 0.082$ s, otrzymuje się $\mathcal{M} \approx 35M_S$ ($M_S = 1.988 \times 10^{30}$ kg jest tu masą Słońca).

Masa $\mathcal{M}$ jest tylko pewną kombinacją mas obu czarnych dziur, ale kładąc $M_1 = \xi M_{\text{tot}}$, $M_2 = (1 - \xi)M_{\text{tot}}$, gdzie $M_{\text{tot}} = M_1 + M_2$, a $\xi \in [0, 1]$, można łatwo sprawdzić, że $M_{\text{tot}} \geq 4^{3/5}\mathcal{M}$. Tak więc sumaryczna masa M_{tot} czarnych dziur uczestniczących w zdarzeniu GW150914 była większa niż $70M_S$. Bardziej dokładnie można oszacować wartość M_{tot} przyjmując, że faza zlewania się dziur rozpoczyna się wtedy, gdy ich wzajemna odległość staje się równa sumie ich promieni Schwarzschilda $R_S(M_1) + R_S(M_2)$, gdzie

$$R_S(M) = \frac{2GM}{c^2},$$

jest tą odległością od (punktowej) masy M , po osiągnięciu której prędkość (tzw. “druga kosmiczna”) konieczna do ucieczki masy próbnej do nieskończoności musiałaby być większa od prędkości światła c . Prędkość kątową ω_{cr} z jaką układ czarnych dziur obraca się w chwili, gdy $r_1 + r_2 \equiv r = R_S(M_1) + R_S(M_2) = 2G(M_1 + M_2)/c^2$ można otrzymać z wypisanego wyżej związku $r^3 = G(M_1 + M_2)/\omega^2$. Jest ona równa

$$\omega_{\text{cr}} = \frac{c^3}{\sqrt{8}G(M_1 + M_2)}.$$

Jeśli utożsamimy ω_{cr}/π z maksymalną częstotliwością $\nu_{\text{max}} \approx 300$ Hz na przedstawionym przez LIGO wykresie odpowiadającym zdarzeniu GW150914 (tzn. z częstotliwością, na której ten wykres $\nu(t)$ urywa się, zamiast dążyć asymptotycznie do nieskończoności), to z powyższego związku otrzyma się $M_{\text{tot}} = M_1 + M_2$. Z wykresu można więc otrzymać

$$M_{\text{tot}} = \frac{c^3}{\pi\sqrt{8}G\nu_{\text{max}}},$$

co daje $M_{\text{tot}} = M_1 + M_2 \approx 76M_S$. Łącząc ten wynik z $\mathcal{M} \approx 30M_S$ można oszacować, że $M_1 \approx 36M_S$, $M_2 \approx 29M_S$.

Początkową wzajemną odległość czarnych dziur można także oszacować przyjmując, że odpowiada ona częstotliwości fal grawitacyjnych w chwili, gdy ich sygnał zaczyna być rejestrowany przez detektory LIGO czyli, w przypadku zdarzenia GW150914, częstotliwości $\nu(t_1) \approx 42$ Hz. Ze związku $r_1^3 = G(M_1 + M_2)/\omega_1^2 = G(M_1 + M_2)/\pi^2\nu^2(t_1)$ otrzymuje się w ten sposób $r_1 \approx 790$ km. (Odległość $R_S(M_1) + R_S(M_2)$ jest równa około 100 km.)

Jeśli przyjąć, że chwila t_1 , w której pojawia się sygnał odpowiada pomijalnie małej odwrotności wzajemnej odległości czarnych dziur, a moment t_2 , kiedy częstotliwość $\nu(t)$ staje się praktycznie nieskończona odpowiada $r = R_S(M_1) + R_S(M_2) = 2GM_{\text{tot}}/c^2$, to wypromieniowaną (w postaci fal grawitacyjnych) między tymi chwilami energię E_{rad} można obliczyć ze wzoru

$$E_{\text{rad}} = \left(-\frac{\kappa}{2r(t_0)}\right) - \left(-\frac{\kappa}{2r(t_1)}\right) \approx \frac{\kappa}{2r(t_1)} = \frac{\kappa}{2R_S(M_1) + R_S(M_2)} = \frac{1}{4} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} c^2.$$

Dla $M_1 = 36M_S$ i $M_2 = 29M_S$ otrzymuje się energię $E_{\text{rad}} \approx 4M_S c^2$ wypromieniowaną w czasie $\Delta t = t_2 - t_1 \approx 0.08$ s.

14 ROZPRASZANIE I PRZEKROJE CZYNNE

Przypomnienie

Przekrój czynny jest wielkością umożliwiającą statystyczne (probabilistyczne) ujmowanie rezultatu wielu zderzeń wtedy, gdy nie śledzimy toru pojedynczej cząstki, a zajmujemy się grupą cząstek o jednakowych masach i prędkościach tworzących jednorodny strumień padający na powierzchnię materiału zawierającego wiele identycznych centrów oddziaływania, z którymi padające cząstki oddziałują według jednego i tego samego dla wszystkich prawa.

Jeśli na blok prostopadłościenny o grubości Δx i polu powierzchni równym A , w którym ze stałą gęstością n rozmieszczone są centra oddziaływania, pada, prostopadle do powierzchni tego bloku, jednorodny strumień Φ cząstek i rezultatem każdego pojedynczego aktu oddziaływania cząstki padającej z centrum może być pewne zdarzenie P , które z jakichś powodów nas interesuje i podlega rejestracji (przez detektory), to liczba N_P takich zdarzeń P zarejestrowanych w czasie Δt jest dana wzorem¹²²

$$N_P = \Delta t \cdot (n \cdot A \cdot \Delta x) \cdot \Phi \cdot \sigma,$$

w którym σ - przekrój czynny na zdarzenie¹²³ P - jest wielkością o wymiarze pola powierzchni charakteryzującą szansę zajścia P w pojedynczym akcie oddziaływania cząstki padającej z centrum oddziaływania.

Jeśli zdarzenia P charakteryzują się pewnymi parametrami $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$, które mogą zmieniać się w sposób ciągły, to zwykle w takiej sytuacji interesuje nas liczba $dN_{\mathbf{l}}$ takich zdarzeń, w których zmienna $\mathbf{l}$ przyjmuje wartości ze zbioru $(\mathbf{l}, \mathbf{l} + d\mathbf{l})$; przekrój czynny $d\sigma$ jest wtedy wielkością różniczkową.

Np. w typowej sytuacji, w której blok zawiera centra sił rozpraszających nadlatujące cząstki, interesuje nas liczba $dN_{\theta, \varphi}$ cząstek nadlatujących z nieskończoności, gdzie miały energię E każda, rozproszonych (w czasie Δt) w kąt bryłowy $d\Omega(\theta, \varphi) \equiv d\varphi d\theta \sin \theta$. W celu znalezienia potrzebnego do obliczenia tej liczby (w konkretnych warunkach eksperymentalnych określanych przez $\Phi, A, n, \Delta x$) różniczkowego przekroju czynnego rozpraszania $d\sigma(E)$ rozpatrujemy pojedyncze centrum oddziaływania i pojedynczą cząstkę nadlatującą z parametrem zderzenia b , tj. odległością w nieskończoności od prostej ℓ równoległej do jej prędkości i przechodzącej przez centrum oddziaływania (w którym umieszczamy początek układu odniesienia) i wyznaczamy (na podstawie praw mechaniki) kierunek w którym odleci ona w wyniku oddziaływania. Jeśli oś z wybrana jest wzdłuż prostej ℓ i osie x, y są ustalone, to prawa te pozwalają powiązać kierunek scharakteryzowany kątami θ i φ w którym cząstka oddali się po oddziaływaniu z jej położeniem w stosunku do osi (z jej odległością b od osi i kątem φ) w nieskończoności przed oddziaływaniem. Jeśli cząstka lecąca przez wycinek $\frac{1}{2}[(b+db)^2 - b^2]d\varphi \approx bdbd\varphi$ powierzchni prostopadłej do osi ℓ oddala

¹²²Zakładamy tu, że szerokość Δx jest mała na tyle, by można było pominąć przypadki oddziaływania cząstki padającej z więcej niż jednym centrum oddziaływania.

¹²³Utrwalił się taki dziwoląg językowy, którego jak niepodległości broni jakaś zgrzybiała Komisja Językowa PTF; ja wolę mówić "przekrój czynny zdarzenia" bo jest on właśnie pewną charakterystyką (właściwością) tego zdarzenia.

się po oddziaływaniu w kierunku wyznaczonym przez przedziały $(\theta, \theta + d\theta)$ i $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, to różniczkowy przekrój czynny tego zdarzenia, $d\sigma(E)$, jest równy

$$d\sigma(E) = b db d\varphi = b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta d\varphi = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\Omega \equiv \frac{1}{2 \sin \theta} \left| \frac{db^2}{d\theta} \right| d\Omega.$$

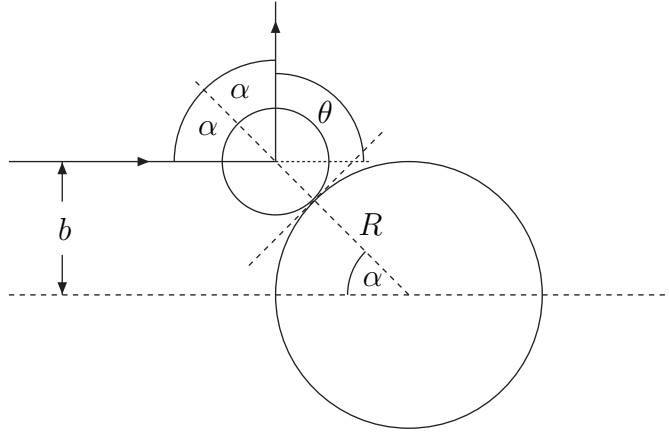
Zatem w celu wyznaczenia $d\sigma(E) = d\sigma(E, \theta)$ należy ztem znaleźć (jednoznaczny) związek $\theta = \theta(b)$, odwrócić go, tj. znaleźć związek $b = b(\theta)$ i wykorzystać go w powyższym wzorze. Ponieważ pochodna b^2 (lub b) po θ może być ujemna, we wzorze tym musi stać jej wartość bezwzględna. Ponadto, jeśli związek $b = b(\theta)$ nie jest jednoznaczny (a nie musi być - funkcja ta może mieć kilka gałęzi $b = b_i(\theta)$ $i = 1, \dots, g$), należy zsumować wszystkie możliwości:

$$d\sigma(E) \equiv \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{i=1}^g \left| \frac{db_i^2}{d\theta} \right| d\Omega,$$

ponieważ w takiej sytuacji każdy z przedziałów $(b_i, b_i + db_i)$ prowadzi do rozproszenia cząstki w kierunku $(\theta, \theta + d\theta)$.

Należy także podkreślić, że przekrój czynny jest wielkością dość uniwersalną i można pytać o przekrój czynny zajścia dowolnego zdarzenia w wyniku określonej reakcji (np. wyprodukowania w wyniku rozpraszania cząstek na centrum oddziaływania słońca z trąbą o długości w przedziale od l do $l + dl$ lub innego zwierzaka - w mechanice klasycznej przekrój czynny taki będzie oczywiście zerowy, ale w mechanice kwantowej, to kto wie...).

Proces rozpraszania można też obserwować z układu, w którym porusza się również tarcza. Znika wtedy w zasadzie rozróżnienie, co jest tarczą, a co padającą wiązką. Przekrój czynny jest wtedy otrzymywany z obliczonego w układzie, w którym tarcza spoczywa przez odpowiednią transformację (Galileusza w przypadku nierelatywistycznym, lub Lorentza, w przypadku relatywistycznym) do układu poruszającego się.



Rysunek 54: Elastyczne rozpraszanie kuli o promieniu r na unieruchomionej kuli o promieniu R . Z rysunku widać, że $\theta + 2\alpha = \pi$.

Zadanie 11.1

Obliczyć różniczkowy i całkowity przekrój czynny elastycznego rozpraszania sztywnej kuli o promieniu r na unieruchomionej kuli o promieniu R .

Rozwiązanie:

Jak zawsze, aby obliczyć przekrój czynny trzeba znaleźć zależność kąta rozproszenia od parametru zderzenia b , tj. funkcję $\theta = \theta(b)$, a następnie odwrócić ją, by wyznaczyć $b = b(\theta)$. W rozpatrywanym tu przypadku związek $\theta = \theta(b)$ ma charakter czysto geometryczny i nie zależy od prędkości (czyli energii) padającej kuli o promieniu r . Z rysunku 54 widać, że zachodzi związek $2\alpha + \theta = \pi$, czyli

$$\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Także z tegoż rysunku 54 można odczytać, że

$$b = (r + R) \sin \alpha = (r + R) \cos \frac{\theta}{2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} d\sigma &= b(\theta) \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| d\varphi d\theta = \frac{1}{2} (r + R)^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4} (r + R)^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{1}{4} (r + R)^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Zatem różniczkowy przekrój czynny nie zależy od kąta θ (jest izotropowy)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} (r + R)^2,$$

a całkowity przekrój czynny takiego elastycznego rozpraszania jest, zgodnie ze zdrową intuicją (i sensem przekroju czynnego, jako pola powierzchni, w którą jeśli cząstka padająca leci, to się rozproszy), równy

$$\sigma = \pi (r + R)^2.$$

Zadanie 11.2

Obliczyć przekrój czynny $\sigma_{\text{zderz}}(E)$ na zderzenie z planetą o promieniu R i masie M meteorytu (traktowanego jak punkt) o masie m nadlatującego z nieskończoności i mającego energię E .

Rozwiązanie:

Aby znaleźć warunek, jaki musi spełniać parametr zderzenia b nadlatującego meteorytu, by uderzył on w Ziemię nalizujemy potencjał efektywny

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{|\kappa|}{r} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

w którym $L = mv_{\infty}b$, czyli $L^2 = 2mEb^2$. Przy ustalonej energii E , odległości mniejsze niż $r = R$ są dla meteorytu osiągalne tylko, gdy jego moment pędu L (a zatem parametr zderzenia b) jest taki, że $V_{\text{eff}}(R) \leq E$, tj. gdy

$$-\frac{|\kappa|}{R} + \frac{L^2}{2mR^2} \equiv -\frac{|\kappa|}{R} + \frac{b^2 E}{R^2} < E.$$

Stąd otrzymujemy warunek, że przy ustalonej energii E parametr zderzenia b musi być mniejszy niż

$$b^2 < b_{\text{max}}^2 = R^2 \left(1 + \frac{|\kappa|}{RE} \right).$$

Stąd

$$\sigma_{\text{zderz}}(E) = \pi R^2 \left(1 + \frac{|\kappa|}{RE} \right).$$

Przekrój czynny jest równy czynnikowi geometrycznemu πR^2 pomnożonemu przez malejący z energią E (im wyższa energia E meteorytu, tym trudniej sile grawitacji “zagiąć” jego tor) “czynnik Sommerfelda”.

Spowodowany jakimś słabym przyciągającym oddziaływaniem (wciąż hipotetycznych) reliktowych cząstek ciemnej materii i zwiększający przekrój czynny ich anihilacji czynnik Sommerfelda mogłyby tłumaczyć dlaczego może ona w centrum Galaktyki zachodzić znacznie wydajniej, niż wtedy, gdy cząstki te anihilowały w pierwotnej plazmie kosmicznej pozostałej po Wielkim Wybuchu,¹²⁴ pozostawiając tylko ich tzw. gęstość reliktową stanowiącą dziś ok. 23% energii Wszechświata. Oczywiście nie ma pewności, że obserwowane w centrum Galaktyki procesy astrofizyczne są właśnie anihilacją cząstek ciemnej materii. Rozważania odwołujące się do czynnika Sommerfelda spowodowanego jakimś, też hipotetycznym, oddziaływaniem są typową ilustracją prób składania kosmicznego “puzzla”. Przykład przekroju czynnego na zderzenie meteorytu z planetą zawsze jest jednak przywoływany aby zilustrować rolę możliwych dodatkowych oddziaływań między cząstkami ciemnej materii.

¹²⁴Oczywiście Wielki Wybuch jest tu tylko umowną nazwą procesu, w którym po okresie inflacyjnej ekspansji Wszechświat “podgrzał” się do dość wysokiej temperatury T , tj. wypełnił różnymi cząstkami o dość wysokiej średniej energii.

Przypomnienie

W dynamice bryły sztywnej rolę masy odgrywa wielkość $\hat{\mathbf{I}}_{(O)}$ zwana tensorem jej momentu bezwładności względem punktu O . Jeśli z O poprowadzić wektory wodzące $\mathbf{r}_a$ do wszystkich infinitezimalnych elementów bryły o masach Δm_a , to tensor $\hat{\mathbf{I}}_{(O)}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{I}}_{(O)} = \sum_a \Delta m_a [\mathbf{r}_a^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a] .$$

Tensor jest, tak jak “żywe” wektory (w sprawie “żywości” wektorów - zob. mój skrypt do algebry), obiektem geometrycznym i nie zależy od układu odniesienia.¹²⁵ Zależy tylko od punktu O , względem którego jest zdefiniowany. Jeśli bryła obraca się wokół osi przechodzącej przez O z (chwilową) prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, to związany z tym obrotem moment pędu $\mathbf{J}_{(O)}$ (całkowity moment pędu bryły względem początku jakiegoś dowolnie wybranego układu inercjalnego ma jeszcze inne przyczynki - zob. niżej) jest równy¹²⁶

$$\mathbf{J}_{(O)} = \hat{\mathbf{I}}_{(O)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_a \Delta m_a \{ \mathbf{r}_a^2 [\mathbf{e}_x (\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{e}_y (\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\omega})] - \mathbf{r}_a (\mathbf{r}_a \cdot \boldsymbol{\omega}) \} .$$

Jeśli wprowadzić układ odniesienia o początku w punkcie O i wersorach $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, to tensor można zapisać w postaci

$$\hat{\mathbf{I}}_{(O)} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j I_O^{ij} ,$$

i reprezentować go jego dziewięcioma składowymi $(\hat{I}_{(O)})^{ij}$ w bazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Tworzą one macierz

$$\hat{I}_{(O)} = \sum_a \Delta m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -y_a x_a & x_a^2 + z_a^2 & -y_a z_a \\ -z_a x_a & -z_a y_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix} ,$$

lub, w notacji wskaźnikowej,

$$\hat{I}_{(O)}^{ij} = \sum_a \Delta m_a (\delta^{ij} \mathbf{r}_a^2 - r_a^i r_a^j) ,$$

a w wersji ciągłej, w której $\rho(\mathbf{r})$ jest lokalną gęstością masy bryły,

$$\hat{I}_{(O)}^{ij} = \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\delta^{ij} \mathbf{r}^2 - r^i r^j) .$$

¹²⁵Tensor $\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ ma tę samą postać niezależnie od wyboru ortonormalnego układu wersorów $\mathbf{e}_i$. Dzięki temu zdefiniowany podanym wzorem tensor $\hat{\mathbf{I}}_{(O)}$ rzeczywiście nie zależy od wyboru układu odniesienia (wersorów $\mathbf{e}_i$).

¹²⁶Działanie tensora na wektor wykorzystuje tu kanoniczny izomorfizm Frecheta-Riesza wektorów i form, który w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ sprowadza się do działania przez zwykły iloczyn skalarny. W rzeczywistości tensor $\hat{\mathbf{I}}_O$ powinien być elementem przestrzeni $V \otimes V^*$ (V^* jest przestrzenią form nad V - nad przestrzenią, w której “żyje” wektor $\boldsymbol{\omega}$), ale tu nie musimy się takimi szczegółami przejmować, bo nic z nich nie wynika dla “zdrowej” fizyki.

Związany z obrotem wokół punktu O moment pędu bryły można zatem napisać w postaci

$$\mathbf{J}_{(O)} = \mathbf{e}_i J_{(O)}^i = \mathbf{e}_i \hat{I}_{(O)}^{ij} \delta_{jk} \omega^k.$$

Zatem składowe $J_{(O)}^i$ wektora $\mathbf{J}_{(O)}$ uzyskujemy działając po prostu macierzą $\hat{I}_{(O)}$ na kolumnienkę składowych wektora prędkości kątowej.

Jeśli znany jest tensor $\hat{\mathbf{I}}_{(\text{CM})}$ momentu bezwładności bryły względem jej środka masy (CM), to tensor $\hat{\mathbf{I}}_{(O)}$ względem punktu O , do którego biegnie od środka masy wektor $\mathbf{R}$ można otrzymać ze wzoru (twierdzenie Steinera, zob. zadanie 12.2)

$$\hat{\mathbf{I}}_{(O)} = \hat{\mathbf{I}}_{(\text{CM})} + M [\mathbf{R}^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}],$$

w którym M jest całkowitą masą bryły.

Każdy ruch bryły sztywnej (względem wybranego układu inercjalnego) można złożyć z ruchu postępowego dowolnie wybranego punktu O w układzie związanym na sztywno z bryłą (punkt ten może być punktem samej bryły, ale może też leżeć poza nią) i obrotu bryły wokół tego punktu z (w ogólności zmieniającą się w czasie) prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Prędkość kątowa bryły jest wektorem niezależnym od wyboru punktu O , który wybrany został jako ten, przez który przechodzi jej chwilowa oś obrotu. Infinitesimalne przemieszczenie $d\boldsymbol{\tau}_A$ (względem wybranego układu inercjalnego) dowolnego punktu A bryły można zawsze zapisać jako

$$d\boldsymbol{\tau}_A = d\mathbf{r}_O + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{OA},$$

gdzie $\mathbf{r}_O$ jest wektorem wodzącym punktu O , $\mathbf{r}_{OA}$ wektorem biegnącym od punktu O do punktu A , a $d\boldsymbol{\theta}$ infinitesimalnym kątem obrotu bryły wokół jej chwilowej osi obrotu przechodzącej przez A (tj. $d\boldsymbol{\theta}/dt = \boldsymbol{\omega}$). Wzór ten można wykorzystywać do wyznaczania wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.

Dynamiką bryły sztywnej rządzą dwa równania:

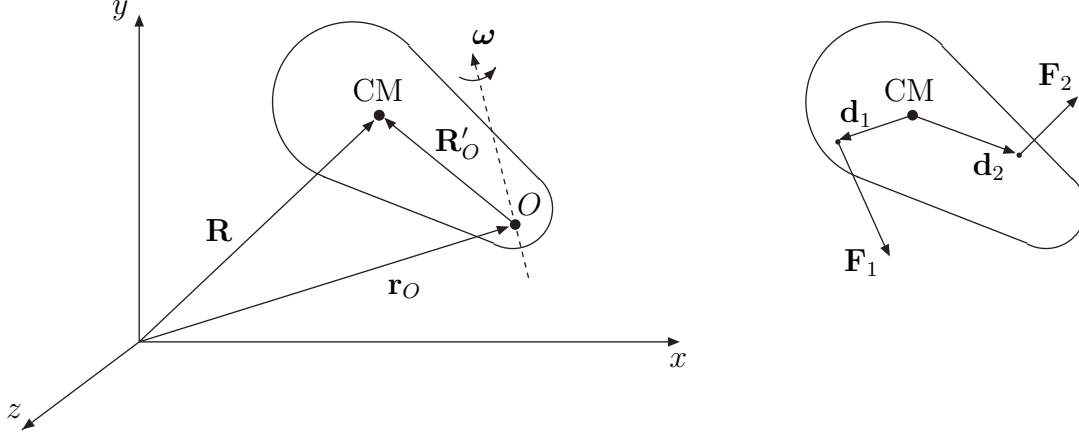
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{J} &= \mathbf{D}, \\ \frac{d^2}{dt^2} M\mathbf{R} &= \mathbf{F}. \end{aligned}$$

$\mathbf{R}$ jest tu położeniem środka masy bryły w dowolnie wybranym *układzie inercjalnym*, $\mathbf{F}$ wektorową sumą $\sum_a \mathbf{F}_a$ wszystkich sił na nią działających (choćby były przyłożone w różnych jej punktach), $\mathbf{D} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a$ sumą momentów tych sił liczonych względem początku wybranego układu inercjalnego, a $\mathbf{J}$ jest momentem pędu bryły również liczonym względem początku tegoż układu inercjalnego. Wektor $\mathbf{J}$ jest w ogólności dany wzorem

$$\mathbf{J} = M\mathbf{R} \times \mathbf{v}_O + M\mathbf{r}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) + \hat{\mathbf{I}}_{(O)} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

W powyższym wzorze $\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{r}}_O$ jest prędkością względem układu inercjalnego punktu O , a $\mathbf{R}'_O$ jest wektorem idącym od punktu O do środka masy bryły; zatem $\mathbf{R} = \mathbf{r}_O + \mathbf{R}'_O$ (zob.

rysunek 55). $\hat{\mathbf{I}}_{(O)}$ jest tensorem momentu bezwładności bryły względem punktu O . Punkt O , jak już było powiedziane, może być, podobnie jak układ inercjalny, wybrany arbitralnie ale (co bardzo ważne - zob. np. zadanie 12.15) jest przyczepiony do układu związanego a bryłą i wobec tego zmienia wraz z nią swe położenie względem układu inercjalnego. Pochodne po czasie występujące w podanych tu równaniach ruchu bryły są pochodnymi obliczanymi w układzie inercjalnym.



Rysunek 55: Ruch bryły sztywnej jako złożenie ruchu postępowego (z prędkością $\mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{r}}_O$) wybranego (dowolnego, ale związanego z bryłą) punktu O i obrotu z chwilową prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ wokół osi przechodzącej przez punkt O . Definicje wektorów.

Ważne uproszczenie występuje, gdy jako punkt O obrany zostaje środek masy bryły (jednak nie zawsze jest to najwygodniejsze), tj. gdy $\mathbf{r}_O = \mathbf{R}$, a $\mathbf{R}'_O = \mathbf{0}$. Wówczas

$$\mathbf{J} = M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{J}_{(\text{CM})}.$$

$\mathbf{J}_{(\text{CM})}$ można wtedy uważać za “wewnętrzny” moment pędu (chciałoby się rzec: spin) bryły liczony względem środka jej masy, a pierwszy wyraz za jej “orbitalny moment pędu”. Co więcej, jeśli wektory wodzące przyłożonych do bryły sił $\mathbf{F}_a$ zapisać jako sumy $\mathbf{r}_a = \mathbf{R} + \mathbf{d}_a$, gdzie $\mathbf{d}_a$ są wektorami od środka masy bryły do punktów przyłożenia sił (zobacz prawy rysunek 55) i zapisać momenty sił w postaci $\mathbf{D}_a = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_a + \mathbf{d}_a \times \mathbf{F}_a = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_a + \mathbf{D}_a^{\text{CM}}$, to równania dynamiki bryły zredukują się do¹²⁷

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} M\mathbf{R} &= \sum_a \mathbf{F}_a, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{J}_{\text{CM}} &\equiv \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{D}^{\text{CM}} \equiv \sum_a \mathbf{D}_a^{\text{CM}}. \end{aligned}$$

Istotnie, mnożąc wektorowo przez $\mathbf{R}$ z lewej strony równanie ruchu środka masy

$$\mathbf{R} \times \frac{d}{dt} M\dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{F},$$

¹²⁷Ze szkoły wynosi się zwykle mniemanie, że to te wzory są ogólnymi prawami dynamiki bryły; jest ono, jak widać, błędne i jako takie, szkodliwe!

i odejmując je stronami od pełnego równania

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} = \frac{d}{dt} (M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{J}_{\text{CM}}) = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{D}^{\text{CM}},$$

otrzymujemy “zredukowane” równanie podane wyżej.

Należy tu jeszcze raz zwrócić uwagę na to, że pochodne po czasie występujące w wypisanych wyżej prawach dynamiki bryły są pochodnymi liczonymi w inercyjnym układzie odniesienia. Aby je obliczać bezpośrednio trzeba wszystkie wektory $\mathbf{r}_O$, $\mathbf{R}'_O$, $\boldsymbol{\omega}$ i tensor $\mathbf{I}_O$ rozpisać na składowe tymże układzie. Nie zawsze jest to wygodne, gdyż względem tego układu bryła obracając się, zmienia swoje położenie, co powoduje, że składowe tensora bezwładności $\mathbf{I}_O$ nie są stałe (wyjątkiem - mylącym! - są “szkolne” przykłady). Wyjściem w tej sytuacji jest wyrażenie pochodnej wektora $\mathbf{J}$ obliczanej w układzie inercyjnym przez jego pochodną po czasie względem układu związanego z bryłą:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d'\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}.$$

W oznaczeniach wprowadzonych wyżej (zob. także rysunek 55) energia kinetyczna T bryły, której ruch traktujemy jak złożenie ruchu postępowego wybranego punktu O mającego ustalone względem bryły położenie i obrotu bryły wokół chwilowej osi przechodzącej przez punkt O jest dana wzorem

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_O^2 + M \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Taką właśnie postać energii kinetycznej bryły sztywnej należy w ogólności wykorzystywać w lagrangianie $L = T - V$. Jest ona oczywiście niezależna od wyboru punktu O .

Zadanie 12.1

Wyprowadzić wzory na składowe (chwilowej) prędkości kątovej $\boldsymbol{\omega}$ w układzie odniesienia związanym z obracającą się bryłą sztywną, którego orientacja względem układu nieruchomego (inercjalnego), mającego z nim wspólny początek jest wyznaczona przez zdefiniowane standardowo przez trzy kąty Eulera φ , θ i ψ (trzy “trzy ruchy łapki”).

Sparametryzowane kątami Eulera trzy obroty przeprowadzające układ trzech ortonormalnych wektorów $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ i $\mathbf{e}_z$ w trzy ortonormalne wektory $\mathbf{e}_{x'''}$, $\mathbf{e}_{y'''}$ i $\mathbf{e}_{z'''}'$ układu związanego z bryłą są następujące: najpierw dokonujemy obrotu wokół wektora $\mathbf{e}_z$ o kąt φ , co przeprowadza wektory $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ i $\mathbf{e}_z$ w wektory $\mathbf{e}_{x'}$, $\mathbf{e}_{y'}$ i $\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_z$. Następnie te primowane wektory obracamy wokół osi zwanej linią węzłów o wersorze $\mathbf{w}$, pokrywającej się z wektorem¹²⁸ $\mathbf{e}_{y'}$ o kąt θ otrzymując w ten sposób wersory $\mathbf{e}_{x''}$, $\mathbf{e}_{y''} = \mathbf{e}_{y'}$ i $\mathbf{e}_{z''}$. Wreszcie obracamy bisowane wektory wokół wersora $\mathbf{e}_{z''}$ o kąt ψ , co przeprowadza je w końcowy układ wersorów $\mathbf{e}_{x'''}'$, $\mathbf{e}_{y'''}'$ i $\mathbf{e}_{z'''}' = \mathbf{e}_{z''}$ układu związanego z bryłą. Prędkość kątovej $\boldsymbol{\omega}$ jest więc równa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{e}_z \dot{\varphi} + \mathbf{w} \dot{\theta} + \mathbf{e}_{z'''}' \dot{\psi} = \mathbf{e}_z \dot{\varphi} + \mathbf{w} \dot{\theta} + \mathbf{e}_{z'''}' \dot{\psi} \\ &= \mathbf{e}_z \dot{\varphi} + \mathbf{w} \dot{\theta} + \mathbf{e}_{z'''}' \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Zatem ($\omega^{x'''} = \mathbf{e}_{x'''}' \cdot \boldsymbol{\omega}$, etc.):

$$\begin{aligned}\omega^{x'''} &= (\mathbf{e}_{x'''}' \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} + (\mathbf{e}_{x'''}' \cdot \mathbf{w}) \dot{\theta} + 0, \\ \omega^{y'''} &= (\mathbf{e}_{y'''}' \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} + (\mathbf{e}_{y'''}' \cdot \mathbf{w}) \dot{\theta} + 0, \\ \omega^{z'''} &= (\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} + (\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{w}) \dot{\theta} + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Zera na końcu pierwszej i drugiej linii biorą się z tego, że $\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{e}_{x'''}' = 0$ i $\mathbf{e}_{y'''}' \cdot \mathbf{e}_{x'''}' = 0$, a w ostatnim członie trzeciej linii wykorzystane została równość $\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{e}_{z'''}' = 1$. Ponieważ

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{e}_{y'} = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi,$$

(w/g konwencji przyjętej w mechanice klasycznej $\mathbf{w} \equiv \mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi$) więc

$$\begin{aligned}\omega^{x'''} &= (\mathbf{e}_{x'''}' \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} - (\mathbf{e}_{x'''}' \cdot \mathbf{e}_x) \dot{\theta} \sin \varphi + (\mathbf{e}_{x'''}' \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega^{y'''} &= (\mathbf{e}_{y'''}' \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} - (\mathbf{e}_{y'''}' \cdot \mathbf{e}_x) \dot{\theta} \sin \varphi + (\mathbf{e}_{y'''}' \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega^{z'''} &= (\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} - (\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{e}_x) \dot{\theta} \sin \varphi + (\mathbf{e}_{z'''}' \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Aby zatem podać składowe prędkości kątovej, trzeba znaleźć iloczyny skalarne wersorów $\mathbf{e}_{i'''}'$ z wersorami $\mathbf{e}_j$. Ponieważ oba układy wersorów są ortonormalne, wystarczy wyrazić wersory $\mathbf{e}_{i'''}'$ przez $\mathbf{e}_j$. Robimy to sukcesywnie (w sprawie porządku w notacji zob. mój skrypt do Algebry)

$$(\mathbf{e}_{x'''}', \mathbf{e}_{y'''}', \mathbf{e}_{z'''}') = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹²⁸Tu istnieją dwie szkoły: według jednej oś węzłów pokrywa się z osią x' . Tak też zwykle jest przyjmowane w podręcznikach Mechaniki. Tu jednak przyjmujemy konwencję drugiej szkoły, jako że jest ona standardowa w mechanice kwantowej, która będzie nam bardziej użyteczna.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_{x''}, \mathbf{e}_{y''}, \mathbf{e}_{z''}) &= (\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}) \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

i wreszcie

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_{x'''}, \mathbf{e}_{y'''}, \mathbf{e}_{z'''}) &= (\mathbf{e}_{x''}, \mathbf{e}_{y''}, \mathbf{e}_{z''}) \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Po cierpliwym wymnożeniu macierzy (*Mathematica* robi to szybciej) ostatecznie otrzymujemy (w oznaczeniach z mojego skryptu do Algebry) $\mathbf{e}_{i'''} = \mathbf{e}_j [R_{\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{e}'''}]^j_{i'''}$, czyli jawnie

$$(\mathbf{e}_{x'''}, \mathbf{e}_{y'''}, \mathbf{e}_{z'''}) = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \begin{pmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\psi - c_\varphi c_\theta s_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & c_\varphi c_\psi - s_\varphi c_\theta s_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{pmatrix}.$$

Widniejąca tu macierz jest właśnie macierzą poszukiwanych iloczynów skalarnych

$$R_{\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{e}'''} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{x'''} & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{y'''} & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{z'''} \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{x'''} & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{y'''} & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{z'''} \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{x'''} & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{y'''} & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{z'''} \end{pmatrix},$$

gdyż $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{i'''} = \delta_{kj} [R_{\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{e}'''}]^j_{i'''} \equiv [R_{\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{e}'''}]^k_{i'''}$. Zatem

$$\begin{aligned}
\omega^{x'''} &= -\dot{\varphi} s_\theta c_\psi + \dot{\theta} s_\psi, \\
\omega^{y'''} &= \dot{\varphi} s_\theta s_\psi + \dot{\theta} c_\psi, \\
\omega^{z'''} &= \dot{\varphi} c_\theta + \dot{\psi}.
\end{aligned}$$

Metoda tu wykorzystana pozwala także bez trudu znaleźć składowe wektora chwilowej prędkości kątowej w wyjściowym układzie xyz :

$$\begin{aligned}
\omega^x &= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} - (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) \dot{\theta} s_\varphi + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} c_\varphi + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{z'''}) \dot{\psi} = -\dot{\theta} s_\varphi + \dot{\psi} c_\varphi s_\theta, \\
\omega^y &= (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} - (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x) \dot{\theta} s_\varphi + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} c_\varphi + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{z'''}) \dot{\psi} = \dot{\theta} c_\varphi + \dot{\psi} s_\varphi s_\theta, \\
\omega^z &= (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) \dot{\varphi} - (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x) \dot{\theta} s_\varphi + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y) \dot{\theta} c_\varphi + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{z'''}) \dot{\psi} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} c_\theta.
\end{aligned}$$

Jeśli przyjąć drugą konwencję, według której $\mathbf{w} = \mathbf{e}_{x'}$, to analogiczne kroki dadzą

$$\begin{aligned}
\omega^{x'''} &= \dot{\varphi} s_\theta s_\psi + \dot{\theta} c_\psi, \\
\omega^{y'''} &= \dot{\varphi} s_\theta c_\psi - \dot{\theta} s_\psi, \\
\omega^{z'''} &= \dot{\varphi} c_\theta + \dot{\psi}.
\end{aligned}$$

Zadanie 12.2

Podać wzór wyrażający tensor $\mathbf{I}_{(O)}$ momentu bezwładności bryły sztywnej względem punktu O przez tensor $\mathbf{I}_{(CM)}$ tejże bryły względem jej środka masy.

Rozwiązanie:

Tensor $\mathbf{I}_{(O)}$ momentu bezwładności bryły sztywnej względem dowolnego punktu O jest dany wzorem

$$\mathbf{I}_O = \sum_a \Delta m_a [\mathbf{r}_a^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a],$$

w którym sumowanie przebiega po wszystkich elementach masy Δm_a , z których składa się bryła. (Gdy masa bryły jest rozłożona w sposób ciągły, należy zastąpić masy Δm_a przez $d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})$, gdzie $\rho(\mathbf{r})$ jest (lokalną) gęstością masy, a sumowanie zastąpić całkowaniem). Wektory $\mathbf{r}_a$ biegnące od punktu O do poszczególnych mas Δm_a można zawsze zapisać jako

$$\mathbf{r}_a = -\mathbf{R} + \mathbf{r}_a^{(CM)},$$

gdzie $\mathbf{R}$ jest wektorem od środka masy do punktu O . Wstawiając tak zapisany wektor $\mathbf{r}_a$ do powyższego wzoru na $\mathbf{I}_{(O)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O = \sum_a \Delta m_a [(\mathbf{r}_a^{(CM)} - \mathbf{R})^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \\ - (\mathbf{r}_a^{(CM)} - \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{r}_a^{(CM)} - \mathbf{R})], \end{aligned}$$

Po rozpisaniu wzór powyższy przybiera postać

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O = \sum_a \Delta m_a [(\mathbf{r}_a^{(CM)})^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \mathbf{r}_a^{(CM)} \otimes \mathbf{r}_a^{(CM)}] \\ + \sum_a \Delta m_a [\mathbf{R}^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}] \\ + \sum_a \Delta m_a [-\mathbf{r}_a^{(CM)} \cdot \mathbf{R} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \mathbf{r}_a^{(CM)} \otimes \mathbf{R} + \mathbf{R} \otimes \mathbf{r}_a^{(CM)}]. \end{aligned}$$

Ostatnia linia tego wzoru, w której wektory $\mathbf{r}_a^{(CM)}$ występują liniowo, znika, gdyż z definicji środka masy (CM)

$$\sum_a \Delta m_a \mathbf{r}_a^{(CM)} = \mathbf{0},$$

a pierwsza jego linia jest tensorem $\mathbf{I}_{(CM)}$ bryły względem środka jej masy. Zatem zapisane tensorowo twierdzenie Steinera ma postać

$$\mathbf{I}_{(O)} = \mathbf{I}_{(CM)} + M [\mathbf{R}^2 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}],$$

gdyż suma po Δm_a w środkowej linii daje masę bryły. W konkretnym układzie odniesienia zadawanym przez wersory¹²⁹ $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ i $\mathbf{e}_z$, w którym $\mathbf{R} = \mathbf{e}_x X + \mathbf{e}_y Y + \mathbf{e}_z Z$, a $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j I^{ij}$ “dodatek” wynikający z “przesunięcia” tensora momentu bezwładności od środka masy (CM) do punktu O ma w notacji wskaźnikowej postać $\Delta I_O^{ij} = M(\delta^{ij} \mathbf{R}^2 - R^i R^j)$, a w macierzowej

$$\Delta \hat{I}_O = M \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -YX & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -ZX & -ZY & X^2 + Y^2 \end{pmatrix}.$$

Należy tu zwrócić uwagę na to, że tensor momentu bezwładności przesuwamy zawsze od środka masy bryły do danego punktu. Jeśli ze znanego tensora $\mathbf{I}_{(O)}$ chcemy otrzymać tensor $\mathbf{I}_{(O')}$ należy przejść przez środek masy ($\mathbf{R}'$ jest wektorem skierowanym od środka masy do punktu O'):

$$\mathbf{I}_{(O')} = \mathbf{I}_{(\text{CM})} + \Delta \mathbf{I}(\mathbf{R}') = \mathbf{I}_{(O)} - \Delta \mathbf{I}(\mathbf{R}) + \Delta \mathbf{I}(\mathbf{R}').$$

¹²⁹Tensor $\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ ma tę samą postać niezależnie od wyboru ortonormalnego układu wersorów $\mathbf{e}_i$.

Zadanie 12.4

Znaleźć tensor $\hat{\mathbf{I}}^{(O)}$ momentu bezwładności jednorodnego stożka o masie M , promieniu podstawy R i wysokości h względem punktu O będącego środkiem jego podstawy. Następnie wykorzystując twierdzenie Steinera, otrzymać tensor momentu bezwładności względem środka masy stożka.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy układ odniesienia o osi z skierowanej wzdłuż osi stożka do góry i osiach x i y leżących w płaszczyźnie jego podstawy. Punkt O będący środkiem podstawy jest więc początkiem tego układu odniesienia. W tak zdefiniowanym układzie odniesienia składowe $I_{ij}^{(O)}$ tensora momentu bezwładności $\hat{\mathbf{I}}^{(O)}$ względem punktu O są dane całkami

$$I_{xx}^{(O)} = \int \int \int_{\text{Vol}} dz dy dz \rho (y^2 + z^2) ,$$

$$I_{xy}^{(O)} = \int \int \int_{\text{Vol}} dz dy dz \rho (-xy) ,$$

etc. przy czym granice całek łatwiej ustalić po dokonaniu w całkach zamiany zmiennych na cylindryczne: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = d\varphi dr r$. Po takiej zamianie zmiennych

$$I_{xx}^{(O)} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(z)} dr r \rho (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi) ,$$

$$I_{xy}^{(O)} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(z)} dr r (-r^2 \cos \varphi \sin \varphi) ,$$

etc. Górna granica wewnętrznej całki jest dana oczywistym wzorem (musi być równa R , gdy $z = 0$ i zniknąć, gdy $z = h$)

$$r(z) = R \left(1 - \frac{z}{h} \right) .$$

Od razu widać, że całkowanie po kącie φ wyzerowuje wszystkie pozadiagonalne składowe: $I_{xy}^{(O)} = I_{xz}^{(O)} = I_{yz}^{(O)} = 0$. Poza tym po wykonaniu całki po kącie φ otrzymujemy

$$I_{xx}^{(O)} = \pi \rho \int_0^h dz \int_0^{r(z)} dr r (2z^2 + r^2 \sin^2 \varphi) = \pi \rho \int_0^h dz \left(z^2 r^2(z) + \frac{1}{4} r^4(z) \right) .$$

Po przejściu do zmiennej $\xi = z/h$ mamy stąd

$$I_{xx}^{(O)} = \pi \rho R^2 h \int_0^1 d\xi \left[h^2 \xi^2 (1 - \xi)^2 + \frac{1}{4} R^2 (1 - \xi)^4 \right] = \pi \rho R^2 h \left(\frac{1}{30} h^2 + \frac{1}{20} R^2 \right) .$$

Ponieważ jest jasne (z symetrii), że $I_{xx}^{(O)} = I_{yy}^{(O)}$, a (ze szkoły jeszcze)

$$\rho = \frac{3M}{\pi R^2 h} ,$$

otrzymujemy

$$I_{xx}^{(O)} = I_{yy}^{(O)} = \frac{M}{20} (3R^2 + 2h^2).$$

Składową $I_{zz}^{(O)}$ oblicza się jeszcze prościej

$$I_{zz}^{(O)} = \int \int \int_{\text{Vol}} dz dy dz \rho (x^2 + y^2) = 2\pi \rho \int_0^h dz \int_0^{r(z)} dr r^3,$$

i po analogicznych krokach otrzymuje się

$$I_{zz}^{(O)} = \frac{3}{10} MR^2.$$

Ostatecznie więc, zapisując tensor $\hat{\mathbf{I}}^{(O)}$ we wprowadzonym układzie (czyli w bazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, gdzie $i, j = x, y, z$) macierzowo

$$I^{(O)} = \frac{M}{20} \begin{pmatrix} 3R^2 + 2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}.$$

Aby napisać tensor momentu bezwładności względem środka masy stożka trzeba najpierw ustalić, gdzie ów środek się znajduje. Niewątpliwie (z powodu symetrii względem obrotów stożka wokół jego osi) gdzieś na osi stożka. Aby ustalić na jakiej wysokości, obliczamy całkę

$$z_{(\text{CM})} = \frac{1}{M} \int \int \int_{\text{Vol}} dz dy dz \rho z = \pi \frac{\rho}{M} \int_0^h dz z r^2(z) = \frac{1}{4} h.$$

Zatem wektor $\mathbf{a}$, o który trzeba “przesunąć” tensor $\hat{\mathbf{I}}_{(CM)}$ by dostać z niego tensor $\hat{\mathbf{I}}_{(O)}$ zgodnie ze wzorem ($\hat{\mathbf{1}}$ jest tensorem jednostkowym)

$$\hat{\mathbf{I}}_{(O)} = \hat{\mathbf{I}}_{(CM)} + M (\mathbf{a}^2 \hat{\mathbf{1}} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}),$$

ma, we wprowadzonym układzie postać $\mathbf{a} = \mathbf{e}_z(h/4)$. W składowych zatem

$$I^{(CM)} = \frac{M}{20} \begin{pmatrix} 3R^2 + 2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix} - \frac{Mh^2}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

czyli

$$I^{(CM)} = \frac{3M}{80} \begin{pmatrix} 4R^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4R^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8R^2 \end{pmatrix}.$$

Składowe te można też otrzymać wprowadzając nowy układ odniesienia przesunięty do środka masy i całkując bezpośrednio. Teraz jednak zmieniają się granice całek i

$$I_{zz}^{(CM)} = 2\pi \rho \int_{-h/4}^{3h/4} dz \tilde{r}^4(z),$$

gdzie wskutek przesunięcia układu

$$\tilde{r}(z) = R \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} \right).$$

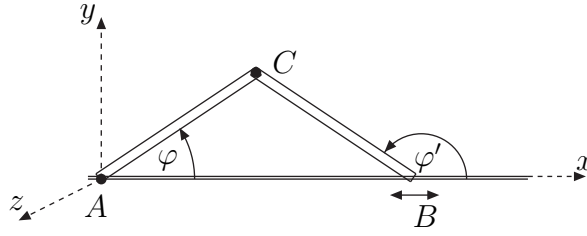
Zatem

$$I_{zz}^{(CM)} = \frac{\pi}{2} \rho R^4 \int_{-h/4}^{3h/4} dz \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{h} \right)^4 = \frac{\pi}{10} \rho R^4 h.$$

Analogicznie, po wykonaniu całki po kącie φ

$$I_{xx}^{(CM)} = \pi \rho \int_{-h/4}^{3h/4} dz \int_0^{\tilde{r}(z)} dr r (2z^2 + r^2) = \pi \rho \int_{-h/4}^{3h/4} dz \left(z^2 \tilde{r}^2(z) + \frac{1}{4} \tilde{r}^4(z) \right)$$

Oczywiście dostaje się w ten sposób te same składowe, co z twierdzenia Steinera.



Rysunek 56: Dwa połączone przegubowo pręty.

Zadanie 12.8

Znaleźć energię kinetyczną układu dwu połączonych przegubowo prętów o masie m i długości l każdy. Koniec lewego pręta jest unieruchomiony w punkcie A (pręt może się tylko obracać wokół A), a koniec B prawego pręta może tylko przesuwać się po ustalonej prostej przechodzącej przez punkt A (rysunek 56).

Rozwiązanie:

Jak widać z rysunku 56 dwa kąty φ i φ' nie są niezależne: $\varphi' = \pi - \varphi$. Układ ma więc tylko jeden stopień swobody. Za uogólnioną zmienną dynamiczną wybieramy kąt φ . Oś inercyjnego układu odniesienia wybieramy tak, jak na rysunku.

Energię kinetyczną obliczamy z ogólnego wzoru

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_O^2 + m \mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{(O)} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Należy przy tym pamiętać, że rozpatrywany układ składa się z dwóch niezależnych (gdy chodzi o obliczanie energii) podukładów, którymi są dwa pręty. Zatem $T = T_1 + T_2$. W celach instruktażowych obliczymy każdą z tych dwu energii dwoma sposobami.

T_1 - energia kinetyczna lewego pręta. Najpierw rozpatrujemy ruch tego pręta jako złożenie ruchu postępowego punktu A i obrotu pręta wokół tegoż punktu. Ponieważ punkt A jest unieruchomiony, $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$; jeśli kierunek wzrostu kąta φ jest taki, jak na rysunku 18, to $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}_z \dot{\varphi}$, a tensor momentu bezwładności pręta względem osi z przechodzącej przez jego koniec jest znany (paka - to złowróżbne, rosyjskie słówko...) ze szkoły:¹³⁰ $I_{(A)}^{zz} = \frac{1}{3} m l^2$. Zatem

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Alternatywnie, można widzieć ruch lewego pręta jako złożenie ruchu postępowego środka jego masy i obrotu pręta wokół tegoż środka. Zmieniającymi się współrzędnymi (w układzie inercyjnym) środka masy są $x_{\text{CM1}} = (l/2) \cos \varphi$, $y_{\text{CM1}} = (l/2) \sin \varphi$, więc $\mathbf{v}_{\text{CM1}}^2 = (l^2/4) \dot{\varphi}^2$. Z kolei (znów ze szkoły) $I_{(\text{CM})}^{zz} = (1/12) m l^2$ i ponownie

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{4} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2.$$

¹³⁰Pozostałe składowe w układzie inercyjnym tego tensora zmieniają się w trakcie ruchu pręta, ale ponieważ $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_z \dot{\varphi}$ stale, nie wchodzi one w T_1 .

Pouczające może też być obliczenie T_1 wybierając za O drugi koniec pierwszego pręta, czyli punkt C - wtedy niezerowy jest środkowy człon ogólnego wzoru na energię kinetyczną.

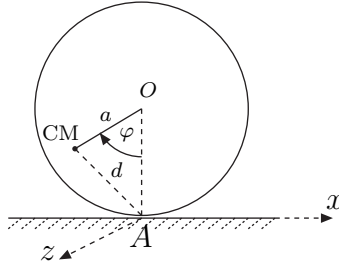
T_2 - energia kinetyczna prawego pręta. Najpierw rozpatrujemy ruch tego pręta jako złożenie ruchu postępowego punktu B i obrotu wokół tego punktu. Z rysunku 18 widać, że $x_B = 2l \cos \varphi$, $y_B \equiv 0$, więc $\mathbf{v}_B = -\mathbf{e}_x 2l\dot{\varphi} \sin \varphi$. Z kolei wektor od punktu B (który teraz gra tu rolę punktu O) do środka masy drugiego pręta ma, jak widać z rysunku, postać $\mathbf{R}'_B = -\mathbf{e}_x (l/2) \cos \varphi + \mathbf{e}_y (l/2) \sin \varphi$. Ponadto $\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{e}_z \dot{\varphi}' = -\mathbf{e}_z \dot{\varphi}$ i wobec tego $\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}'_B = (l/2)\dot{\varphi}(\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi)$. Zatem (oczywiście $I_{(\text{CM})}^{zz} = \frac{1}{12}ml^2$ więc $I_{(\text{CM})}^{zz} + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$, ale wydzielamy $I_{(\text{CM})}^{zz}$ dla wygody)

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} 4ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (I_{(\text{CM})}^{zz} + \frac{1}{4}ml^2) \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{8} ml^2 (1 + 8 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{(\text{CM})}^{zz} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} ml^2 (1 + 6 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Jeśli zaś ruch prawego pręta uważać za złożenie obrotu wokół środka jego masy i ruchu postępowego tegoż punktu, to $x_{\text{CM}2} = (3l/2) \cos \varphi$, $y_{\text{CM}2} = (l/2) \sin \varphi$, więc

$$\mathbf{v}_{\text{CM}2}^2 = \frac{1}{4} l^2 \dot{\varphi}^2 (9 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{1}{4} l^2 \dot{\varphi}^2 (1 + 8 \sin^2 \varphi),$$

co prowadzi do tego samej energii kinetycznej T_2 .



Rysunek 57: Toczenie się niejednorodnego walca.

Zadanie 12.9

Znaleźć energię kinetyczną niejednorodnego walca o masie M i promieniu R toczącego się bez poślizgu po płaszczyźnie. Środek masy walca jest odległy o a od jego osi, a oś główna jego tensora bezwładności $\mathbf{I}_{(\text{CM})}$ (z założenia znanego) jest równoległa do osi walca.

Rozwiązanie:

Najprościej jest rozpatrzeć ruch walca jako złożenie ruchu postępowego punktu A walca (rysunek 57) i obrotu wokół tego punktu. Ponieważ przy toczeniu się bez poślizgu chwilowa prędkość punktu A jest z definicji równa zero, więc

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_A^2 + M \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_A) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{(A)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{(A)} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Trzeba tylko korzystając twierdzenia Steinera (zadanie 12.2) znaleźć tensor $\mathbf{I}_{(A)}$, a właściwie, ponieważ przy płaskorównoległym ruchu walca

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{e}_z \dot{\varphi},$$

(oś z układu inercjalnego, w którym tu rozpisujemy na składowe wszystkie wektory oraz tensor bezwładności, jest skierowana przed rysunek), tylko jego składową $I_{(A)}^{zz}$. Jest ona równa

$$I_{(A)}^{zz} = I_{(\text{CM})}^{zz} + M d^2(\varphi),$$

gdzie zmieniającą się z kątem φ odległość $d(\varphi)$ można znaleźć z uogólnionego twierdzenia Pitagorasa¹³¹

$$d^2(\varphi) = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi.$$

Stąd

$$T = \frac{1}{2} I_{(A)}^{zz} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} [I_{(\text{CM})}^{zz} + M(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi)] \dot{\varphi}^2.$$

¹³¹Jak by ktoś go nie pamiętał (w końcu facet żył tak dawno temu!), to zawsze można się uciec do (dwuwymiarowej) geometrii analitycznej: w układzie o początku w środku geometrycznym walca $A = (0, -R)$, $\text{CM} \equiv B = (-a \sin \varphi, -a \cos \varphi)$ więc $d(\varphi) = |AB| = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + (R - a \cos \varphi)^2}$.

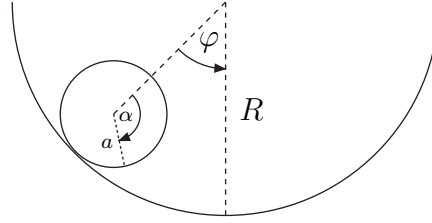
Alternatywnie, można widzieć ruch walca jako ruch jego środka masy i obrót wokół środka masy. W ogólnym wzorze na T środkowy wyraz znika wtedy (bo $\mathbf{R}' = \mathbf{0}$), a prędkość ruchu środka masy wynika z jego obrotu wokół punktu A - ramieniem tego obrotu jest $d(\varphi)$ - i ma wobec tego wartość $|\mathbf{v}_{\text{CM}}| = |\dot{\varphi}|d(\varphi)$, co od razu daje energię kinetyczną T taką samą, jak wyżej.

Wreszcie, można rozpatrzeć ruch walca jako ruch postępowy jego geometrycznego środka (tj. punktu O na rysunk 57) i obrót wokół przechodzącej przez ten środek osi. Prędkość geometrycznego środka walca jest wektorem $\mathbf{v}_O = \mathbf{e}_x R\dot{\varphi}$. Właściwym momentem bezwładności jest teraz $I_{(\text{CM})}^{zz} + Ma^2$, a wektor $\mathbf{R}'_O = -\mathbf{e}_x a \sin \varphi - \mathbf{e}_y a \cos \varphi$, tak iż

$$\mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) = \mathbf{v}_O \cdot (-\mathbf{e}_x a \dot{\varphi} \cos \varphi + \mathbf{e}_y a \dot{\varphi} \sin \varphi) = -Ra \dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

i znów

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 - MRa\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{1}{2}[I_{(\text{CM})}^{zz} + Ma^2]\dot{\varphi}^2.$$



Rysunek 58: Walec toczący się wewnątrz nieruchomego większego walca. Przy pokazanym na rysunku położeniu układu kąt φ jest ujemny.

Zadanie 12.10

Znaleźć energię kinetyczną małego jednorodnego walca o masie m i promieniu a toczącego się bez poślizgu po wewnętrznej powierzchni nieruchomego dużego walca o promieniu R ($R > a$). Osie obu walców są do siebie stale równoległe (rysunek 58).

Rozwiązanie:

Układ ma jeden stopień swobody. Za zmienną dynamiczną przyjmujemy kąt φ zaznaczony na rysunku 58. Jest jasne, że prędkość ruchu postępowego środka masy małego walca jest równa

$$\mathbf{v}_{\text{CM}}^2 = (R - a)^2 \dot{\varphi}^2.$$

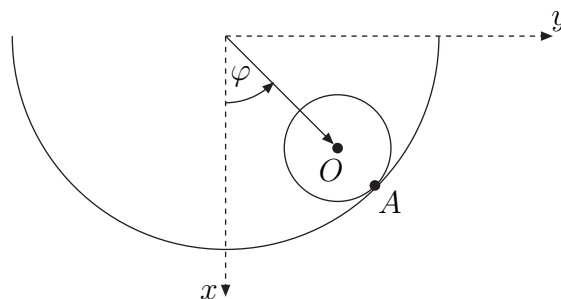
Aby znaleźć prędkość kątową obrotu małego walca (jest ona zawsze taka sama, niezależnie od tego, przez który punkt przeprowadzimy chwilową oś obrotu), rozpatrzmy punkt styczności obu walców. Gdy kąt φ zmieni się o $\Delta\varphi$, punkt styczności przebywa drogę $R\Delta\varphi$ (mierząc po powierzchni dużego walca); mały walec obróci się o wtedy o kąt $\Delta\alpha$, co musi dać tę samą drogę (bo toczy się bez poślizgu).

$$\Delta\alpha = \frac{R}{a} \Delta\varphi.$$

Znak $\Delta\alpha$ jest taki sam, jak znak $\Delta\varphi$, bo, jak widać z rysunku ??, gdy kąt α rośnie, to kąt φ również wzrasta). Stosunek $\Delta\alpha/\Delta t$ (Δt - czas, w którym nastąpił obrót o kąt $\Delta\alpha$) nie jest jednak prędkością kątową obrotu małego walca względem układu inercyjnego: $\Delta\alpha$ jest kątem, o który mały walec obraca się w stosunku do prostej, która łączyła jego środek i punkt styczności obu walców; w tymże czasie układ odniesienia (którego jedną z osi jest ta prosta) związany na sztywno z małym walcem dodatkowo obróci się o kąt $\Delta\varphi$ w stosunku do nieruchomego układu inercyjnego i o ten kąt trzeba pomniejszyć $\Delta\alpha$. Zatem

$$\omega = \frac{\Delta\alpha - \Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{R - a}{a} \dot{\varphi}.$$

Zauważmy, że po prostu (tzw. “patent Landaua” - prędkość kątowa jest równa prędkości środka masy przemieszczającej się bryły podzielonej przez “ramię” jego obrotu wokół



Rysunek 59: Znajdowanie wektora prędkości kątowej. Oś z skierowana przed kartkę. Infinitesimalne przemieszczenie $d\boldsymbol{\tau}_A$ punktu A jest równe zero wskutek niewystępowania poślizgu.

nieruchomego punktu, którym tu jest punkt styczności obu walców)

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{|\mathbf{v}_{\text{CM}}|}{a}.$$

Tak więc

$$T = \frac{1}{2}m(R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_{(\text{CM})}^{zz} \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2.$$

Wektor prędkości kątowej, który tu został tu znaleziony z pomocą dość heurystycznych argumentów można też znaleźć wykorzystując inny patent (z którego patent Landaua zapewne wynika, jako przypadek szczególny). Jeśli bryła obraca się w czasie dt o $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}dt$ wokółchwilowej osi przechodzącej przez punkt O , to przemieszczenie $d\boldsymbol{\tau}_A$ jej punktu A względem układu inercjalnego jest dane wzorem

$$d\boldsymbol{\tau}_A = d\mathbf{r}_O + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_{OA}.$$

gdzie $d\mathbf{r}_O$ jest przemieszczeniem punktu O , a $\mathbf{r}_{OA}$ wektorem biegnącym od O do A . Stosując ten wzór do punktu A (lub punktów), którego przemieszczenie $d\boldsymbol{\tau}_A$ jest skądinąd znane (czy zadane warunkami problemu), można wyznaczyć wektor $d\boldsymbol{\theta}$, czyli $\boldsymbol{\omega}$. Ponieważ w przypadku układu pokazanego na rysunku ??

$$\mathbf{r}_{OA} = a(\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi),$$

$$d\mathbf{r}_O = (R-a)(-\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi)d\varphi,$$

a $d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}_z d\theta^z$ - to można tu spokojnie przyjąć - więc (korzystając z tego, że $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x$)

$$d\boldsymbol{\tau}_A = (R-a)(-\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi)d\varphi + (\mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_x \sin \varphi)a d\theta^z = \mathbf{0},$$

bo chwilowe przemieszczenie punktu A , jako punktu styczności (toczenie bez poślizgu!) musi być równe zero. Zarówno zerowanie się składowej x -owej i y -kowej dają ten sam związek $a d\theta^z = -(R-a)d\varphi$, skąd wynika, że w układzie z rysunku 58

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{e}_z \frac{R-a}{a} \dot{\varphi},$$

tak jak to został ustalone poprzednio.

Zadanie 12.11

Znaleźć energię kinetyczną jednorodnego stożka o całkowitej masie M , kącie rozwarcia 2α i wysokości h taczającego się bez poślizgu po płaszczyźnie w taki sposób, że jego czubek pozostaje stale w tym samym punkcie płaszczyzny (rysunek 60). Następnie, przyjmując, że płaszczyzna ta jest do pionu (wyznaczanego przez pole siły ciężkości) nachylona pod kątem β , napisać równanie wyznaczające ruch stożka po płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

Najpierw zajmijmy się energią kinetyczną taczającego się stożka. Nachylenie płaszczyzny, po której on się przetacza nie ma tu żadnego znaczenia. Wprowadźmy inercjalny układ odniesienia $\mathcal{O}'$, którego osie x' i y' leżą w płaszczyźnie, po której przetacza się stożek i o początku w punkcie A , w którym uwięziony jest czubek stożka. Oś z' tego układu niech będzie skierowana w górę w sosunku do tej płaszczyzny. Chwilowe położenie stożka jako bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez podanie kąta θ pomiędzy osią x' układu $\mathcal{O}'$, a prostą przechodzącą przez punkty A i B , wzdłuż której tworząca stożka styka się z płaszczyzną (zob. rysunek 60). Układ ma więc tylko jeden stopień swobody. Jako zmienną uogólnioną przyjmujemy kąt θ .

Pierwszym krokiem jest znalezienie wektora chwilowej prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Jeśli jest oczywiste, że ma ona kierunek prostej AB (zob. rysunek 60) - tj. kierunek linii wzdłuż której tworząca stożka styka się z płaszczyzną $x'y'$, to skoro środek masy stożka odległy o $a = \frac{3}{4}h$ od czubka stożka (zob. zadanie 12.4) porusza się po okręgu z prędkością $|\mathbf{v}_{\text{CM}}| = a\dot{\theta} \cos \alpha$, pozostając stale na wysokości $a \sin \alpha$ nad punktem C , prędkość kątowa musi być równa ("patent Landau"!)

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{|\mathbf{v}_{\text{CM}}|}{a \sin \alpha} = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha.$$

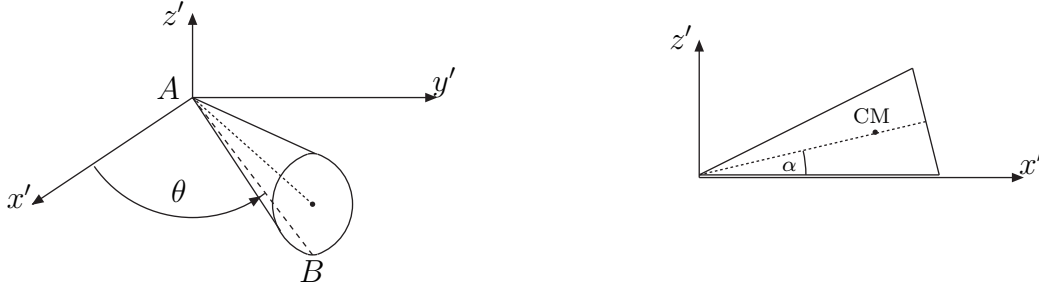
Jeśli nie jest to oczywiste, w celu upewnienia się, można posłużyć się następującym rozumowaniem. Niech P będzie dowolnym punktem poruszającej się bryły sztywnej, a O punktem bryły przez który przechodzi chwilowa oś jej obrotu.¹³² Niech ponadto $\mathbf{r}_{OP}$ będzie wektorem od punktu O do punktu P . Wektor $d\mathbf{r}_P$ o jaki przemieszcza się punkt P względem układu inercjalnego w infinitezymalnym odcinku czasu dt musi być równy

$$d\mathbf{r}_P = d\mathbf{r}_O + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{OP},$$

gdzie $\mathbf{r}_O$ jest wektorem położenia w układzie inercjalnym punktu O . W przypadku taczającego się po płaszczyźnie stożka weźmy jako O środek jego podstawy. Aby uprościć rozważania założmy, że w danej chwili tworząca stożka styka się z płaszczyzną wzdłuż osi x' . Wtedy

$$d\mathbf{r}_O = \mathbf{e}_{y'} h d\theta \cos \alpha.$$

¹³²Pamiętamy, że punkt ten jest wybrany dowolnie - ruch bryły uważamy za złożenie ruchu postępowego punktu dowolnie wybranego punktu O o niezmiennym położeniu względem bryły i jej obrotu wokół tego punktu.



Rysunek 60: Stożek o unieruchomionym czubku taczający się po płaszczyźnie.

Punkty stożka, które nie powinny się przemieścić w odcinku czasu dt , to jego czubek A (bo jest on w warunkach zadania nieruchomy) oraz wszystkie punkty tworzącej, którą stożek styka się z płaszczyzną $x'y'$ (bo stożek tacza się bez poślizgu) - weźmy do rozważań np. punkt B tej tworzącej wspólny z podstawą stożka. Biorąc zatem za P punkty A i B , których wektory $\mathbf{r}_{OA}$ i $\mathbf{r}_{OB}$ łatwo skonstruować patrząc na prawy rysunek 60, mamy

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= d\mathbf{r}_A = \mathbf{e}_{y'} h d\theta \cos \alpha + d\boldsymbol{\varphi} \times [-\mathbf{e}_{x'} h \cos \alpha - \mathbf{e}_{z'} h \sin \alpha], \\ \mathbf{0} &= d\mathbf{r}_B = \mathbf{e}_{y'} h d\theta \cos \alpha + d\boldsymbol{\varphi} \times \left[\mathbf{e}_{x'} \left(\frac{h}{\cos \alpha} - h \cos \alpha \right) - \mathbf{e}_{z'} h \sin \alpha \right].\end{aligned}$$

Odejmując te dwa równania stronami widzimy, że

$$d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_{x'} \frac{h}{\cos \alpha} = \mathbf{0},$$

czyli, że $d\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{e}_{x'} d\varphi^{x'}$. Z pierwszego mamy wtedy

$$\mathbf{e}_{y'} h d\theta \cos \alpha + d\boldsymbol{\varphi} \times [-\mathbf{e}_{z'} h \sin \alpha] = \mathbf{e}_{y'} h d\theta \cos \alpha + \mathbf{e}_{y'} h d\varphi^{x'} \sin \alpha = \mathbf{0},$$

czyli $d\varphi^{x'} = -d\theta \operatorname{ctg} \alpha$, tak jak wyżej. Należy pamiętać, że wektor prędkości kątowej jest taki sam, niezależnie od tego, który ustalony w stosunku do bryły punkt przyjmiemy za O , czyli za punkt, przez który przechodzi chwilowa oś jej obrotu.

Obliczymy energię kinetyczną taczającego się stożka dwoma sposobami.

1) Traktując ruch stożka jak złożenie obrotu wokół środka jego masy z ruchem postępowym tego środka. Rozkładamy wtedy znaleziony wektor prędkości kątowej mający kierunek tworzącej, wzdłuż której stożek styka się z płaszczyzną na część $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ równoległą do osi stożka i $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ prostopadłą do niej:

$$|\boldsymbol{\omega}_{\parallel}| = |\boldsymbol{\omega}| \cos \alpha, \quad |\boldsymbol{\omega}_{\perp}| = |\boldsymbol{\omega}| \sin \alpha.$$

Momenty bezwładności stożka (względem środka jego masy) względem tych osi zostały znalezione w zadaniu 12.4 ($R = h \operatorname{tg} \alpha$ jest promieniem podstawy stożka)

$$\begin{aligned}I_{(\text{CM})}^{\parallel} &= \frac{3}{10} M R^2 = \frac{3}{10} M h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ I_{(\text{CM})}^{\perp} &= \frac{3}{20} \left(M R^2 + \frac{1}{4} M h^2 \right) = \frac{3}{20} M h^2 \left(\frac{1}{4} + \operatorname{tg}^2 \alpha \right).\end{aligned}$$

Prędkość środka masy jest, jak to już zostało ustalone, równa $|\mathbf{v}_{\text{CM}}| = \frac{3}{4} h \dot{\theta} \cos \alpha$. Zatem

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{(\text{CM})}^{\parallel} \omega_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} I_{(\text{CM})}^{\perp} \omega_{\perp}^2 \\ &= \frac{1}{2} M h^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{9}{16} \cos^2 \alpha + \frac{3}{10} \cos^2 \alpha + \frac{3}{80} \cos^2 \alpha + \frac{3}{20} \sin^2 \alpha \right) \\ &= \frac{3}{40} M h^2 \dot{\theta}^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

2) Drugi sposób polega na rozpatrzeniu obrotu stożka wokół punktu A . Ponieważ punkt ten spoczywa, $T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_{(A)} \cdot \boldsymbol{\omega}$. W tym samym, co poprzednio układzie $\mathcal{O}'$ związanym ze stożkiem (oś $\tilde{z}$ tożsama z osią stożka etc.) twierdzenie Steinera daje

$$\begin{aligned} I_{(A)}^{\tilde{z}\tilde{z}} &= I_{(\text{CM})}^{\tilde{z}\tilde{z}} = I_{(A)}^{\parallel}, \\ I_{(A)}^{\tilde{x}\tilde{x}} &= I_{(A)}^{\tilde{y}\tilde{y}} = I_{(\text{CM})}^{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{9}{16} M h^2 = I_{(A)}^{\perp}, \end{aligned}$$

i od razu widać, że dodatek $(9/16) M h^2$ pochodzący z przesunięcia tensora do punktu A daje dokładnie to samo, co w metodzie pierwszej wyraz z $\mathbf{v}_{\text{CM}}^2$.

Aby bezboleśnie znaleźć energię potencjalną wygodnie będzie wykorzystać pomocnicze układy odniesienia. Pierwszym jest układ $\mathcal{O}''$, którego początkiem jest czubek stożka, A osią x'' jest tworząca stożka, którą styka się on z nachyloną płaszczyzną, a oś z'' jest do tej płaszczyzny prostopadła. W tym układzie środek masy stożka znajdujący się na jego osi w odległości $(3/4)h$ od czubka ma współrzędne $(3/4)h(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$. Drugim jest wprowadzony już układ $\mathcal{O}'$, którego oś z' , jest tożsama z osią z'' a oś x' jest obrócona w kierunku spadku płaszczyzny po której przetacza się stożek o kąt θ . W układzie $\mathcal{O}'$ współrzędnymi środka masy stożka są ($c_{\alpha} \equiv \cos \alpha$ etc.)

$$\frac{3h}{4} \begin{pmatrix} c_{\theta} & -c_{\theta} & 0 \\ s_{\theta} & c_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\alpha} \\ 0 \\ s_{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{3h}{4} \begin{pmatrix} c_{\alpha} c_{\theta} \\ c_{\alpha} s_{\theta} \\ s_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Ponieważ układ $\mathcal{O}'$ ma z układem $\mathcal{O}$ (w którym pole siły ciężkości jest skierowane w dół osi z) wspólną oś $y = y'$ i jest w stosunku doń wokół tej wspólnej osi obrócony o kąt β , współrzędnymi środka masy stożka są w nim

$$\frac{3h}{4} \begin{pmatrix} c_{\beta} & 0 & s_{\beta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{\beta} & 0 & c_{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\alpha} c_{\theta} \\ c_{\alpha} s_{\theta} \\ s_{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{3h}{4} \begin{pmatrix} c_{\beta} c_{\alpha} c_{\theta} + s_{\beta} s_{\alpha} \\ c_{\alpha} s_{\theta} \\ -s_{\beta} c_{\alpha} c_{\theta} + c_{\beta} s_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Energia potencjalna taczającego się stożka jest równa po prostu $V = Mgz$, ale wyraz $\propto c_{\beta} s_{\alpha}$ można, jako stały, pominąć. Zatem lagrangian układu to

$$L = \frac{3}{40} M h^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha) \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} M g h \sin \beta \cos \alpha \cos \theta,$$

i równanie ruchu stożka ma postać

$$\ddot{\theta} + 5 \frac{g}{h} \frac{\sin \beta \cos \alpha}{1 + 5 \cos^2 \alpha} \sin \theta.$$

Jest jasne, że może on wykonywać małe oscylacje wokół położenia równowagi $\theta = 0$.

Zadanie 12.13

Jednorodna bryła w kształcie stożka o wysokości h i promieniu podstawy również h obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi z pokrywającej się z tworzącą stożka (zob. lewy rysunek 61). Jakie siły $\mathbf{F}_A$ i $\mathbf{F}_B$ muszą na nią działać, jeśli są one przyłożone w dwu punktach: A będącym wierzchołkiem stożka i zarazem początkiem inercjalnego układu odniesienia oraz w punkcie B położonym na brzegu podstawy stożka, którym styka się ona z osią z ?

Rozwiązanie:

W związanym ze stożkiem układzie $\mathcal{O}''$, którego oś z'' pokrywa się z osią stożka, osie x'' i y'' są równoległe do jego podstawy, a początek znajduje się w środku masy, składowe tensora bezwładności $\mathbf{I}_{(\text{CM})}$ mają w notacji macierzowej postać (zob. zadanie 12.4).

$$\hat{I}_{\text{CM}}'' = \frac{3}{80} M h^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tu jednak bardziej przydatne będą składowe tego tensora w związanym ze stożkiem układzie $\mathcal{O}'$, którego oś z' jest równoległa do osi z układu inercjalnego, a w wybranej szczególnej chwili (kiedy stożek dwiema tworzącymi styka się z osiami y i z układu inercjalnego) oś y' jest równoległa do osi y układu inercjalnego. $\mathcal{O}''$ jest względem układu $\mathcal{O}'$ obrócony o kąt (zob. prawy rysunek 61) $\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wokół osi $\mathbf{e}_{x''} = \mathbf{e}_{x'}$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{y''} &= \mathbf{e}_{y'} \cos \phi + \mathbf{e}_{z'} \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_{y'} + \mathbf{e}_{z'}), \\ \mathbf{e}_{z''} &= -\mathbf{e}_{y'} \sin \phi + \mathbf{e}_{z'} \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_{y'} - \mathbf{e}_{z'}). \end{aligned}$$

Napisany wyżej w postaci macierzowej tensor jest w istocie, tak jak i każdy wektor, obiektem geometrycznym i jako taki ma postać¹³³

$$\mathbf{I}_{\text{CM}} = \frac{3}{80} M h^2 (5 \mathbf{e}_{x''} \otimes \mathbf{e}_{x''} + 5 \mathbf{e}_{y''} \otimes \mathbf{e}_{y''} + 8 \mathbf{e}_{z''} \otimes \mathbf{e}_{z''}).$$

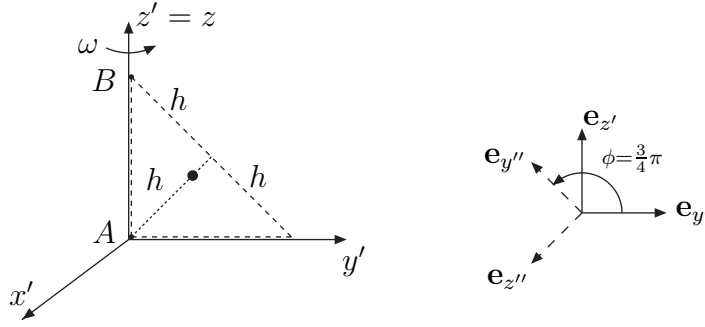
Wyrażając tu wektory $\mathbf{e}_{i''}$ przez wektory $\mathbf{e}_{j'}$ tak jak wyżej i korzystając z reguł

$$(-\mathbf{e}_{y'} + \mathbf{e}_{z'}) \otimes (-\mathbf{e}_{y'} + \mathbf{e}_{z'}) = \mathbf{e}_{y'} \otimes \mathbf{e}_{y'} - \mathbf{e}_{y'} \otimes \mathbf{e}_{z'} - \mathbf{e}_{z'} \otimes \mathbf{e}_{y'} + \mathbf{e}_{z'} \otimes \mathbf{e}_{z'},$$

etc., znajdujemy

$$\mathbf{I}_{\text{CM}} = \frac{3}{160} M h^2 (10 \mathbf{e}_{x'} \otimes \mathbf{e}_{x'} + 13 \mathbf{e}_{y'} \otimes \mathbf{e}_{y'} + 13 \mathbf{e}_{z'} \otimes \mathbf{e}_{z'} + 3 \mathbf{e}_{y'} \otimes \mathbf{e}_{z'} + 3 \mathbf{e}_{z'} \otimes \mathbf{e}_{y'}),$$

¹³³Tak jak wektor $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w_{(e)}^i$ jest “żywym” wektorem, niezależnym od konkretnej bazy $\mathbf{e}_i$, w której podane są jego składowe $w_{(e)}^i$, tak i tensor $\mathbf{I}_{\text{CM}}$ jest “żywym” obiektem geometrycznym, niezależnym od bazy $\mathbf{e}_{i''} \otimes \mathbf{e}_{j''}$ przestrzeni tensorowej w której jego składowymi $(I_{\text{CM}}'')_{ij}$ są elementy wypisanej wyżej macierzy $\hat{I}_{\text{CM}}''$; Dlatego też piszemy $\mathbf{I}_{\text{CM}}$ już bez żadnych primów; zostaje jedynie symbol $_{\text{CM}}$, bo taki obiekt geometryczny jednak zależy od punktu, względem którego jest zdefiniowany.



Rysunek 61: Po lewej: Stożek obracający się pod działaniem sił przyłożonych w punktach A i B . Środek masy zaznaczono kropką na osi stożka (położoną w jednej czwartej jego wysokości). Po prawej: związki między wersorami układów $\mathcal{O}''$ i $\mathcal{O}'$.

czyli, w notacji macierzowej,

$$\hat{I}'_{\text{CM}} = \frac{3}{160} M h^2 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 3 \\ 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście tę samą macierz $\hat{I}'_{\text{CM}}$ tensora (tj. jego składowe w bazie $\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}$) otrzymamy ze wzoru

$$(\hat{I}'_{\text{CM}})^{ij} = O^i_k O^j_l (\hat{I}''_{\text{CM}})^{kl} \equiv (O \cdot \hat{I}''_{\text{CM}} \cdot O^T)^{ij},$$

w którym macierz

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jest macierzą zmiany bazy taką, że¹³⁴

Mając macierz tensora układzie $\mathcal{O}'$ możemy już rozwiązać postawiony problem. Rozpatrzmy ruch stożka jako złożenie ruchu postępowego środka jego masy i obrotu stożka wokół tegoż punktu. Innymi słowy, obieramy punkt O w środku masy i korzystamy z uproszczonych równań dynamiki

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{D}_A^{\text{CM}} + \mathbf{D}_B^{\text{CM}}, \\ \frac{d^2}{dt^2} M \mathbf{R} &= \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B. \end{aligned}$$

Aby obliczyć występującą w pierwszym równaniu pochodną po czasie unikając problemu związanego z tym, że w układzie inercjalnym $\mathcal{O}$, w którym pochodna ta ma być obliczona, składowe tensora $\mathbf{I}_{\text{CM}}$ zmieniają się, stosujemy standardowy chwyt:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{d'}{dt} (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

¹³⁴W notacji z mojego słynnego skryptu do algebry macierz O jest więc macierzą $R_{(e' \leftarrow e'')}$.

Ponieważ w układzie $\mathcal{O}'$ związanym ze stożkiem zarówno składowe tensora $\mathbf{I}_{\text{CM}}$, jak i składowe prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ są stałe (prędkości kątowej, bo tak jest ona akurat tu skierowana: jest stałe równoległa do osi $\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_z$), więc cała pochodna d'/dt jest równa zeru. Jako pierwsze równanie dynamiki zostaje zatem równość wektorowa

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{D}_A^{\text{CM}} + \mathbf{D}_B^{\text{CM}},$$

którą na składowe można rozpisać w dowolnym układzie (bo już nie występuje w niej pochodna). Oczywiście najlepiej rozpisać ją w układzie $\mathcal{O}'$ związanym z bryłą, w którym składowe tensora $\mathbf{I}_{\text{CM}}$ są stałe. W tym układzie

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{3}{160} M h^2 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{3}{160} M h^2 \omega^2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Do obliczenia $\mathbf{D}_A^{\text{CM}}$ i $\mathbf{D}_B^{\text{CM}}$ potrzebne są wektory $\mathbf{d}_A$ i $\mathbf{d}_B$ o składowych w $\mathcal{O}'$ (łatwo je odczytać z lewego rysunku 61)

$$\mathbf{d}_A = -\frac{3h}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_B = \mathbf{d}_A + \sqrt{2}h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli składowymi przyłożonych sił w tym układzie są

$$\mathbf{F}_A = \begin{pmatrix} F_A^{x'} \\ F_A^{y'} \\ F_A^{z'} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{pmatrix} F_B^{x'} \\ F_B^{y'} \\ F_B^{z'} \end{pmatrix},$$

to składowymi ich momentów $\mathbf{D}_A = \mathbf{d}_A \times \mathbf{F}_A$, $\mathbf{D}_B = \mathbf{d}_B \times \mathbf{F}_B$ są

$$\mathbf{D}_A^{\text{CM}} = -\frac{3h}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F_A^{z'} - F_A^{y'} \\ F_A^{x'} \\ -F_A^{x'} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_B^{\text{CM}} = -\frac{3h}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} F_B^{z'} - F_B^{y'} \\ F_B^{x'} \\ -F_B^{x'} \end{pmatrix} + \sqrt{2}h \begin{pmatrix} -F_B^{y'} \\ F_B^{x'} \\ 0 \end{pmatrix},$$

tak, że

$$\mathbf{D}_A^{\text{CM}} + \mathbf{D}_B^{\text{CM}} = -\frac{3h}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (F_A + F_B)^{z'} - (F_A + F_B)^{y'} \\ (F_A + F_B)^{x'} \\ -(F_A + F_B)^{x'} \end{pmatrix} - \sqrt{2}h \begin{pmatrix} F_B^{y'} \\ -F_B^{x'} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ wektor $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega})$ ma niezerową tylko pierwszą składową, muszą zachodzić równości

$$\begin{aligned} -\frac{3h}{4\sqrt{2}} (F_A + F_B)^{x'} + \sqrt{2}h F_B^{x'} &= 0 \\ (F_A + F_B)^{x'} &= 0, \end{aligned}$$

które mówią, że $F_A^{x'} = F_B^{x'} = 0$. Z kolei równość pierwszych składowych wektora $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega})$ i wektora momentu siły daje związek

$$-\frac{9}{160}Mh^2\omega^2 = -\frac{3h}{4\sqrt{2}}[(F_A + F_B)^{z'} - (F_A + F_B)^{y'}] - \sqrt{2}hF_B^{y'}.$$

Jest wreszcie równanie ruchu środka masy stożka $M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$. Drugą pochodną wektora $\mathbf{R}$ trzeba oczywiście obliczyć w układzie inercjalnym, ale sam wektor będący pochodną można już rozpisać w układzie $\mathcal{O}'$. Znalezienie tej drugiej pochodnej wektora $\mathbf{R}$ jest proste: środek masy stożka porusza się po okręgu i $\ddot{\mathbf{R}}$ musi być związanym z tym przyspieszeniem dośrodkowym, a więc $|\ddot{\mathbf{R}}| = 3h\omega^2/4\sqrt{2}$. Wektor ten jest zawsze skierowany od środka masy ku osi $z = z'$; w układzie inercjalnym obraca się on, a w układzie $\mathcal{O}'$ jest stały:

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\mathbf{e}_{y'} \frac{3h}{4\sqrt{2}} \omega^2.$$

Równanie ruchu środka masy stożka daje więc związki

$$\begin{aligned} (F_A + F_B)^{x'} &= (F_A + F_B)^{z'} = 0, \\ (F_A + F_B)^{y'} &= -\frac{3h}{4\sqrt{2}} M\omega^2. \end{aligned}$$

Po ich wykorzystaniu nietrywialne równanie otrzymane z równości $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{D}_A^{\text{CM}} + \mathbf{D}_B^{\text{CM}}$ przybiera postać

$$\frac{9}{160}Mh^2\omega^2 = \frac{3h}{4\sqrt{2}} \left[\frac{3h}{4\sqrt{2}} M\omega^2 \right] + \sqrt{2}hF_B^{y'},$$

i wyznacza

$$F_B^{y'} = -\frac{9}{40\sqrt{2}} Mh\omega^2.$$

Zatem

$$F_A^{y'} = -\frac{21}{40\sqrt{2}} Mh\omega^2.$$

W ten sposób wykorzystane zostały już wszystkie informacje. Nie wyznaczają one $F_B^{z'}$ i $F_B^{z'}$ z osobna; tylko suma tych składowych musi znikać. Jest to fizycznie oczywiste. Podkreślimy jeszcze, że wyznaczyliśmy składowe sił $\mathbf{F}_A$ i $\mathbf{F}_B$ w układzie $\mathcal{O}'$, który obraca się wraz ze stożkiem. Zatem w układzie inercjalnym siły te zmieniają stale swój kierunek (tak jak trzeba ciągnąć i obracać się, by trzymając słonia za uszy - musi być afrykański; indyjskie mają za małe uszy - zafundować mu "karuzelę").

Siły $\mathbf{F}_A$ i $\mathbf{F}_B$ można też znaleźć rozpatrując obrót stożka wokół punktu A będącego początkiem układu inercjalnego $\mathcal{O}$ (i zarazem początkiem układu $\mathcal{O}'$). Tensor bezwładności

stożka względem punktu A otrzymujemy wykorzystując twierdzenie Steinera (zadanie 12.2):

$$I_{(A)}^{i''j''} = I_{(\text{CM})}^{i''j''} + M(\mathbf{R}^2 \delta^{i''j''} - R^{i''} R^{j''}),$$

gdzie $\mathbf{R} = \frac{3}{4}h \mathbf{e}_{z''}$ jest wektorem od punktu A do O (składowe tensorów $\mathbf{I}_{\text{CM}}$ i $\mathbf{I}_A$ wektora $\mathbf{R}$ są tu podane w układzie $\mathcal{O}''$ o osi z'' pokrywającej się z osią stożka). Stąd $I_A^{z''z''} = I_{\text{CM}}^{z''z''}$ oraz

$$I_{(A)}^{x''x''} = I_{(A)}^{y''y''} = I_{\text{CM}}^{x''x''} + \frac{9}{16}Mh^2 = \frac{15}{80}Mh^2 + \frac{9}{16}Mh^2 = \frac{3}{4}Mh^2,$$

czyli

$$\mathbf{I}_A = \frac{3}{4}Mh^2 \left(\mathbf{e}_{x''} \otimes \mathbf{e}_{x''} + \mathbf{e}_{y''} \otimes \mathbf{e}_{y''} + \frac{2}{5} \mathbf{e}_{z''} \otimes \mathbf{e}_{z''} \right).$$

Następnie, tak jak poprzednio, zapisujemy tensor $\mathbf{I}_A$ przez iloczyny tensorowe wersorów $\mathbf{e}_{x'}$ etc., co daje

$$\mathbf{I}_A = \frac{1}{40}Mh^2 (30 \mathbf{e}_{x'} \otimes \mathbf{e}_{x'} + 21 \mathbf{e}_{y'} \otimes \mathbf{e}_{y'} + 21 \mathbf{e}_{z'} \otimes \mathbf{e}_{z'} - 9 \mathbf{e}_{y'} \otimes \mathbf{e}_{z'} - 9 \mathbf{e}_{z'} \otimes \mathbf{e}_{y'}),$$

lub, w notacji macierzowej,

$$\hat{I}'_{(A)} = \frac{1}{40}Mh^2 \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & -9 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix}.$$

Jeśli punktem, wokół którego stożek się obraca, jest punkt A , to $\mathbf{J}$ - moment pędu stożka względem początku układu inercjalnego $\mathcal{O}$ - się upraszcza, bo $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$, a tym samym $\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{0}$, wobec czego

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_{(A)} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Tak jak poprzednio pochodną $\mathbf{J}$ po czasie w układzie inercjalnym wyrażamy przez łatwiejszą pochodną w układzie $\mathcal{O}'$ i dostajemy

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{(A)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_B,$$

bo moment siły $\mathbf{F}_A$ względem punktu A znika. Składowe wektora $\boldsymbol{\omega}$ w układzie $\mathcal{O}'$ są takie jak poprzednio, a wektor konieczny do znalezienia momentu siły $\mathbf{D}_B$ to wektor $\mathbf{r}_B = \mathbf{e}_{z'} \sqrt{2}h$. Zatem po prostych obliczeniach iloczynów wektorowych powyższa równość jest równoważna związkowi

$$\frac{9}{40}Mh^2\omega^2 \mathbf{e}_{x'} = -\sqrt{2}h \left(\mathbf{e}_{x'} F_B^{y'} - \mathbf{e}_{y'} F_B^{x'} \right).$$

Wynika stąd od razu, że $F_B^{x'} = 0$, a $F_B^{y'} = -(9/40\sqrt{2})Mh\omega^2$, tak jak poprzednio. Równania ruchu środka masy walca są w tym podejściu takie same i ponownie dają warunki

$$\begin{aligned}(F_A + F_B)^{x'} &= (F_A + F_B)^{z'} = 0, \\ (F_A + F_B)^{y'} &= -\frac{3h}{4\sqrt{2}}M\omega^2,\end{aligned}$$

które pozwalają wyznaczyć $F_A^{x'} = 0$, $F_A^{y'} = -(21/40\sqrt{2})Mh\omega^2$.

W rozważaniach tych nie była uwzględniana działająca na stożek siła ciężkości i siła reakcji podłoża ani ich momenty. Nietrudno zobaczyć, że są one nieistotne: zarówno suma tych sił jak i ich momentów jest równa zero.

Zadanie 12.15

Półwalec o promieniu R i masie M wykonany z jednorodnego kawałka materiału może toczyć się bez poślizgu po poziomej w stosunku do pola $\mathbf{g}$ powierzchni i tym samym wykonywać małe drgania wokół położenia równowagi. Wypisać równanie ruchu półwalca i znaleźć częstość jego małych drgań. Problem rozwiązać zarówno posługując się równaniami Lagrange’a II-go rodzaju, jak też i metodą “newtonowską”.

Rozwiązanie:

Najpierw trzeba znaleźć położenie środka masy półwalca, tj. obliczyć odległość a na rysunku 62. Jeśli początek układu $\mathcal{O}'$ związanego z półwalcem umieścimy w punkcie O , oś x' skierujemy przez środek masy, oś z' przed rysunek, a oś y' wzdłuż płaskiego wierzchu półwalca, to położenie X' środka masy w tym układzie będzie dane całką

$$X' = \frac{\rho}{M} \int_0^L dz' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi' \int_0^R dr' r' r' \cos \varphi' = \frac{2}{3} \frac{\rho}{M} R^3 L,$$

gdzie L jest długością (wzdłuż osi z') półwalca, a ρ jego gęstością. Ponieważ $M = \frac{1}{2}\pi R^2 L \rho$, znajdujemy, że

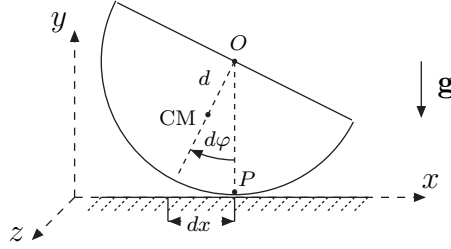
$$a = X' = \frac{4}{3\pi} R.$$

To samo d można otrzymać z twierdzenia aleksandryjczyka Pappusa (zobacz Feynmana Wykłady z Fizyki, t. I), które mówi, że jeśli figura płaska przemieszcza się tak, iż prędkość każdego jej punktu jest stale prostopadła do jej powierzchni, to objętość powstałej przez taki obrót bryły jest równa polu powierzchni obracanej razy droga przebyta przez środek masy tej powierzchni (przy założeniu, że jej gęstość masy jest jednorodna). Rzeczywiście: obracając przekrój półwalca, czyli półkole otrzymamy kulę o objętości $\frac{4}{3}\pi R^3$, która zgodnie z twierdzeniem Pappusa powinna być równa $\frac{1}{2}\pi R^2$ razy $2\pi a$.

Układ, jakim jest półwalec toczący się bez poślizgu ma jeden stopień swobody. Ściśle rzecz biorąc jest to układ o dwu stopniach swobody poddany więzom nieholonomicznym, które jednakowoż są trywialnie¹³⁵ całkowalne, co pozwala wyeliminować jedną z dwu zmiennych dynamicznych, jakimi mogłyby być (przed uwzględnieniem więzów holonomicznych) zmienne x i φ zdefiniowane na rysunku 62. Brak poślizgu oznacza, że chwilowa prędkość tego punktu półwalca, którym w danej chwili styka się on z powierzchnią jest równa zeru. Oznacza to, że sumaryczne przemieszczenie tego punktu w nieskończenie małym odcinku czasu dt jest równe zeru. Przemieszczenie to jest kombinacją przemieszczenia tego punktu spowodowanego obrotem bryły i ruchu postępowego bryły jako całości. Jeśli rozpatrujemy ruch bryły jako złożenie ruchu postępowego np. punktu O zaznaczonego na rysunku 62 i jej obrotu wokół osi przechodzącej przez ten punkt, to przemieszczenie punktu styczności P spowodowane ruchem postępowym punktu O wynosi dx , a przemieszczenie spowodowane obrotem półwalca wokół osi przechodzącej przez punkt O wynosi $-Ra\varphi$. Zatem warunek braku poślizgu oznacza istnienie więzów

$$dx - R d\varphi = 0.$$

¹³⁵Tj. bez żadnego czynnika całkującego.



Rysunek 62: Kołyszący się półwalec.

Przy ustalonych warunkach początkowych $x(0) = x_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ więzy te są równoważne więzom holonomicznym

$$x - x_0 = (\varphi - \varphi_0)R,$$

które pozwalają wyeliminować x na rzecz φ (tj. wybrać zmienną uogólnioną zgodną z więzami).

Znajdziemy równania ruchu półwalca na kilka sposobów aby zilustrować różne możliwości i pokazać pułapki (które czynią dynamikę bryły tak interesującą).

Przyjmijmy najpierw, że ruch półwalca jest złożeniem ruchu postępowego punktu O i obrotu wokół osi przechodzącej przez ten punkt. Rozłożymy wszystkie potrzebne wektory na wersory układu inercyjnego $\mathcal{O}$ o osiach x , y i z pokazanych na rysunku 62. Mamy więc

$$\mathbf{v}_O = \begin{pmatrix} R\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}'_O = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ -a \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathbf{R}'_O$ jest wektorem od punktu O do środka masy (oznaczonego “CM” na rysunku 62).

Zastosujemy najpierw metodę opartą na równaniu Lagrange’a II-go rodzaju, która jest najpewniejsza. Energia potencjalna V półwalca jest równa Mg razy wysokość środka masy, czyli

$$V = Mg(R - a \cos \varphi) = -Mga \cos \varphi + \text{const.}$$

Energia kinetyczna jest dana ogólnym wzorem

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_O^2 + M\mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Wprawdzie w układzie inercyjnym $\mathcal{O}$ nie wszystkie składowe tensora $\mathbf{I}_O$ są stałe - jego macierz w tym układzie ma postać

$$I_O = \begin{pmatrix} I_O^{xx} & I_O^{xy} & 0 \\ I_O^{xy} & I_O^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_O^{zz} \end{pmatrix}$$

- ale dzięki temu, że prędkość kątowna ma tylko składową z -ową, zależną od kąta φ elementy I_O^{xx} , I_O^{xy} i I_O^{yy} nie wejdą do wzoru na T . Łatwo znajdujemy, że

$$\mathbf{v}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) = -Ra\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

a stąd

$$L = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + Mga \cos \varphi.$$

I_O oznacza tu składową I_O^{zz} tensora momentu bezwładności, która jest równa oczywiście $I_O^{z'z'} = \frac{1}{2}MR^2$ (moment bezwładności półwalca względem osi przechodzącej przez punkt O i równoległej do osi z jest oczywiście taki sam, jak moment pełnego walca) - czyli odpowiedniej składowej w układzie związanym z półwalcem.

Dalej działa już “maszynka lagranżowska”: równaniem Eulera-Lagrange’a jest

$$\frac{d}{dt} \left[MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \dot{\varphi} \right] = -Mga \sin \varphi + MRa\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

(drugi wyraz po prawej stronie bierze się z pochodnej energii kinetycznej T po φ), czyli, po wykonaniu pozostałej pochodnej po czasie

$$MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi - MRa\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Zmiana znaku drugiego wyrazu po prawej stronie wzięła się teraz ze zróźniczkowania po czasie $\cos \varphi$ po stronie lewej, co dało tam wyraz $2MRa\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$.

Oczywiście nie da się uzyskanego pełnego równania ruchu półwalca rozwiązać ściśle analitycznie. Jak zwykle w takich przypadkach rozwiązujemy je więc w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi, tj. linearyzując je. Położeniem równowagi (czyli ścisłym rozwiązaniem $\varphi(t) = \varphi_0$) jest $\varphi_0 = 0$ i zatrzymując tylko wyrazy liniowe w φ (i traktując $\dot{\varphi}$ również jak wielkość małą, tak jak sam kąt φ) otrzymujemy

$$MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \right) \ddot{\varphi} = -Mga\varphi,$$

co jest równaniem oscylatora harmonicznego o częstości

$$\Omega = \sqrt{\frac{ga}{R^2(1 + I_O/MR^2 - 2a/R)}}.$$

Alternatywnie, można rozwiązanie pełnego równania sprowadzić do kwadratury, czyli do jednej całki korzystając z tego, że Lagrangian nie zależy jawnie od czasu i wobec tego stałą ruchu jest “hamiltonian”

$$h \equiv \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - Mgd \cos \varphi = E = \text{const.}$$

(Nazwaliśmy tę stałą E , bo tu $h = T + V$, czyli jest to prawdziwa energia całkowita). Po rozdzieleniu zmiennych dostajemy stąd

$$\int dt = \pm \sqrt{\frac{MR^2}{2}} \int d\varphi \sqrt{\frac{1 + I_O/MR^2 - 2(a/R) \cos \varphi}{E + Mga \cos \varphi}}.$$

Dalej postępujemy standardowo: mianownik pod pierwiastkiem zapisujemy w postaci $E - V_{\text{eff}}(\varphi)$, znajdujemy położenie φ_0 minimum $V_{\text{eff}}(\varphi) = -Mga \cos \varphi$ i rozwijamy ten potencjał w szereg Taylora wokół φ_0 do wyrazów kwadratowych w odchyleniu od minimum, czyli w $\varphi - \varphi_0$. Jednocześnie w liczniku przybliżamy φ przez wartość φ_0 . Ponieważ tu $\varphi_0 = 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int dt &= \pm \sqrt{\frac{MR^2}{2}} \int d\varphi \sqrt{\frac{1 + I_O/MR^2 - 2(a/R)}{E + Mga - \frac{1}{2}Mga \varphi^2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{MR^2}{2} \frac{1 + I_O/MR^2 - 2(a/R)}{E + Mga}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{Mga}{2(E+Mga)}} \varphi\right)^2}} = \pm \frac{1}{\Omega} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \end{aligned}$$

z $\xi \equiv \sqrt{Mgd/2(E + Mgd)} \varphi$, co daje jako rozwiązanie harmoniczną zależność $\varphi(t)$ z częstością Ω , tak jak metoda linearyzacji równania ruchu.

Znajdziemy teraz równania ruchu półwalca metodą Newtonowską, nadal traktując jego ruch jak złożenie ruchu postępowego punktu O i obrotu wokół osi przechodzącej przez ten punkt. Wektorowymi równaniami wyznaczającymi ruch półwalca są

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{J} &= \mathbf{D}_g + \mathbf{D}_R + \mathbf{D}_T, \\ \frac{d^2}{dt^2} M\mathbf{R}_{\text{CM}} &= M\mathbf{g} + \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_T. \end{aligned}$$

$\mathbf{R}_{\text{CM}}$ jest tu wektorem wodzącym (z początku wybranego układu inercjalnego) środka masy półwalca, $\mathbf{F}_R$ i $\mathbf{F}_T$ są odpowiednio siłami reakcji i tarcia, $\mathbf{D}_R$ i $\mathbf{D}_T$ momentami tych sił, a

$$\mathbf{J} = M\mathbf{R}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_O + M\mathbf{r}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) + \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega},$$

jest momentem pędu półwalca obliczonym względem punktu będącego początkiem układu inercjalnego pokazanego na rysunku 62. Momenty sił $\mathbf{D}_g$, $\mathbf{D}_R$ i $\mathbf{D}_T$ są również liczone względem tego samego punktu. Pochodne po czasie figurujące w tych równaniach są pochodnymi obliczanymi w układzie inercjalnym. Składowe wektorów $\mathbf{R}'_O$, $\boldsymbol{\omega}$ zostały już wypisane wcześniej.

$$\mathbf{r}_O = \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{r}}_O = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\text{CM}} = \mathbf{r}_O + \mathbf{R}'_O = \begin{pmatrix} x - a \sin \varphi \\ R - a \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cierpliwie obliczamy potrzebne iloczyny wektorowe:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_O &= -\dot{x}(R - a \cos \varphi) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{r}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_O) &= \dot{\varphi} a (x \sin \varphi + R \cos \varphi) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Podobnie obliczamy momenty sił $\mathbf{F}_g = -Mg \mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_R = F_R \mathbf{e}_y$ i $\mathbf{F}_T = F_T \mathbf{e}_x$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_g &= \mathbf{R}_{\text{CM}} \times \mathbf{F}_g = -Mg(x - a \sin \varphi) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{D}_R &= x \mathbf{e}_x \times \mathbf{F}_R = x F_R \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{D}_T &= x \mathbf{e}_x \times \mathbf{F}_T = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Ponieważ wektor $\boldsymbol{\omega}$ ma niezerową tylko ostatnią składową, zmieniając się z φ (w układzie inercyjnym) składowe tensora $\mathbf{I}_O$ nie wejdą w równania: $\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{e}_z I_O^{zz} \dot{\varphi}$ i dwa pierwsze równania powstające z rozpisania na składowe w układzie inercyjnym pierwszego z równań wektorowych sprowadzają się do tożsamości $0 = 0$. Trzecie z tych równań (z -owa składowa), wyznaczające szybkość zmian z -owej składowej momentu pędu ma postać

$$\frac{d}{dt} [-M\dot{x}(R - a \cos \varphi) + Ma(x \sin \varphi + R \cos \varphi) \dot{\varphi} - I_O^{zz} \dot{\varphi}] = x F_R - Mg(x - a \sin \varphi).$$

Z kolei w równaniu ruchu środka masy rozpisany na składowe układu inercyjnego trzecie z równań jest tożsamością $0 = 0$, dwa zaś pierwsze to

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} M(x - a \sin \varphi) &= F_T, \\ \frac{d^2}{dt^2} M(R - a \cos \varphi) &= -Mg + F_R\end{aligned}$$

Dotąd nie został jeszcze użyty warunek braku poślizgu. Pozwala on jednoznacznie wyrazić $\dot{x}$ jako $R\dot{\varphi}$, ale nie umożliwia (bez znajomości warunków początkowych) wyeliminowania samego x na rzecz φ . Nie jest to na szczęście potrzebne. Jeśli założymy, że ruch jest bez poślizgu, to pierwsze z tych dwu równań wyznacza tylko konieczną do tego siłę tarcia:

$$F_T = M(\ddot{x} + a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - a \ddot{\varphi} \cos \varphi).$$

Z drugiego wyznaczamy F_R

$$F_R = M(g + a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + a \ddot{\varphi} \sin \varphi),$$

Po jej wstawieniu do równania wyrażającego szybkość zmian w czasie z -owe składowej całkowitego momentu pędu półwalca otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [-M\dot{x}(R - a \cos \varphi) + Ma(x \sin \varphi + R \cos \varphi) \dot{\varphi} - I_O^{zz} \dot{\varphi}] \\ = Mg a \sin \varphi + Mx(a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + a \ddot{\varphi} \sin \varphi).\end{aligned}$$

Wreszcie, po pracowitym wykonaniu po lewej stronie pozostałej pochodnej po czasie wszystkie wyrazy z “gołym” x się zredukują tak, jak powinny, i otrzymamy

$$-M\ddot{x}(R - a \cos \varphi) + MRa \ddot{\varphi} \cos \varphi - MRa \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - I_O^{zz} \ddot{\varphi} = Mga \sin \varphi,$$

co po wykorzystaniu warunku ruchu bez poślizgu, $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$, da uzyskane już wcześniej równanie

$$MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi - MRa \dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Mając zależność $\varphi(t)$ można obliczyć siłę reakcji i siłę tarcia konieczną do ruchu bez poślizgu i sprawdzać kiedy $|F_T| \leq \mu_{\text{stat}} |F_R|$, co jest konieczne, by ruch taki mógł zachodzić.

Warto rozwiązać to zadanie jeszcze raz przyjmując tym razem, że ruch jest złożeniem ruchu postępowego punktu P zaznaczonego na rysunku 62 i obrotu półwalca wokół tego punktu, bo pozwoli to zobaczyć niebezpieczeństwa, na jakie można się natknąć przy nie dość uważnym trzymaniu się zasad.

Aby porównać to podejście z poprzednim trzeba najpierw znaleźć składową I_P^{zz} (która jest taka sama zarówno w układzie inercjalnym, jak też i w układzie związanym z półwalcem) tensora momentu bezwładności półwalca względem punktu P i wyrazić ją przez I_O^{zz} . W tym celu wykorzystujemy twierdzenie Steinera. Należy tylko pamiętać, że punkt O nie był środkiem masy, więc I_O^{zz} trzeba najpierw “cofnąć” do środka masy, czyli obliczyć $I_{(\text{CM})}^{zz}$ i dopiero z $I_{(\text{CM})}^{zz}$ obliczyć I_P^{zz} . Niech c będzie odległością od środka masy do punktu P . Z uogólnionego twierdzenia Pitagorasa (patrzac na rysunek 62) znajdujemy, że

$$c^2 = a^2 + R^2 - 2Ra \cos \varphi,$$

więc

$$I_P^{zz} = I_{(\text{CM})}^{zz} + Mc^2 = I_O^{zz} - Ma^2 + Mc^2 = MR^2 \left(1 + \frac{I_O^{zz}}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right).$$

Jeśli zastosujemy metodę lagrangeowską, otrzymamy natychmiast poprawne równanie ruchu walca: z ogólnego wzoru

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_P^2 + \mathbf{v}_P \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_P) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega},$$

ale ponieważ chwilowa prędkość punktu P jest równa zero (warunek braku poślizgu!), więc

$$L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega} - V = \frac{1}{2} MR^2 \left(1 + \frac{I_O^{zz}}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + Mga \cos \varphi.$$

Jest to ten sam lagrangian, co poprzednio.

Pułapki czyhają jednak, jeśli będziemy chcieli wypisać równania Newtona. Aby uprościć rachunki przyjmijmy że teraz początek inercjalnego układu odniesienia przesuwamy w

prawo, tak by punkt P (w chwili dla której piszemy równania Newtona) znalazł się dokładnie nad nim. Wtedy (w tym momencie) $\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_T = \mathbf{0}$, a

$$\mathbf{D}_g = \mathbf{e}_z Mga \sin \varphi,$$

(t.j. ma tę postać, co poprzednio, tylko z $x = 0$). Wektor całkowitego momentu pędu półwalca dany ogólnym wzorem

$$\mathbf{J} = M\mathbf{R}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_P + M\mathbf{r}_P \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_P) + \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega},$$

upraszcza się do

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{e}_z I_P^{zz} \dot{\varphi},$$

bo $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ (znów warunek braku poślizgu!), a $\mathbf{r}_P = \mathbf{0}$ dzięki wyborowi początku układu inercjalnego. Zatem równanie wyrażające szybkość zmiany momentu pędu ma teraz postać (znów dwie pierwsze składowe tego wektorowego równania dają tożsamości $0 = 0$):

$$\frac{d}{dt} (-I_P^{zz} \dot{\varphi}) = Mga \sin \varphi,$$

i po zróżniczkowaniu po czasie (i zmianie znaków obu stron) otrzymujemy równanie

$$MR^2 \left(1 + \frac{I_O}{MR^2} - 2\frac{a}{R} \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} + 2MRa\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -Mga \sin \varphi.$$

Wygląda ono podobnie do otrzymanego poprzednio (już trzema sposobami!), ale ma czynnik 2 przed drugim wyrazem po lewej stronie, którego to czynnika poprzednio nie było. Stosunek wyników 3 : 1 (w tym dwa otrzymane niezawodną metodą lagrangeowską!) wskazuje, że to to ostatnie równanie jest błędne. W istocie, przy wyprowadzeniu tego równania popełnione zostały dwa błędy.

Po pierwsze, wprowadzie moment pędu półwalca rzeczywiście w chwili, w której punkt P jest dokładnie nad początkiem inercjalnego układu odniesienia ma podaną wyżej prostą postać, jednak w równanie Newtona wchodzi pochodna $\mathbf{J}$ po czasie

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} = M \left[\dot{\mathbf{R}}_{\text{CM}} \times \mathbf{v}_P + \mathbf{R}_{\text{CM}} \times \dot{\mathbf{v}}_P + \mathbf{v}_P \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_P) + \mathbf{r}_P \times \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}'_P) \right] + \frac{d}{dt} \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Trzy z wyrazów w nawiasie kwadratowym rzeczywiście znikają (znikają wektory $\mathbf{v}_P$ i $\mathbf{r}_P$), ale wyraz $\mathbf{R}_{\text{CM}} \times \dot{\mathbf{v}}_P = \mathbf{R}_{\text{CM}} \times \mathbf{a}_P$ nie znika. Trzeba bowiem pamiętać, że gdy piszemy równania Newtona, punkt, wokół którego rozpatrujemy obrót bryły (przez który przechodzi chwilowa oś jej obrotu), porusza się razem z bryłą. Wprawdzie w danej chwili punkt P spoczywa (z punktu widzenia układu inercjalnego), lecz chwilę później, gdy półwalec się nieco obróci, punkt P już nie będzie punktem styczności z podłożem i będzie miał niezerową prędkość. A to oznacza, że w chwili, gdy jest on punktem styczności $\dot{\mathbf{v}}_P \neq \mathbf{0}$! Łatwo zobaczyć, że przyspieszenie to musi być równe $\dot{\mathbf{v}}_P = \mathbf{e}_y R \dot{\varphi}^2$, bo w

układzie inercyjnym (w którym obliczamy pochodną $\mathbf{J}$) punkt P porusza się po okręgu o promieniu R i ma prędkość kątową $\dot{\varphi}$. Tak więc w równaniu Newtona musimy uwzględnić po lewej stronie wyraz

$$+M\mathbf{R}_{\text{CM}} \times \dot{\mathbf{v}}_P = -\mathbf{e}_z MR d\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$

Drugi błąd, jaki został popełniony, polega na zróżniczkowaniu po czasie tensora momentu bezwładności I_P^{zz} . Rzeczywiście, skoro punkt P , wokół którego rozpatrujemy obrót bryły jest na sztywno przyczepiony do niej, to składowa I_P^{zz} pozostaje stała (kąt φ w niej należy utożsamić z wartością φ_P jaką kąt φ miał wtedy, gdy punkt P był punktem styczności półwalca z podłożem. Aby rozwiązać wszelkie wątpliwości co do tego, czy należy obliczać pochodną składowej I_P^{zz} tensora, możemy zastosować znany wzór

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{d'}{dt} (\mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Drugi wyraz znika bo w rozpatrywanym problemie wektor $\mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega}$ jest równoległy do $\boldsymbol{\omega}$. Pochodna d'/dt w pierwszym wyrazie jest obliczana w układzie $\mathcal{O}'$ na sztywno związanym z bryłą i wobec tego w tym układzie składowa $I_P^{z'z'}$ jest stała. Tu jednak $I_P^{z'z'} = I_P^{zz}$, więc istotnie przy różniczkowaniu po czasie $\mathbf{J}$ należało napisać

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{e}_z I_P^{zz} \ddot{\varphi}.$$

Po tych poprawkach otrzyma się już to samo równanie, co poprzednio.¹³⁶

W szkolnych rozwiązaniach zagadnień ruchu bryły sztywnej często pisze się równania ruchu przyjmując, że bryła obraca się wokół punktu styczności z podłożem. Jednak dzięki wysokiej symetrii tych brył nie wpada się w kłopoty takie jak tutaj, ponieważ wektor $\dot{\mathbf{v}}_P$ jest w tych szkolnych przykładach równoległy do wektora $\mathbf{R}_{\text{CM}}$ i stąd dodatkowy wyraz, który tu trzeba było uwzględnić, automatycznie znika. Po drugie istotna dla tych szkolnych zagadnień składowa momentu bezwładności jest (znów wskutek wysokiej symetrii) niezależna od zmiennych dynamicznych.

¹³⁶Pouczającym ćwiczeniem może być otrzymanie tego równania ostatnią metodą bez zakładania, że punkt P w chwili, w której pisane są równania Newtona znajduje się dokładnie nad początkiem inercyjnego układu odniesienia.

Przypomnienie

Równania kanoniczne. Równania Lagrange’a drugiego rodzaju otrzymywane z lagrangianu, który należy traktować jak funkcję $2f$ zmiennych (f jest tu liczbą stopni swobody układu): f uogólnionych położeń q^i oraz f uogólnionych prędkości $v^i \equiv \dot{q}^i$, są układem f zwyczajnych równań różniczkowych drugiego rzędu. Matematycy nauczają, że taki układ można zawsze sprowadzić do układu $2f$ równań pierwszego rzędu. W mechanice osiąga się to przechodząc do formalizmu kanonicznego (Hamiltonowskiego), w którym centralną rolę odgrywa hamiltonian będący transformatą Legendre’a lagrangianu $L = L(q, v, t)$ w f zmiennych v^i , tj. funkcją f pędów kanonicznych zdefiniowanych jako pochodne lagrangianu po prędkościach uogólnionych:

$$p_i(q, v) = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v^i}, \quad i = 1, \dots, f.$$

Ponieważ w różniczce (pomocniczej na razie) wielkości¹³⁷ $h(q, v, t) \equiv (\partial L / \partial v^i) v^i - L(q, v, t)$

$$\begin{aligned} dh(q, v, t) &= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} v^i - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) dq^j + \left(\frac{\partial L}{\partial v^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} v^i - \frac{\partial L}{\partial v^j} \right) dv^j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q^j} dq^j + v^i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dv^j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

różniczki dv^i prędkości można jednoznacznie wyrazić przez różniczki dq^i oraz pędów

$$dp_i = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j} dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dv^j,$$

tak iż $dh = -(\partial L / \partial q^i) dq^i + v^i dp_i - (\partial L / \partial t) dt$, funkcja $H(q, p, t) = h(q, v(q, p), t)$ jest w istocie funkcją q^i oraz p_i (i ewentualnie czasu t), gdyż startując z zadanej wartości H w jakimś punkcie $(q, v(q, p), t)$ można zamkniętą jedno-formę $dh = dH$ “odcałkować” (tak jak to robimy w termodynamice) do pełnej funkcji $H(q, p, t)$. Jako transformata Legendre’a hamiltonian

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}^i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p), t),$$

w którym prędkości uogólnione $v^i = \dot{q}^i$ są wyrażone¹³⁸ przez pędy p_i i zmienne q^i , koduje

¹³⁷Zgodnie z zaleceniem wujka A.E. pomijamy symbole sum; powtarzające się (na różnych poziomach) wskaźniki traktujemy jak domyślnie zsumowane.

¹³⁸Tu zakładamy, że związki definiujące pędy p_i daje się odwrócić. Jeśli nie jest to możliwe, rozpatrywany układ fizyczny należy do klasy układów poddanych więzom. Jeśli są to tzw. więzy drugiego rodzaju, hamiltonizację układu daje się przeprowadzić, ale wymaga to pewnych sztuczek wymyślonych przez Diraca (zob. zadanie ??); jeśli więzy są pierwszego rodzaju, to układ ma pewną symetrię cechowania i jego ewolucja czasowa nie jest jednoznacznie wyznaczona nawet przez lagrangian. O tym wszystkim zwykle wykładam w ramach kwantowej teorii pola.

w sobie tę samą informację o układzie, co lagrangian.¹³⁹ W szczególności, układ $2f$ kanonicznych (Hamiltona) różniczkowych równań pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, & i &= 1, \dots, f, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q^i}, & i &= 1, \dots, f, \end{aligned}$$

jest równoważny układowi f równaniom Eulera-Lagrange'a. Istotnie, Jeśli zmienne q^i spełniają równania Lagrange'a, to

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \equiv \dot{p}_i,$$

i wypisane wyżej równania kanoniczne (oraz związek $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$) wynikają natychmiast z postaci różniczki hamiltonianu $H = d(-L(q, \dot{q}(q, p), t) - p_i \dot{q}^i(q, p))$:

$$\begin{aligned} dH(q, p, t) &= -\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} dp_i \right) \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial t} dt + \dot{q}^i dp_i + p_i \left(\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} dp_i \right) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt = -\dot{p}_i dq^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Ważną zaletą równań kanonicznych jest to, że jeśli jakaś zmienna q nie występuje w Hamiltonianie, to sprzężony z nią pęd kanoniczny p jest stałą ruchu, co zmniejsza liczbę rozwiązywanych sprzężonych równań. Niech np. hamiltonian zależy tylko od $n \leq f$ zmiennych q^i . Wtedy układ $2f$ równań redukuje się od razu do układu $2n$ równań na n zmiennych q^i i n pędów p_i $i = 1, \dots, n$, bo $f - n$ pozostałych pędów, od których zależy hamiltonian można od razu położyć równe stałym β^l , $l = n + 1, \dots, f$. Po rozwiązaniu tego zredukowanego układu $2n$ równań, zależność od czasu $f - n$ pozostałych zmiennych q^l można otrzymać całkując osobny układ $f - n$ równań

$$\dot{q}^l = \frac{\partial}{\partial \beta_l} H(q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t), \beta_{n+1}, \dots, \beta_f),$$

¹³⁹Nie było by tak, gdyby po prostu wyrazić sam lagrangian przez pędy p^i . Niech bowiem będzie dana (wypukła - z niewypukłymi są dodatkowe kłopoty) funkcja $f(\xi)$. Jeśli odwrócimy związek $p = f'(\xi)$ i skonstruujemy funkcję $g(p) = f(\xi(p))$, to funkcje $g(p)$ odpowiadające funkcjom $f_1(\xi)$ i $f_2(\xi) = f_1(\xi - a)$ będą identyczne - najłatwiej to zobaczyć robiąc odpowiedni rysunek - czyli znając funkcję $g(p)$ nie można jednoznacznie odtworzyć funkcji f . Jeśli jednak przez każdy punkt wykresu funkcji $f(\xi)$ poprowadzi się styczną do tego wykresu, to zbiór takich stycznych wyznacza funkcję f jednoznacznie. Każdą zaś styczną z tego zbioru można scharakteryzować podając jej nachylenie p i rzędną (to jednak pionowa oś się nazywa osią rzędnych, a pozioma odciętych!) punktu jej przecięcia z osią y . Transformata Legendre'a funkcji f jest to właśnie ta rzędną w funkcji nachylenia: jeśli weźmiemy punkt ξ_0 i $f'(\xi_0) = p$, to prosta styczna do wykresu funkcji f przechodząca przez punkt $(\xi_0, f(\xi_0))$ ma równanie $y = p\xi + f(\xi_0) - p\xi_0$ i rzędną $g(p)$ jej punktu przecięcia z osią y jest $g(p) = f(\xi_0) - p\xi_0$. W mechanice bierze się jako charakterystykę tej prostej nie $g(p)$, a $-g(p)$ po to, aby hamiltonian miał (w większości przypadków) sens całkowitej energii.

w których $q^1(t), \dots, q^n(t)$ i $p_1(t), \dots, p_n(t)$ są już dane jako jawne funkcje czasu.¹⁴⁰

Kanoniczne równania Hamiltona można zapisać w eleganckiej postaci wprowadzając tzw. nawiasy Poissona. Jeśli $F(q, p, t)$ i $G(q, p, t)$ są dwiema funkcjami zmiennych kanonicznych q^i i p_i , $i = 1, \dots, f$, to ich nawiasem Poissona jest wielkość dana wyrażeniem

$$\{F(q, p, t), G(q, p, t)\}_{\text{PB}} \equiv \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right).$$

Pełną (tzn. uwzględniającą także zależność od czasu zmiennych q^i i p_i) pochodną po czasie dowolnej wielkości $F(q, p, t)$ można za pomocą nawiasu Poissona napisać w postaci

$$\frac{d}{dt} F(q, p, t) = \{F, H\}_{\text{PB}} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

a same ównania Hamiltona można zapisać jako

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}_{\text{PB}}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{\text{PB}}.$$

Nawiasy Poissona mają proste właściwości: są biliniowe, antysymetryczne ($\{F, G\}_{\text{PB}} = -\{G, F\}_{\text{PB}}$) i spełniają regułę “wysadzania”¹⁴¹ taką jak komutatory operatorów w mechanice kwantowej:

$$\{F, G_1 G_2\}_{\text{PB}} = G_1 \{F, G_2\}_{\text{PB}} + \{F, G_1\}_{\text{PB}} G_2,$$

oraz tzw. tożsamość Jacobiego

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} + \{F_3, \{F_1, F_2\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} + \{F_2, \{F_3, F_1\}_{\text{PB}}\}_{\text{PB}} = 0.$$

Jest też jasne, że jeśli wielkość F nie zależy od czasu jawnie (a tylko poprzez zależność od q^i i p_i), to jest ona stałą ruchu (wielkością zachowaną), gdy $\{F, H\}_{\text{PB}} = 0$.

Tak jak równania Lagrange’a drugiego rodzaju są równaniami Eulera-Lagrange’a problemu wariacyjnego

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = 0, \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0,$$

¹⁴⁰Należy to porównać z równaniami Lagrange’a w sytuacji, gdy lagrangian nie zależy od $f-n$ zmiennych q^l : wynikające z tego równości

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l} = 0, \quad l = n+1, \dots, f,$$

stanowią nadal równania różniczkowe, wprawdzie już tylko pierwszego rzędu, ale które należy rozwiązywać razem z pozostałymi n różniczkowymi równaniami drugiego rzędu.

¹⁴¹Jakoś mi się ona kojarzy z takim dowcipem: jadą miś i zajączek pociągiem w jednym przedziale i zajączek się zwierza misiowi (jak to zwierz zwierzowi), że nie ma biletu; miś na to “a to nic takiego, jak będzie nadchodził konduktor, to ja Ciebie, Zajączku, złapię za uszka i potrzymam za oknem i tak unikniesz kary”; przychodzi konduktor, sprawdza misiowi bilet, a potem pyta: “a co Ty tam niedźwiedziu” trzymasz za oknem?” a miś otrzepując łapy: “a już nie!”...

tak i równania kanoniczne są równaniami Eulera-Lagrange'a wariacyjnego problemu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i p_i \dot{q}^i - H(q, p, t) \right\} = 0, \quad \delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0,$$

w którym na wariacje $\delta p_i(t)$ nie są narzucone żadne warunki brzegowe. Można też, i tak założymy dalej, rozpatrując przekształcenia kanoniczne, zawęzić klasę dopuszczalnych wariacji pędów do spełniających warunki $\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$. Jest też jasne, że przy takim zawężeniu klasy dopuszczalnych wariacji dodanie do wyrażenia podcałkowego w powyższej zasadzie wariacyjnej dowolnego wyrażenia będącego pełną pochodną po czasie nie ma wpływu na otrzymywane z niej równania kanoniczne.

Przekształcenia kanoniczne. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju są niezmiennicze względem dowolnej zamiany współrzędnych uogólnionych. Jeśli stare współrzędne q^i zostaną wyrażone przez nowe Q^i ,

$$q^i = q^i(Q, t),$$

(zakładamy przy tym, że jacobian $\det(\partial q / \partial Q) \neq 0$), to zależność od czasu zmiennych Q^i jest dana równaniami

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}^i} = \frac{\partial L_Q}{\partial Q^i}, \quad i = 1, \dots, f,$$

w których występuje nowy lagrangian $L_Q(Q, \dot{Q}, t)$, który otrzymuje się przez wyrażenie starego lagrangianu $L_q(q, \dot{q}, t)$ przez nowe zmienne:

$$L_Q(Q, \dot{Q}, t) = L_q(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t).$$

Jest to oczywiste, gdyż lagrangian (w mechanice nierelatywistycznej) jest różnicą fizycznej energii kinetycznej (przypomnijmy: zdefiniowanej względem jakiegoś układu inercjalnego) i energii potencjalnej, które zachowują swój sens niezależnie od tego, przez jakie zmienne zostaną wyrażone. (Pozostaje to słuszne także w uogólnieniach mechaniki, gdy lagrangian niekoniecznie ma taką właśnie postać; można się wtedy odwołać do argumentu, że działanie I , którego punktu stacjonarnego jako funkcjonału szuka się rozwiązując równania Eulera-Lagrange'a, jest pewną obiektywną wielkością, która może być sparametryzowana na różne sposoby). Przy takich przekształceniach współrzędnych uogólnionych sposób przekształcania się pędów kanonicznie z nimi sprzężonych jest jednoznacznie wyznaczony:

$$P_i = \frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}^i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{Q}^i} = \sum_{j=1}^f p_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że

$$\dot{q}^j = \frac{d}{dt} q^j(Q, t) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q^j}{\partial Q^k} \dot{Q}^k + \frac{\partial q^j}{\partial t},$$

skąd wynika, że w różniczce $d\dot{q}^j(Q, \dot{Q}, t)$ współczynnikiem przy $d\dot{Q}^i$ jest właśnie $\partial q^j / \partial Q^i$. Przy takich przekształceniach zmianie nie ulega także postać równań kanonicznych: zależność od czasu nowych zmiennych Q^i i P_i jest dana równaniami

$$\begin{aligned}\dot{Q}^i &= \frac{\partial H_{QP}(Q, P, t)}{\partial P_i}, & i = 1, \dots, f, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H_{QP}(Q, P, t)}{\partial Q^i}, & i = 1, \dots, f,\end{aligned}$$

w których występuje nowy Hamiltonian $H_{QP}(Q, P, t)$ otrzymany ze starego, $H_{qp}(q, p, t)$ według przepisu

$$H_{QP}(Q, P, t) = H_{qp}(q(Q, t), p(P, Q, t), t),$$

gdzie $p_i = p_i(P, Q, t)$ uzyskuje się z odwrócenia (liniowych w p i P) związków wyprowadzonych wyżej. Przekształcenia należące do tej klasy nazywa się punktowymi.

Równania kanoniczne są jednak niezmiennicze także względem znacznie szerszej grupy przekształceń, zwanych przekształceniami kanonicznymi, w których niema bezpośredniego związku między przekształceniami zmiennych q^i i zmiennych p_i . Mają one ogólną postać

$$\begin{aligned}q^i &= q^i(Q, P, t), \\ p_i &= p_i(Q, P, t),\end{aligned}$$

przy czym zakłada się, iż niezerowy jest jacobian

$$\det \begin{pmatrix} (\partial q / \partial Q) & (\partial q / \partial P) \\ (\partial p / \partial Q) & (\partial p / \partial P) \end{pmatrix}.$$

Przekształcenia te oraz nowy hamiltonian $\bar{H}(Q, P, t)$ są konstruowane tak, by $q^i(t)$ i $p_i(t)$ otrzymane z powyższych związków spełniały równania kanoniczne (ze starym hamiltonianem $H(q, p, t)$), gdy $Q^i(t)$ i $P_i(t)$ są rozwiązaniami równań kanonicznych z hamiltonianem $\bar{H}(Q, P, t)$. Dopuszczalną postać takich przekształceń oraz postać nowego hamiltonianu ustala się zauważając, że powyższe żądanie jest równoważne temu, by równość

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}^i - \bar{H}(Q, P, t) \right\} = 0,$$

przy $\delta Q^i(t_1) = \delta Q^i(t_2) = 0$, $\delta P_i(t_1) = \delta P_i(t_2) = 0$, zachodząca, gdy zmienne $Q^i(t)$, $P_i(t)$ spełniają kanoniczne równania z hamiltonianem $\bar{H}(Q, P, t)$, pociągała za sobą znikanie także wyrażenia

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i p_i \dot{q}^i - H(q, p, t) \right\},$$

przy skorelowanych (za pośrednictwem związków $q = q(Q, P, t)$, $p = p(Q, P, t)$) z $\delta Q^i(t)$ i $\delta P_i(t)$ wariacjach $\delta q^i(t)$ i $\delta p_i(t)$ (spełniających wobec tego warunki $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$,

$\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0$) na trajektorii $q^i(t)$, $p_i(t)$ zadanej wzorami $q^i(t) = q^i(Q(t), P(t), t)$, $p_i(t) = p_i(Q(t), P(t), t)$. Dostatecznym warunkiem tego, by tak było jest zaś, by przy wariacjach zmiennych $\delta Q^i(t)$ i $\delta P_i(t)$ o ustalonych końcach wokół *dowolnej* trajektorii $Q^i(t)$ i $P_i(t)$ (a nie tylko trajektorii spełniającej kanoniczne równania z hamiltonianem $\bar{H}$) i skorelowanych z nimi wariacjach $\delta q^i(t)$ i $\delta p_i(t)$ znikła wariacja funkcjonału

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i \left(p_i \dot{q}^i - P_i \dot{Q}^i \right) - (H - \bar{H}) \right\}.$$

To z kolei jest zapewnione, jeśli wyrażenie podcałkowe powyższego funkcjonału J jest różniczką zupełną, tj. gdy¹⁴²

$$\sum_i (p_i dq^i - P_i dQ^i) - (H - \bar{H}) dt = d\Phi(Q, P, t),$$

gdyż wówczas

$$J = \int_{t_1}^{t_2} d\Phi(Q, P, t) = \Phi(Q(t_2), P(t_2), t_2) - \Phi(Q(t_1), P(t_1), t_1),$$

i automatycznie $\delta J = 0$ przy dowolnych wariacjach o ustalonych końcach. Jeśli zaś znika dowolna wariacja o ustalonych końcach funkcjonału J , to przy wariacjach $\delta Q^i(t)$ i $\delta P_i(t)$ wokół trajektorii $Q^i(t)$ i $P_i(t)$ spełniających kanoniczne równania

$$\begin{aligned} \dot{Q}^i &= \frac{\partial \bar{H}(Q, P, t)}{\partial P_i}, & i = 1, \dots, f, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \bar{H}(Q, P, t)}{\partial Q^i}, & i = 1, \dots, f, \end{aligned}$$

kiedy to osobno znika wariacja części

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}^i - \bar{H} \right\},$$

funkcjonału J musi też znikać wariacja drugiej połowy J , czyli wariacja funkcjonału

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i p_i \dot{q}^i - H \right\}.$$

¹⁴²Jeśli kogoś przerażają formy różniczkowe, to warunek ten można też zapisać jako

$$\sum_i (p_i \dot{q}^i - P_i \dot{Q}^i) - (H - \bar{H}) = \frac{d}{dt} \Phi(Q(t), P(t), t).$$

Wspomniane na wstępie przekształcenia punktowe spełniają trywialnie ten warunek z $\bar{H} = H$ (tj. właśnie z $\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, t), p(Q, P, t), t)$, gdzie teraz $H_{QP} \equiv \bar{H}$, a $H_{qp} \equiv H$), tak jak to zostało podane wyżej, gdyż przy takich przekształceniach

$$\sum_i (p_i dq^i - P_i dQ^i) = \sum_i p_i dq^i - \sum_{ijk} p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} dq^k \equiv 0.$$

Różniczka funkcji tworzącej Φ jest więc tu tożsamościowo równa zeru. Stanowią więc one podklasę (dość trywialnych) przekształceń kanonicznych.

Wyrażając funkcję Φ przez te zmienne, których różniczki występują po lewej stronie, tj. przez q^i i Q^i (zakładamy przy tym, że związki definiujące przekształcenie dają się odpowiednio rozwikłać, co z kolei wymaga nieznikania odpowiedniego podwyznacznika jacobianu), otrzymujemy wniosek, że warunkiem dostatecznym, by dane przekształcenie było kanoniczne, jest istnienie takiej funkcji $\Phi(q, Q, t)$, że

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q^i}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Funkcja Φ jest nazywana *funkcją tworzącą* przekształcenia kanonicznego. (W będącym standardem światowym podręczniku H. Goldsteina funkcja Φ jest oznaczana F_1 , a w dalszych zadaniach będzie ona oznaczana $W(q, Q, t)$). Jeśli związków definiujących przekształcenie nie daje się odwickłać tak, by zmiennymi niezależnymi były q^i i Q^i (podjacobian znika - jest tak np. w przypadku transformacji punktowych, przy których $\det(\partial q/\partial P) = 0$), to warunek kanoniczności można przez transformację Legendre'a (znów ta transformacja!) przekształcić do innej postaci. Np. dodając do obu jego stron różniczkę zupełną¹⁴³ $d \sum_i Q^i P_i$ otrzymamy jako dostateczny warunek kanoniczności równość

$$\sum_i (p_i dq^i + Q^i dP_i) - (H - \bar{H}) dt = dS(q, P, t),$$

gdzie $S = \Phi + \sum_i Q^i P_i$. Wykorzystanie tego warunku wymaga z kolei by związki definiujące przekształcenie dały się odwickłać tak, by niezależnymi zmiennymi były q^i oraz P_i . Przekształcenie jest więc także kanoniczne, jeśli istnieje taka funkcja tworząca $S(q, P, t)$ (u Goldsteina zwana F_2), że

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad \bar{H} - H = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Nietrudno zobaczyć, że funkcją tworzącą transformacji punktowych jest np. funkcja $S(q, P) = \sum_i P_i Q^i(q)$. W podobny sposób można sformułować inne dostateczne warunki kanoniczności.

¹⁴³Odpowiada to zmodyfikowaniu wyrażenia podcałkowego z zasadzie wariacyjnej spełnianej przez trajektorie $Q^i(t)$ i $P_i(t)$ o pełną pochodną po czasie.