Różniczkowalność i pochodne

Ćwiczenie 1. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Rozwiązanie: Widać, że funkcji f można napisać jako $f(u(x,y))$ gdzie

$$f(u) = \operatorname{arctg}(u), \qquad u(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Korzystając z regły łanczuchowej mamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Aby uproscić notację, często się pisze bezpośrednio

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Skoro

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{1+u^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Z tego wynika, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2+x^2}.$$

$\square$

Ćwiczenie 2. Niech $z = f(x^2-y^2)$. Udowodnić, że spełniona jest zależność:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Rozwiązanie: Możemy napisać $f(x^2-y^2)$ jako $f(u(x,y))$, gdzie $u(x,y)=x^2-y^2$. Korzystając z reguły łanczuchowej mamy, że

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Jak wcześniej, pisze się

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Więc,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2-y^2)2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(x^2-y^2)2y.$$

Z tego wynika, że

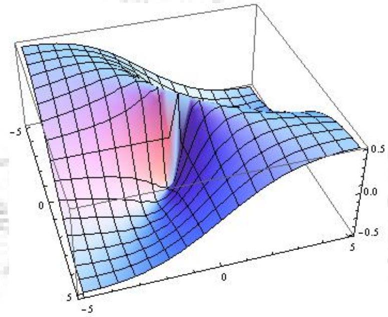
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=f'(x^2-y^2)2\frac{x}{x}-f'(x^2-y^2)2\frac{y}{y}=0.$$

□

Ćwiczenie 3. Sprawdzić, że funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ma w punkcie $(0,0)$ obie pochodne cząstkowe, lecz nie jest w tym punkcie ciągła oraz nie istnieje pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.



Rozwiązanie: Pochodne cząstwoke mają postać

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Aby sprawdzić, czy funkcja f jest cigła w punkcie $(0,0)$, trzeba sprawdzić, czy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Można sprawdzić, że funkcja nie jest ciągła za pomocą granicy wzdłuż linii. Wiemy, że jeżeli funkcja f jest ciągła w $(0,0)$ wtedy

$$\lim_{y=\lambda x, x\to 0} f(x,y) = f(0,0), \lim_{x=\lambda y, y\to 0} f(x,y) = f(0,0).$$

Natomiast, w naszym przypadku, widać, że

$$\lim_{y=\lambda x, x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Teraz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}.$$

Mamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2+y^2) - xy2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{h^3}{h^4} = \frac{1}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Otrzymaliśmy taki wzór za pomocą twierdzeń rożniczkowania funkcji. Takie twierdzenia są prawdziwe w punktach gdzie f jest różniczkowalna. Więc, nie możemy korzystać z tego w $(0,0)$. W punkcie $(0,0)$ mamy korzystać z definicji pochodnej:

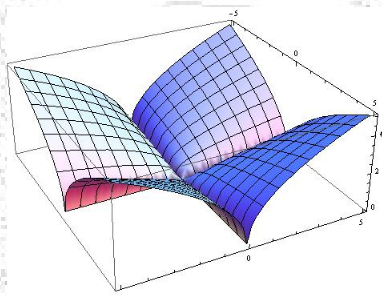
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Korzystając z tego, mamy, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = +\infty.$$

Zatem, $\partial^2 f/\partial x \partial y$ nie istnieje. □

Ćwiczenie 4. Sprawdzić, że funkcja $(x,y) \mapsto \sqrt{|xy|}$ ma w punkcie $(0,0)$ obie pochodne cząstkowe, lecz nie jest w tym punkcie różniczkowalna.



Rozwiązanie: Pochodne cząstwoke funkcji $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ w punkcie $(0,0)$ są

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{h \cdot 0} - 0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{0 \cdot h} - 0}{h} = 0.$$

Więc, pochodne cząstkowe istnieją. Prawde mówiąc, to już widać w rysunku, funkcja f jest równa zeru dla $x = 0$ i $y = 0$. Skoro $\partial f/\partial x$ mierzy prękąść zmianny wartości f w kierunku x i $f(x)$ ma zawsze tą samą wartością dla $y = 0$, to $\partial f/\partial x(0,0) = 0$. Skoro $\partial f/\partial y(0,0)$ mierzy prędkąść zmianny wartości f w kierunku y w punkcie $(0,0)$, to $\partial f/\partial x = 0$.

Mówi się, że funkcja jest różniczkowalna, gdy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{|f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)|}{||(x,y)||},$$

gdzie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ to pewna funkcja liniowa. Krotko mówiąc, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, gdy $f(x,y) - f(0,0)$ blisko $(0,0)$ jest mniej więcej funkcja liniowa, czyli $L(x,y)$. Jeżeli funkcja liniowa jest różniczkowalna w pewnej punkcie, to rysunek w tym punkcie jest lokalnie $f(0,0) + L(x,y)$, czyli płaszczyźna styczna do funkcji. W naszym przypadku, widać, że f nie jest różniczkowalna.

Jeżeli funcja jest różniczkowalna w $(0,0)$, to istnieję swoje pochodne cząstkowe w tym punkcie i

$$L(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)y.$$

Korzystając z tego i skoro $f(0,0) = 0$, $\partial f/\partial x(0,0) = 0$, $\partial f/\partial y(0,0) = 0$, to

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{|f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)|}{||(x,y)||} = \frac{|f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)|}{||(x,y)||}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{|f(x,y)|}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{|f(x,y)|}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Aby zobaczyć, czy ta granica istnieje, korzystamy z granic iterowanych i wzdluż linii.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

i

$$\lim_{y\to 0}\lim_{0\to 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Więc, jeżeli granica istnieje, to ma być zero. Natomiast

$$\lim_{y=\lambda x, x\to 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Skoro jeżli granica

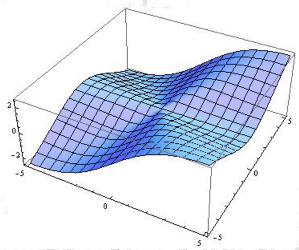
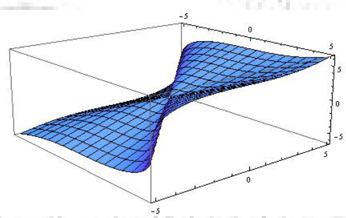
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

istnieje wsyzstkie poprzedni granice muszą istnieć i być takie same, ale to nie się spełnia, to funkcja f nie jest różniczkowalna.

□

Ćwiczenie 5. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}.$$

Rozwiązanie: Funkcja f_1 jest ilorazem funkcji gładkich. Zatem, poza zerem, gdzie mianownik sie zeruję, ta funkcja jest różniczkowalna. Natomiast, musimy sprawdzić, czy ta funkcja jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

Jeżeli funkcja f_1 jest rózniczkowalna, jej pochodne czątkowe muszą istnieć. Sprawdzamy czy to się spełnia:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(h,0) - f_1(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

i

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(0,h) - f_1(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

To jest warunek konicznie, a nie wystarczający, aby zgwarantować, że f_1 jest różniczkowalana. Aby to sprawdzić, musimy pamiętać, że funkcja f_1 jest różniczkowalana wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{(x.y) \to (0,0)} \frac{|f_1(x,y) - f_1(0,0) - L(x,y)|}{||(x,y)||} = 0,$$

gdzie L to pewne operator liniowy. W naszym przypadku, operator L ma postać

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) \right) = (0,0).$$

Ponieważ $f_1(0,0) = 0$, granice ma postać

$$\lim_{(x.y) \to (0,0)} \frac{|f_1(x,y)|}{||(x,y)||} = \lim_{(x.y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Aby sprawdzić czy taka granica istinieje, sprawdzamy granice iterowane

Teraz granice wzdłuż linii. Widać, że nie istinieje, więc, ta funkcja nie ma granicy i funkcja nie jest różniczkowalna.

Funkcja f_2 jest pierwiastliem funkcji gładkich. Zatem, poza zerem podpierwiastku, ta funkcja jest różniczkowalna. Natomiast, musimy sprawdzić, czy ta funkcja jest różniczkowalna w punktach $(x, -x)$ gdzie podpierwiastkiem się zeruje.

Jeżeli funkcja f_1 jest rózniczkowalna, jej pochodne czątkowe muszą istnieć. Sprawdzamy czy to się spełnia:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, -x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h, -x) - f_1(x, -x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+h)^3 - x^3}}{h}$$

i

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, -x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{3hx^2 + 3h^2x + h^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{3x^2/h^2 + 3x/h + 1} = +\infty.$$

Jednoczesnie

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, -x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h, -x) - f_1(x, -x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+h)^3 - x^3}}{h}$$

i

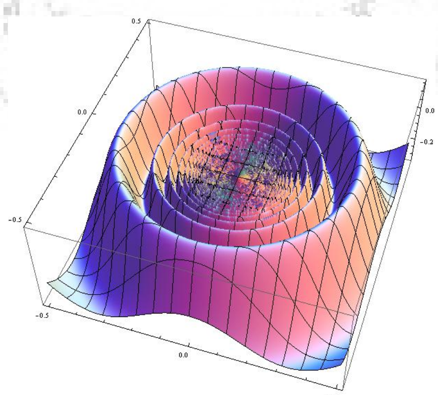
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, -x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{3hx^2 + 3h^2x + h^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{3x^2/h^2 + 3x/h + 1} = +\infty.$$

To funkcja nie jest różniczkowalna. □

Ćwiczenie 6. Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{dla } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Czy f jest funkcją typu C^1?



Rozwiązanie: Ta funkcja jest różniczkowalna poza zerem. Trzeba jeszcze sprawdzić, co siędzieje dla $(x, y) = (0, 0)$. Najpierw, sprawdzamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 \cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 \cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0.$$

To jest warunek konicznie, a nie wystarczający, aby zgwarantować, że f jest różniczkowalana. Aby to sprawdzić, musimy pamiętać, że funkcja f jest różniczkowalana wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)|}{||(x,y)||} = 0,$$

gdzie L to pewne operator liniowy. W naszym przypadku, operator L ma postać

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = (0,0).$$

Ponieważ $f(0,0) = 0$, granice ma postać

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{||(x,y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Widać, że ta granica zależe tylko jednej zmiennej $z = \sqrt{x^2+y^2}$, zatem

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{||(x,y)||} = \lim_{z\to(0,0)} z \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0.$$

Więc, funkcja f jest różniczkowalna. Natomiast, funkcja f nie jest funkcją klasy C^1 poniważ pochodne nie są ciągłe, np.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Więc, widac, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[2x \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{2x}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right].$$

Mamy,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0} 2r\cos\phi\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

i

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\varphi}{r^2}\sin\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

i ta granica nie istnieje. Więc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$\square$