Seria V zadań z Mechaniki Kwantowej II B do wykładu dr. hab. Krzysztofa Byczuka

r.p. 2008/2009

Zadanie 1 — Wartości oczekiwane na stanach symetrycznych i antysymetrycznych

Pokazać, że dla każdej obserwabli $\hat{B}$ i dla każdego stanu symetrycznego $\Phi^{(S)}$ (permanent) bądź antysymetrycznego $\Phi^{(A)}$ (wyznacznik Slatera) zachodzi

$$\int d^N x \Phi_b^* \hat{B} \Phi_c = \frac{\sqrt{N!}}{\sqrt{\prod_{k=1}^K n_k^{(c)}!}} \int d^N x \Phi_b^* \hat{B} \phi_{c_1}(x_1) \cdots \phi_{c_N}(x_n),$$

gdzie $n_k^{(c)}! = 1$ dla stanów antysymetrycznych, a $\phi_c(x)$ są to pewne funkcje jednocząstkowe.

Zadanie 2 — Ortonormalność stanów symetrycznych i antysymetrycznych

Pokazać, że dla stanów symetrycznych $\Phi^{(S)}$ (permanent) bądź antysymetycznych $\Phi^{(A)}$ (wyznacznik Slatera) zachodzi relacja ortogonalności

$$\int d^N x \Phi_b^* \Phi_c = \delta_{b,c},$$

gdzie b i c są odpowiednim zestawem liczb kwantowych, a delta jest uogólnioną deltą Kronekera w tych liczbach.

Zadanie 3 — Zupełność bazy w wielocząstkowej przestrzeni Hilberta

Pokazać, że jeśli $\phi_\nu(x)$ jest zupełną bazą stanów jednocząstkowych to funkcje symetryczne $\Phi^{(S)}$ (permanent) bądź antysymetyczne $\Phi^{(A)}$ (wyznacznik Slatera) stanowią zupełną bazę funkcji w wielocząstkowej przestrzeni Hilberta o danej symetrii. *Wskazówka: operator antysymetryzacji $\mathcal{A}$, który znamy z poprzedniej serii zadań, w działaniu na dowolną N-cząstkową antysymetryczną funkcję falową mnoży ją przez $\sqrt{N!}$.*

Zadanie 4 — Reguły antykomutacyjne dla operatorów kreacji i anihilacji

Pokazać, że jeśli operatory c_k i $c_k^\dagger$ są fermionowymi operatorami anihilacji i kreacji to spełniają następujące relacje antykomutacyjne

$$\{c_k, c_l\} = \{c_k^\dagger, c_l^\dagger\} = 0$$

$$\{c_k, c_l^\dagger\} = \delta_{k,l}$$

gdzie $\{a, b\} = ab + ba$ oznacza antykomutator.

Rozwiązania proszę przynieść na ćwiczenia 18 listopada.