Uwaga! Niektóre zadania rzeczywiście są trudne. Żeby na kolokwium zostały prostsze...

Para fermionów w d wymiarach

Dana jest para fermionów o przeciwnych spinach w pudle o d-wymiarowej objętości Ω opisywana hamiltonianem

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\Omega} \int d^d x \left[\sum_\sigma \Psi_\sigma^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \right) \Psi_\sigma(\vec{x}) \right] + \lambda \Psi_\uparrow^\dagger(\vec{x}) \Psi_\downarrow^\dagger(\vec{x}) \Psi_\downarrow(\vec{x}) \Psi_\uparrow(\vec{x}).$$

Zakładając funkcję falową w postaci $|\Phi\rangle = \int d^d y\, d^d z \beta(\vec{y},\vec{z}) \Psi_\downarrow^\dagger(\vec{y}) \Psi_\uparrow^\dagger(\vec{z})|0\rangle$ należy

- znaleźć warunek unormowania funkcji $|\Phi\rangle$;
- wyjaśnić co fizycznie oznacza to, że będziemy poszukiwać jedynie takich rozwiązań, dla których $\beta(\vec{y},\vec{z}) = \alpha(\vec{y}-\vec{z})$ dla pewnego α;
- ustalić wartość stałej w wyrażeniu otrzymywanym w toku rozwiązywania $(E - 2\epsilon_k)\alpha_{\vec{k}} = const.$, gdzie $\epsilon_k = k^2/2m$.
- określić w jakich warunkach może istnieć stan związany/stany związane (o energii $E < 0$), znaleźć jego energię;
- obliczyć jawnie $\alpha(\vec{y}-\vec{z})$ dla $d = 1$ i $d = 3$

Uwagi: 1. Znaleźć energie dla $d = 1, 2, 3$; 2. w razie rozbieżności całki po pędach wprowadzić obcięcie całki przy $|\vec{k}| = k_{\max}$ co odpowiada np. umieszczeniu cząstek na sieci.

Wskazówki: 1. Przejścia do przestrzeni pędów warto dokonać w wygodnym momencie — co innego „lubi” wyraz kinetyczny, co innego oddziaływanie; 2. lepiej nie rozkładać od razu $\alpha(\vec{x}=0)$ w szereg Fouriera, a raczej zauważyć, że jest to stała i najpierw obliczyć $\alpha[\vec{k}, \alpha(\vec{x}=0)]$, a dopiero potem znaleźć $\alpha(\vec{x}=0)$ z warunku normalizacji; 3. $\sum_{\vec{k}} \to \Omega(2\pi)^{-d} \int d^d k$.

Para bozonów w jednowymiarowym pudle

Dana jest para bezspinowych bozonów w pudle o szerokości L opisywana hamiltonianem

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\Omega} \int dx \left[\Psi^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(\vec{x}) + \lambda \Psi^\dagger(x)\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\Psi(x) \right].$$

Zakładając funkcję falową w postaci $|\Phi\rangle = \int dy\, dz \alpha(y-z) \Psi^\dagger(y)\Psi^\dagger(z)|0\rangle$ należy

- znaleźć warunek unormowania funkcji $|\Phi\rangle$;
- określić w jakich warunkach może istnieć stan związany/stany związane (o energii $E < 0$), znaleźć jego energię;
- obliczyć jawnie $\alpha(y-z)$.

Transformacja kwazicząstkowa

Dla hamiltonianu bozonowego postaci

$$\mathcal{H} = \epsilon b^\dagger b + \lambda b^\dagger + \lambda^* b + g(b^\dagger b^\dagger + bb), \quad g \in \mathbb{R},\ |g| < \epsilon$$

proszę

- zdefiniować transformację kwazicząstkową, która pozwoli go zdiagonalizować;
- znaleźć energię kwazicząstki;
- określić energię piątego stanu wzbudzonego;
- wyrazić stan podstawowy $|0\rangle'$ (brak kwazicząstek) przez stan próżni $|0\rangle$ (brak cząstek) i operator $b^\dagger$;
- obliczyć średnią liczbę cząstek $\langle b^\dagger b\rangle$ w piątym stanie wzbudzonym.

Operator spinu dla cząstek ze spinem 1/2

Udowodnić, że dla cząstek ze spinem 1/2 zlokalizowanych w punktach 1 bądź 2

$$\sum_{\sigma,\sigma'} c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma'}^\dagger c_{2\sigma} c_{1\sigma'} = -\frac{1}{2}\left(n_1 n_2 + \frac{4}{\hbar^2}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \right),$$

dla $n_i = \sum_\sigma c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$, $i \in \{1, 2\}$.

Magnetyzacja

Hamiltonian w przestrzeni pędów ma postać (zaniedbującą oddziaływanie cząstek)

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(c^\dagger_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow} + c^\dagger_{\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\downarrow} \right) + \mu_0 \mu_B \vec{H} \cdot \sum_{\vec{k}} \left\langle \vec{S}_{\vec{k}} \right\rangle .$$

Ile wyniesie średnia magnetyzacja $\vec{M} = \mu_B \sum_{\vec{k}} \left\langle \vec{S}_{\vec{k}} \right\rangle$, gdzie $\sum_{\vec{k}} \langle \vec{S}_{\vec{k}} \rangle$ to sredni sumaryczny spin w układu, w funkcj pola $\vec{H}$?