Rozdział 2

Układy współrzędnych krzywoliniowych

2.1. Parametryczny opis krzywej w $\mathbb{R}^3$

W kartezjańskim układzie współrzędnych wyznaczonym przez wersory $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ – wektory jednostkowe wzajemnie ortogonalne, ustalone raz na zawsze.

Def: Krzywa dana przez wektor $\vec{r}$ w funkcji parametru u

$$u \rightarrow \vec{r}(u) = x(u)\,\hat{i} + y(u)\,\hat{j} + z(u)\,\hat{k}$$

$x(u), y(u), z(u)$ funkcje jednoznaczne u, zakładamy ciągłe i odpowiednią ilość razy różniczkowalne

Wektor $\vec{r}(u)$ możemy różniczkować po parametrze u

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du}\hat{i} + \frac{dy}{du}\hat{j} + \frac{dz}{du}\hat{k}$$

Zachodzą znane reguły różniczkowania

$$\frac{d(\vec{A}(u) + \vec{B}(u))}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{A}(u) \circ \vec{B}(u))}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \circ \vec{B} + \vec{A} \circ \frac{d\vec{B}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du}$$

Uwaga: jeśli $|\vec{A}(u)| = 1$, to

$$0 = \frac{d(\vec{A}\cdot\vec{A})}{du} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{du} \Rightarrow \vec{A} \perp \frac{d\vec{A}}{du}$$

ortogonalne!

Def: różniczka wektora wodzącego

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{du}\cdot du = \vec{r}\,'(u)\, du \qquad \Big|\ du>0.$$

Def: element długości łuku krzywej

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\ du$$

Długość łuku krzywej od $\vec{r}(u_A)$ do $\vec{r}(u_B)$

$$s(u_A, u_B) = \int_{u_A}^{u_B} |d\vec{r}(u)| = \int_{u_A}^{u_B} \sqrt{\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right|^2}\ du$$

Ustalając u_A, podając długość od tego ustalonego u_A, $u = u_B - u_A$

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right|^2}\ du$$, można odwrócić $u(s)$

i przejść do opisu krzywej w funkcji odległości wzdłuż krzywej od ustalonego $\vec{r}(u_A)$.

$$\vec{r}(u) \longrightarrow \vec{r}(s) \equiv \vec{r}(u(s))$$

Def. wektor styczny $\frac{d\vec{r}}{du}$, nie jest jednostkowy

Jednostkowy wektor styczny dany przez

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad (\text{gdyż } |d\vec{r}| = ds)$$

kierunek i zwrot $\hat{t}$ zależy w ogólności od punktu na krzywej, tzn. $\hat{t}(s)$.

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{du}\,\frac{du}{ds} \qquad \Big|\ \frac{ds}{du} = h_u \text{ – czynnik skalujący}$$

Przykład

$$\vec r(u) = \hat i R\cos u + \hat j R\sin u = \hat i\, x(u) + \hat j\, y(u)$$

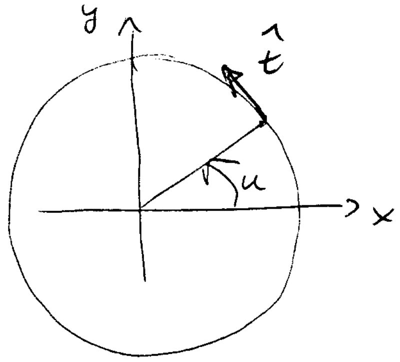
Ponieważ $x^2+y^2=R^2$ → jest to parametryczny opis okręgu w pł x,y o promieniu R i środku w $x=y=0$.

długość łuku (mierzona od $u=0$)

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{\left|\frac{d\vec r}{du}\right|^2}\, du = \int_0^u \sqrt{(x')^2+(y')^2}\, du =$$

$$= \int_0^u R\, du = Ru \Rightarrow u = \frac{s}{R}$$

u – jest miarą łukową kąta



wektor styczny

$$\hat t = \frac{d\vec r}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\hat i R\cos\frac{s}{R} + \hat j R\sin\frac{s}{R}\right) =$$

$$= -\hat i\sin\frac{s}{R} + \hat j\cos\frac{s}{R}$$ ← rzeczywiście jednostkowy

——— koniec przykładu —

Def: wektor normalny $\hat n(s)$

$$\hat n(s) = \frac{d\hat t}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat t}{ds}\right|$$

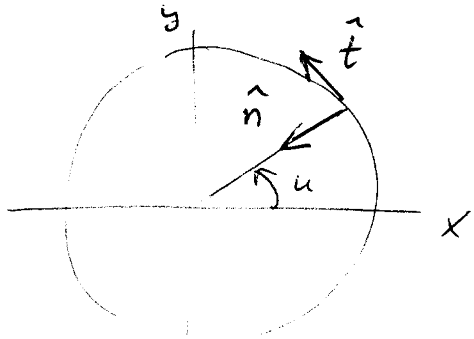
$\hat n \perp \hat t$ gdyż dany przez pochodną $|\hat t| = 1$

$$\frac{d\hat t}{ds} = \kappa(s)\,\hat n(s),$$

$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ – promień krzywizny krzywej

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat t}{ds}\right|$$

<u>Przykład</u> wracając do poprzedniego przykładu okręgu



$$\hat{t} = -\hat{\imath}\sin\frac{s}{R} + \hat{\jmath}\cos\frac{s}{R}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = -\hat{\imath}\,\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R} - \hat{\jmath}\,\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{n} = -\hat{\imath}\cos\frac{s}{R} - \hat{\jmath}\sin\frac{s}{R}\,, \qquad \rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} = R$$

<u>Def.</u> Wektory $\hat{t}$ i $\hat{n}$ wyznaczają płaszczyznę <u>ściśle styczną</u> do krzywej. Dla krzywej płaskiej (jak okrąg w poprzednim przykładzie) jest to płaszczyzna, w której leży ta krzywa.

<u>Def:</u> Wektor <u>binormalny</u> $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$

Trójka Freneta $\hat{t}(s)$, $\hat{n}(s)$, $\hat{b}(s)$ wektorów o długości 1 wzajemnie ortogonalnych.

Dla krzywej płaskiej $\hat{b}$ jest wektorem stałym (ustalony kierunek i zwrot).

W ogólności $\hat{b}$ też zależy od s

Ponieważ $|\hat{b}| \Rightarrow 1 \Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{b}$

Również $\frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{n}$ gdyż $(\hat{b}\cdot\hat{t}=0)$

$$0 = \frac{d(\hat{b}\cdot\hat{t})}{ds} = \frac{d\hat{b}}{ds}\cdot\hat{t} + \underbrace{\hat{b}\cdot\underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{\kappa(s)\cdot\hat{n}}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\hat{b}}{ds}\cdot t = 0.$$

A więc $\frac{d\hat{b}}{ds}$ jest równoległy do $\hat{n}(s)$

Def: Wprowadzamy oznaczenie

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau(s)\,\hat{n}(s),$$

gdzie $\tau(s)$ jest tzw. skręceniem krzywej.

Dla krzywej płaskiej $\tau(s) = 0$. I na odwrót, jeśli $\tau(s) = 0$, to $\frac{d\hat{b}}{ds} = 0$, tzn $\hat{b}$ jest stały, więc krzywa płaska.

Obliczymy jeszcze $\frac{d\hat{n}}{ds}$

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\hat{b}\times\hat{t}\right) = \frac{d\hat{b}}{ds}\times\hat{t} + \hat{b}\times\frac{d\hat{t}}{ds} =$$

$$= -\tau(s)\,\hat{n}\times\hat{t} + k(s)\,\hat{b}\times\hat{n} =$$

$$= \tau(s)\,\hat{b}(s) - k(s)\,\hat{t}(s)$$

Mamy więc

$$\begin{cases} \frac{d\hat{t}}{ds} = k(s)\,\hat{n}(s) \\ \frac{d\hat{n}}{ds} = -k(s)\,\hat{t}(s) + \tau(s)\,\hat{b}(s) \\ \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau(s)\,\hat{n}(s) \end{cases}$$

równania Serreta – Freneta

Wektory $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ podają lokalnie orientację krzywej, a parametry $\frac{1}{k(s)}$ i $\tau(s)$ promień krzywizny i skręcenie.

Przykład linia śrubowa

$$u \to \vec{r}(u) = \hat{\imath}\, R\cos u + \hat{\jmath}\, R \sin u + \hat{k}\, H u$$

o promieniu R i skoku $2\pi H$

Długość ~~[illegible]~~ krzywej liczona od $\vec{r} = (R, 0, 0)$

$$s = \int_0^u \left|\frac{d\vec{r}}{du}\right| du = \int_0^u \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du = \sqrt{R^2+H^2}\; u$$

$$F \equiv \sqrt{R^2+H^2}$$

$$u = \frac{s}{F}$$

wektor styczny $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\hat{\imath} R\cos\frac{s}{F} + \hat{\jmath} R \sin\frac{s}{F} + \hat{k}\, H\frac{s}{F}\right)$

$$= -\hat{\imath}\,\frac{R}{F}\sin\frac{s}{F} + \hat{\jmath}\,\frac{R}{F}\cos\frac{s}{F} + \hat{k}\,\frac{H}{F}$$

widać, że jednostkowy

wektor normalny

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = -\hat{\imath}\,\frac{R}{F^2}\cos\frac{s}{F} - \hat{\jmath}\,\frac{R}{F^2}\sin\frac{s}{F}$$

$$k(s) = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \frac{R}{F^2}, \qquad \hat{n} = -\hat{\imath}\cos\frac{s}{F} - \hat{\jmath}\sin\frac{s}{F}$$

wektor binormalny

$$\hat{b} = \hat{t}\times\hat{n} = \hat{\imath}\,\frac{H}{F}\sin\frac{s}{F} - \hat{\jmath}\,\frac{H}{F}\cos\frac{s}{F} + \frac{R}{F}\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau(s)\,\hat{n}(s) = \hat{\imath}\,\frac{H}{F^2}\cos\frac{s}{F} + \hat{\jmath}\,\frac{H}{F^2}\sin\frac{s}{F}$$

$$\Rightarrow \text{ skręcenie } \quad \tau(s) = -\frac{H}{F^2}$$

——— koniec przykładu.

2.2 Parametryczny opis powierzchni w $\mathbb{R}^3$

Def: Powierzchnia

$$u, v \longrightarrow \vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\hat{i} + y(u,v)\,\hat{j} + z(u,v)\,\hat{k}$$

$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ - funkcje dwóch parametrów

zakładamy, że ciągłe i różniczkowalne

Na tej powierzchni można podać krzywe w postaci parametrycznej, jeśli zdefiniujemy $u(\lambda)$ i $v(\lambda)$, tzn.

krzywa

$$\lambda \rightarrow \vec{r}\,(u(\lambda), v(\lambda)).$$

Wektor styczny do tej krzywej

$$\frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\frac{du}{d\lambda} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{d\lambda}$$

i pochodne cząstkowe są obliczone w $u(\lambda)$ i $v(\lambda)$.

Def: Przez każdy punkt powierzchni $\vec{r}(u_0, v_0)$ przechodzą dwie krzywe na niej leżące, dla których u lub v są ustalone.
Są to tzw. krzywe współrzędnych

$u \rightarrow \vec{r}\,(u, v_0)$ — krzywa współrzędnej u

$v \rightarrow \vec{r}\,(u_0, v)$ — krzywa współrzędnej v

Definiujemy wektory styczne do krzywych współrzędnych

$$\hat{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| , \qquad \hat{e}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|$$

Wymaga się od opisu powierzchni, żeby $\hat{e}_u \not\parallel \hat{e}_v$.

Def: element powierzchni

$$dS = |d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v| = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\, dv$$

gdzie $d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$

$d\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$

Definiuje się też zorientowany element powierzchni

$$d\vec{S} = \pm\, d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v = \hat{n}\, dS$$

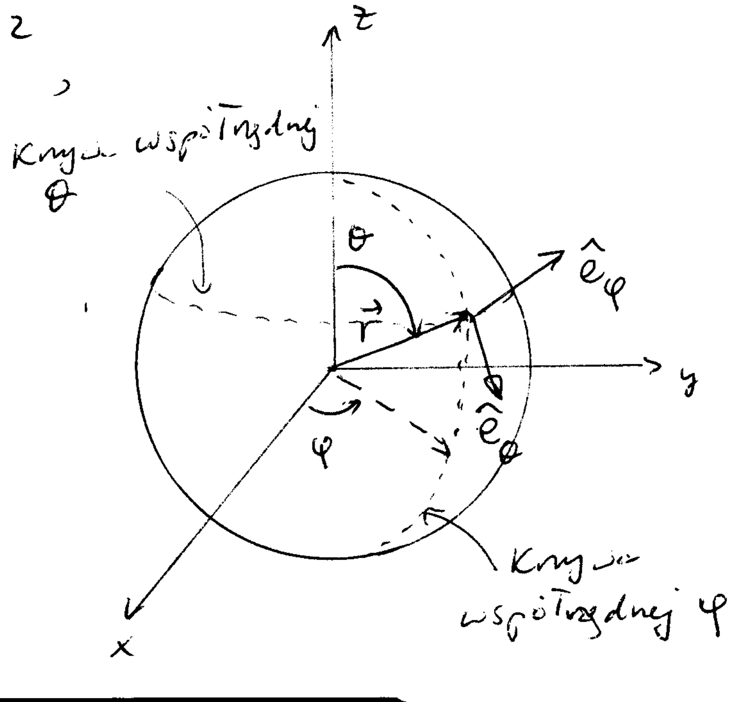
gdzie $\hat{n} = \pm\, \hat{e}_u \times \hat{e}_v$

Konwencja: dla powierzchni zamkniętych zwykle przyjmuje się $\hat{n}$ wskazujący na zewnątrz.

Przykład: powierzchnia kuli o promieniu R

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 ,$$

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = \hat{i}\, R \sin\theta \cos\varphi + \hat{j}\, R \sin\theta \sin\varphi + \hat{k}\, R \cos\theta$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R\cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + R\cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - R\sin\theta\,\hat{k}$$

czynnik skali $h_\theta = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = R$

$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -R\sin\theta\sin\varphi\,\hat{i} + R\sin\theta\cos\varphi\,\hat{j}$$

czynnik skali $h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = R\sin\theta$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}, \qquad \hat{e}_\varphi \perp \hat{e}_\theta$$

$$\hat{n} = \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{n} \parallel \vec{r}$$

$$dS = h_\theta h_\varphi \, d\theta\, d\varphi = R^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi$$

$d\vec{S} = \hat{n}\, dS$, $\hat{n}$ na zewnątrz sfery.

——— koniec przykładu.

<u>Przykład</u> a) górna połówka sfery o promieniu R.

$$\vec{r}(x,y) = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\hat{k}$$

$$z(x,y) = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\hat{k} = \hat{i} - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{k} = \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\hat{k}$$

zorientowany element powierzchni

$$d\vec{S} = \pm\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}\right) dx\, dy$$

$$dS = |d\vec{S}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

Jeśli chcemy $d\vec{S}$ na zewnątrz, to trzeba wybrać $+$.

b) dolna połówka sfery $z(x,y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Wtedy dla $d\vec{S}$ trzeba wybrać $-$.

2.3 Krzywoliniowe układy współrzędnych

Dowolny punkt w R^3

$$\vec{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\,\hat{i} + y(u,v,w)\,\hat{j} + z(u,v,w)\,\hat{k}$$

x, y, z – jednoznaczne funkcje param. u, v, w (ciągłe, różniczkowalne)

Definiujemy wektory styczne do krzywych współrzędnych

$$\hat{e}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \;, \qquad \text{czynnik skali} \quad h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|$$

i podobnie $\hat{e}_v$, $\hat{e}_w$

Def Wersory $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$, $\hat{e}_w$ lokalnie wyznaczają układ współrzędnych krzywoliniowych

Jeśli są ortogonalne, to mamy układ współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych.

Przykład:

$$(R,\theta,\varphi) \longrightarrow \vec{r}(R,\theta,\varphi) = R\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + R\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + R\cos\theta\,\hat{k}$$

już obliczyliśmy $\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

teraz $\frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = \hat{e}_R = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$

wektor jednostkowy $\parallel \vec{r}$

— koniec przykładu

element objętości

w ukł. kartezjańskim $dV = dx\,dy\,dz$

$$= d\vec{r}_x \cdot (d\vec{r}_y \times d\vec{r}_z)$$

$$d\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx, \ \ldots$$

w krzywoliniowym

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \times \frac{d\vec{r}}{dw} dw \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du\,dv\,dw =$$

$$= |\hat{e}_u \cdot (\hat{e}_v \times \hat{e}_w)|\ h_u \cdot h_v \cdot h_w\ du\,dv\,dw.$$

jeśli układ krzywoliniowy ortogonalny, to

$$dV = h_u \cdot h_v\, h_w\, du\,dv\,dw$$

Przykłady: a) współrzędne sferyczne

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = r^2 dr\ \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

b) współrzędne walcowe

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\hat{i} + \rho\sin\varphi\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

$$\hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}, \qquad h_\rho = 1$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} + \qquad h_\varphi = \rho$$

$$\hat{e}_z = \hat{k}$$

$$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

2.4. Gradient, dywergencja, rotacja i laplasjan we współrzędnych krzywoliniowych

Przypomnienie: we współrzędnych kartezjańskich

<u>gradient</u> $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$

gradient pola skalarnego $\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$$

Jeśli $\vec{r} = \vec{r}(u)$ krzywa sparametryzowana przez u, to

$$\frac{d\phi}{du} = \vec{\nabla}\phi \cdot \frac{d\vec{r}}{du}$$, a przechodząc z $u \to s$

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{t}$$

na poziomicy $\phi = \text{const}$, pochodna wzdłuż poziomicy

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 = \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{t},$$ $\hat{t}$ – styczny do poziomicy

$$\vec{\nabla}\phi \perp \hat{t},$$ gradient $\phi \perp$ poziomicy.

We współrzędnych krzywoliniowych

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{d\vec{r}}{dv}dv + \frac{d\vec{r}}{dw}dw =$$

$$= h_u \hat{e}_u du + h_v \hat{e}_v dv + h_w \hat{e}_w dw$$

więc
$$d\phi = (\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{e}_u) h_u du + (\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{e}_v) h_v dv + (\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{e}_w) h_w dw = \frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial \phi}{\partial v}dv + \frac{\partial \phi}{\partial w}dw$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \phi}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial \phi}{\partial w}\hat{e}_w$$

więc we współrzędnych krzywoliniowych

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_u \frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{e}_v \frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{e}_w \frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

zauważmy, że $\vec{\nabla} u = \hat{e}_u \frac{1}{h_u}$, $\hat{e}_u = h_u \vec{\nabla} u$

i podobnie $\hat{e}_v = h_v \vec{\nabla} v$, $\hat{e}_w = h_w \vec{\nabla} w$

<u>Dywergencja</u> we współrzędnych kartezjańskich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ustalone

We współrzędnych krzywoliniowych

$$\vec{A} = A_u \hat{e}_u + A_v \hat{e}_v + A_w \hat{e}_w$$

pamiętamy, że $\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w$ zależą od u, v, w!

Wyprowadźmy wzór dla <u>ortogonalnego</u> układu współrzędnych krzywoliniowych, tzn.:

$\hat{e}_u = \hat{e}_v \times \hat{e}_w$, itd.

weźmy $\vec{\nabla} \cdot (A_u \hat{e}_u) = \vec{\nabla} \cdot (A_u \hat{e}_v \times \hat{e}_w) =$

$$= \vec{\nabla} \cdot (A_u h_v h_w \vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w)$$

$$= (\vec{\nabla} A_u h_v h_w) \cdot (\vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w) + A_u h_v h_w \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} v \times \vec{\nabla} w)}_{= 0}$$

$$= \vec{\nabla}(A_u h_v h_w) \cdot \frac{1}{h_v h_w} \hat{e}_v \times \hat{e}_w =$$

$$= \frac{1}{h_u h_v h_w} \hat{e}_u \cdot \vec{\nabla}(A_u h_v h_w) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u} A_u h_v h_w + \frac{\partial}{\partial v} A_v h_u h_w + \frac{\partial}{\partial w} A_w h_u h_v \right)$$

bo $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

Podobnie rotacja

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{e}_u & h_v\hat{e}_v & h_w\hat{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

$$= \hat{e}_u \frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}(h_w A_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v A_v)\right)$$

$$+ \hat{e}_v \frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial w}(h_u A_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w A_w)\right)$$

$$+ \hat{e}_w \frac{1}{h_u h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v A_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u A_u)\right)$$

bez dowodu.
(analogia do dywergencji)

Wniosek z powyższych wzorów

Laplasjan $\Delta\phi = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\phi)$

$$= \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)\right]$$

<u>Przykład</u>: współrzędne sferyczne

$$\nabla\phi = \hat{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{e}_r\left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\varphi - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right] + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]$$

$$+ \frac{1}{r}\hat{e}_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

2.5. Zastosowanie do równań różniczkowych cząstkowych

Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec r,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec r,t)\right]\psi(\vec r,t).$$

$\hbar = h/2\pi$ stała Plancka

Jeśli potencjał nie zależy od czasu, to szukamy rozwiązania w postaci

$$\psi(\vec r,t) = T(t)\,\varphi(\vec r)$$

| rozdzielenie t i $\vec r$ → współrzędnych

Po podstawieniu i podzieleniu obu stron przez ψ

$$\frac{1}{T} i\hbar \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi(\vec r)}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\varphi(\vec r) \equiv \underset{\text{stała}}{E}$$

$$T(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

Zostaje do rozwiązania niezależne od czasu r. Schrödingera

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec r)\right)\varphi(\vec r) = E\,\varphi(\vec r)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Jeśli potencjał $V(\vec r) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$,

| np. oscylator harmoniczny
$$V(\vec r) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

to możemy szukać rozwiązania w postaci

$$\varphi(\vec r) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

Podstawiając do równania, mamy

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}+V_1(x)\right]+\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+V_2(y)\right]+$$

$$+\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}+V_3(z)\right]=E$$

Każdy [ ] zależy tylko od jednej współrzędnej

⇒ każdy z [ ] musi być równy stałej, tzn

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}+V_1(x)=E_1 \qquad \text{itd.}$$

z warunkiem $E_1+E_2+E_3=E$.

Dostajemy więc układ 3 równań zwyczajnych z wiązanym warunkiem

Taką metodę rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych nazywamy metodą separacji zmiennych.

Potencjał oscylatora harmonicznego bardzo szczególny

Często mamy do czynienia z sytuacją, gdy potencjał ma symetrię sferyczną, np potencjał Kulombowski $V(\vec{r})=V(r)=\frac{1}{r}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Separacja r. Schrödingera we wsp. kartezjańskich nie jest możliwa.

Można to zrobić przechodząc do współrzędnych sferycznych wtedy szukamy rozwiązania w postaci

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

Po podstawieniu i podzieleniu przez Ψ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{R r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{\substack{\text{zależy tylko od } \varphi \\ \| \\ \mu}}\right] + V(r) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \mu\Phi$$

teraz

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{R r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)}_{\text{zależy tylko od } \theta}\right] +$$

$$+V(r) = E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{\mu}{\sin^2\theta}\Theta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stała separacji}}}{\lambda}\,\Theta$$

i dla części $R(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\lambda}{r^2}R\right] + VR = ER.$$

w ten sposób dostajemy układ równań różniczkowych zwyczajnych.