Rozdział 5

5.1. Funkcje zmiennej zespolonej

Liczby zespolone $z = x + iy$, $x, y \in R$, $i^2 = -1$.

$x = \mathrm{Re}\, z$
$y = \mathrm{Im}\, z$

części rzeczywista i część urojona są liczbami R

dodawanie $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

mnożenie przez liczby rzeczywiste

$$a z = a(x + iy) = ax + iay$$

mnożenie liczb zespolonych

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Sprzężenie zespolone $\bar{z} = z^* = (x + iy)^* = x - iy$

Zbiór liczb zespolonych jest równoważny zbiorowi punktów na płaszczyźnie: tzw. płaszcz. zespolona. Zatem wszystkie pojęcia znane nam dla płaszczyzny, jak krzywa, obszar i jego brzeg, ściągalność, krzywa zorientowana itp, przenoszą się na płaszczyznę zespoloną.

Np krzywa na płaszczyźnie zapisana parametrycznie, to $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, t - parametr

na płaszczyźnie zespolonej to $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Kontur (krzywa) może być zamknięta, może przecinać się itd.
Jeśli kontur się nie przecina to tzw. kontur prosty lub kontur Jordana
Kontur jest gładki, jeśli $x(t)$ i $y(t)$ różniczkowalne

i $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ są ciągłe.

Przykład

kontur $z(t) = \sqrt{1+t^2} + it$

$x(t) = \sqrt{1+t^2}$

$y(t) = t$

$x^2 - y^2 = 1$, a więc ten kontur jest jedną gałęzią hiperboli

Inna gałąź tej hiperboli to $z(t) = -\sqrt{1+t^2} + it$

Przykład $z(t) = z_0 + \cos\varphi + i\sin\varphi = z_0 + e^{i\varphi}$

$z(0) = z(2\pi)$ — kontur zamknięty.

Jest to okrąg jednostkowy o środku w (x_0, y_0).

gdzie $z_0 = x_0 + iy_0$

Jest to kontur zorientowany o orientacji przeciwnej do ruchu wskazówek zegara

natomiast $z(t) = z_0 + e^{-i\varphi}$, ma orientację przeciwną.

Definicja: Funkcja zmiennej zespolonej, to przyporządkowanie każdej liczbie z z pewnego obszaru $\mathcal{D}$ na pł. zespolonej jakiejś jednej lub wielu liczb zespolonych w. $\mathcal{D}$ jest dziedziną tej funkcji.

Jeśli przyporządkowanie $z \to w \equiv f(z)$ jest jednoznaczne, to funkcję f nazywamy jednoznaczną.

W przeciwnym razie mówimy o funkcji wieloznacznej.

Przykłady

a) $f(z) = z^2$ jest funkcją jednoznaczną

b) $f(z) = \sqrt{z}$ jest funkcją dwuznaczną, bo

oznaczając $z = re^{i\varphi}$, $r = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}$, to

$$\sqrt{z} = \pm r e^{i\varphi/2}$$

Funkcja $f(z) = w$ jest odwracalna, jeśli każdej wartości tej funkcji w odpowiada tylko jeden z, ~~taki~~ że $f(z) = w$.

Przykład $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

niech $z(t) = c + it$, tzn prosta równoległa do osi Re z

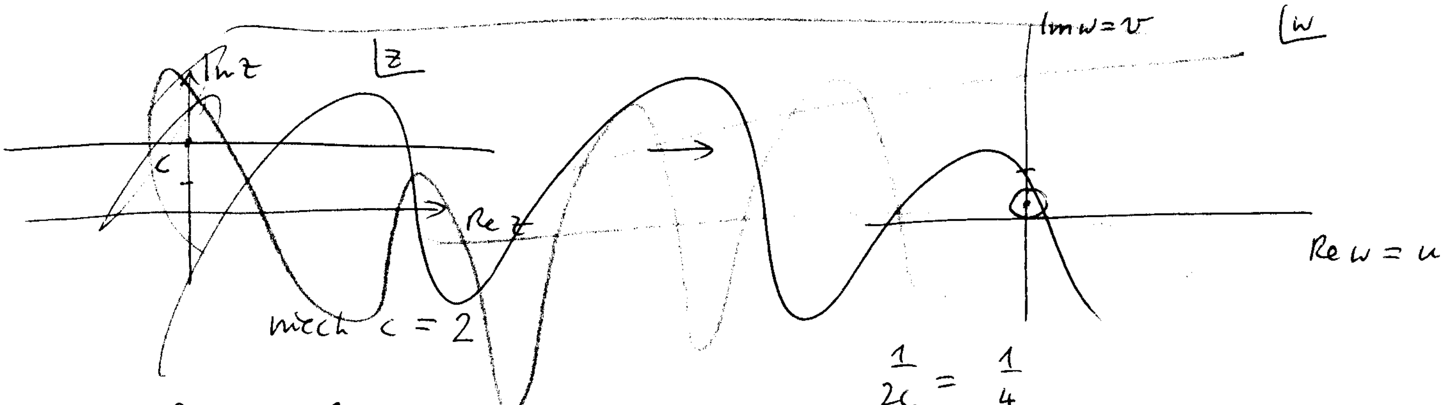
Wtedy $f(z(t)) = \frac{c - it}{c^2+t^2} \equiv u + iv$

$$u = \frac{c}{c^2+t^2}, \quad v = -\frac{t}{c^2+t^2}$$

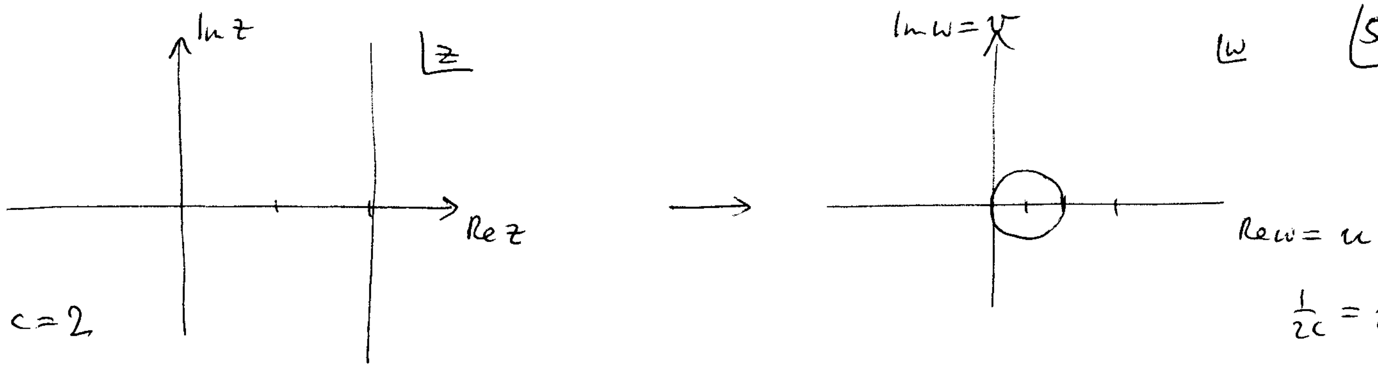
eliminując parametr t dostajemy

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4c^2}$$

a więc przy tym przekształceniu prosta przechodzi w okrąg o środku w $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{2c}$.



$f(2c) = \frac{1}{2c} \Rightarrow$ cała poł



a ponieważ $z = 2c \rightarrow f(2c) = \frac{1}{2c}$ – środek okręgu, to cała półpłaszczyzna $x \geq c$ przekształcana jest w koło o środku $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{2c}$.

Def. Mówimy, że $z_1, z_2, \dots, z_n$ zbiega do z_0 przy $n \to \infty$ jeśli w dowolnie małym otoczeniu z_0 znajdzie się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, tzn

$$\bigwedge_{\varepsilon} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Jeśli w dowolnym otoczeniu z_0 znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu (ale niekoniecznie prawie wszystkie) to taki punkt nazywamy punktem skupienia. Granica ciągu jest punktem skupienia tego ciągu, ale w drugą stronę to już w ogólności nie jest prawda.

Definicja granicy funkcji przy $z \to z_0$

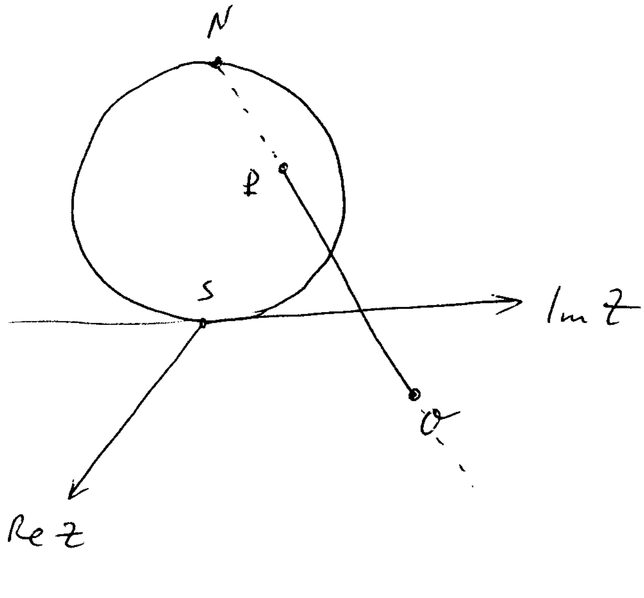
$$\bigwedge_{\varepsilon} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{|z-z_0|<\delta} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

definicja Cauchy'ego

Funkcja jest ciągła w z_0 jeśli $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Sfera Riemanna

W wielu zastosowaniach analizy zespolonej ważne jest badanie zachowania funkcji dla dużych wartości $|z|$. Riemann wprowadził pojęcie rozszerzonej płaszczyzny zespolonej dodając do niej jeden punkt w nieskończoności. Zrobił to podając odwzorowanie płaszczyzny na sferę przez rzut stereograficzny. Rzut stereograficzny jest wykorzystywany też w kartografii, żeby odwzorować mapę Ziemi na płaszczyznę. Robimy to tak: Umieszczamy sferę o ~~promieniu~~ średnicy 1 stycznie do płaszczyzny zespolonej w punkcie $z = 0$.



Punkt styczności nazwijmy S (np. biegun południowy Ziemi). Rzut definiujemy w ten sposób, że obrazem Q na płaszczyźnie $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ punktu P na powierzchni sfery

jest punkt, w którym płaszczyzna $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ jest przebita przez prostą wychodzącą z bieguna północnego N i przechodzącą przez dany punkt P. Z konstrukcji widać, że każdy punkt sfery, z wyjątkiem bieguna północnego N, ma jeden i tylko jeden obraz. Mamy więc odwzorowanie sfery bez punktu N na płaszczyznę zespoloną. Jest to odwzorowanie jednoznaczne i odwracalne. Teraz rozszerzamy płaszczyznę zespoloną o punkt $z = \infty$, tak aby odpowiadał on punktowi N na sferze.
W ten sposób mamy tylko jeden punkt $z = \infty$ na rozszerzonej w ten sposób płaszczyźnie zespolonej.

Z konstrukcji, równikowi na sferze odpowiada na płaszczyźnie okrąg o środku w $z=0$ i promieniu 1. Wnętrzem tego okręgu jest obraz półkuli południowej.

<u>Zadanie</u>. Czemu okręgi i proste na płaszczyźnie odpowiadają na sferze? Innymi słowy, jakie linie na sferze obrazami są proste i okręgi na płaszczyźnie?

5.2 Różniczkowalność i analityczność

Funkcję $f(z)$ nazywamy różniczkowalną w z_0 jeśli istnieje granica

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z_0} \equiv f'(z_0).$$

Na funkcję $z \to f(z) = w$ można popatrzeć jak na układ funkcji dwóch zmiennych $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$, gdyż $f(z) = \mathrm{Re}\left(f(z)\right) + i\, \mathrm{Im}\left(f(z)\right)$

Pamiętając o różniczkowalności funkcji wielu zmiennych, różniczkowalność w sensie zespolonym jest dużo silniejszym wymaganiem niż różniczkowalność w sensie funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej.

Przykład

Funkcja $f(z) = z^2$ jest różniczkowalna.

Mamy bowiem

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2}{\Delta z} =$$

$$= 2z + \Delta z$$

niezależnie od Δz i granica istnieje przy $\Delta z \to 0$.

$$\frac{d}{dz}(z^2) = 2z.$$

Ale funkcja $g(z) = z^* = x - iy$ nie jest różniczkowalna. W tym wypadku mamy

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{z^* + \Delta z^* - z^*}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

Wybierając np $\Delta y = 0$, mamy $\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

a biorąc $\Delta x = 0$, mamy $\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$

~~Granica~~ Wynik więc zależy od sposobu zbiegania z $|\Delta z| \to 0$, a więc granica nie istnieje

$\square$

Dla funkcji zespolonych obowiązują te same zasady różniczkowania, co dla funkcji rzeczywistych:

a) $\frac{d}{dz}\left(a f(z) + b g(z)\right) = a \frac{df}{dz} + b \frac{dg}{dz}$

b) $\frac{d}{dz}\left(f(z) \cdot g(z)\right) = \frac{df}{dz} \cdot g + f \frac{dg}{dz}$

Definicja Funkcję $f(z)$ nazywamy analityczną w obszarze $\mathcal{D}$, jeśli jest ona określona i różniczkowalna w każdym punkcie $z \in \mathcal{D}$. Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest analityczna w punkcie $z_0 \in \mathcal{D}$, jeśli jest ona analityczna w pewnym otoczeniu punktu z_0.

Analityczność nie oznacza jedynie istnienie pochodnej w punkcie z_0, ale różniczkowalności w pewnym otoczeniu z_0.

Funkcję analityczną (w z_0) nazywamy wymiennie holomorficzną w punkcie z_0. Holomorficzność w z_0 odnosi się nie tylko do samego z_0, ale do pewnego otoczenia tego punktu.

Twierdzenie Cauchy – Riemanna

Niech $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ będzie funkcją określoną i różniczkowalną w pewnym otoczeniu punktu $z = x + iy$. Wówczas w punkcie tym istnieją pochodne cząstkowe, które spełniają równanie Cauchy – Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

I na odwrót: jeśli funkcje u i v są różniczkowalne i mają pochodne cząstkowe, które spełniają równania Cauchy – Riemanna, to funkcja $f(z) = u + iv$ jest analityczna.

Dowód: $\Rightarrow$

Z definicji pochodnej funkcji zespolonej wynika

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i\left(v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\right)}{\Delta x + i\Delta y}$$

W szczególności, dla $\Delta y = 0$ otrzymujemy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

i obie granice istnieją, bo istnieje $f'(z)$.

Zatem $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Wybierając teraz $\Delta x = 0$, mamy

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Z porównania części rzeczywistej i urojonej $f'(z)$ dostajemy równania Cauchy – Riemanna.

Teraz dowód $\Leftarrow$

Weźmy Δz dostatecznie małe, żeby z i $z+\Delta z \in \mathcal{D}$

Z twierdzenia Lagrange'a o średniej wynika, że na prostej przechodzącej przez z i $z+\Delta z$ istnieją takie punkty z_1 i z_2, że

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=z_1} + \Delta y \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z=z_1}$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \Delta x \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=z_2} + \Delta y \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z=z_2}$$

Zatem

$$\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z) = \left.\left(\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{z=z_1} + i\left.\left(\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right|_{z=z_2}$$

Korzystając z równań Cauchy-Riemanna, mamy

$$\Delta f(z) = \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=z_1} - \Delta y \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=z_1} + i\left(\Delta x \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=z_2} + \Delta y \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=z_2}\right)$$

$$= \left(\Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=z_1} + i\Delta y \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=z_2}\right) + i\left(\Delta x \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=z_2} + i\Delta y \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=z_1}\right)$$

W granicy $\Delta z \to 0$, punkty z_1 i $z_2 \to z$, więc w tej granicy

$$\simeq (\Delta x + i\Delta y) \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z} + i(\Delta x + i\Delta y) \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z}$$

więc

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$ co kończy dowód.

Uwaga: istnienie pochodnych cząstkowych spełniających warunki Cauchy-Riemanna jest niewystarczające! Funkcja musi być różniczkowalna.

Np. $$u(x,y) = v(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ w punkcie } (0,0).$$

Ale pochodna u i v w tym punkcie nie istnieje

Tw o pochodnej funkcji złożonej

$F(f(z))$, jeśli $F(\zeta)$ ma pochodną $F'(\zeta)$ i $f(z)$ ma pochodną $f'(z)$, to

$$\frac{d\,F(f(z))}{dz} = F'(\zeta)\,f'(z),$$ przy czym w miejsce ζ trzeba podstawić $f(z)$.

Tw o pochodnej funkcji odwrotnej

Jeśli $z = g(w)$ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym i funkcja odwrotna do niej $w = f(z)$ jest ciągła, a $g(w)$ ma pochodną $g'(w) \neq 0$, to

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{g'(w)},$$ przy czym $w = f(z)$

Definicja funkcja jest holomorficzna w z_0, jeśli ma pochodną w pewnym otoczeniu tego punktu.

Przykład: $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$

w punkcie $z=0$ istnieje pochodna, bo

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z^* =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (\Delta x - i\Delta y) = 0.$$

ale nie jest to funkcja holomorficzna, gdyż dla $z \neq 0$ pochodna nie istnieje, bo

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2}{\Delta x + i\,\Delta y}$$ wynik zależy od sposobu wyboru Δx i $\Delta y \to 0$.

Przykład Gdzie funkcja $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ jest analityczna.

$$f(z) = \begin{cases} x^2-y^2+2ixy & w \quad D_1 = \{(x,y):\ x^2-y^2>0,\ xy>0\} \\ -x^2+y^2-2ixy & w \quad D_2 = \{(x,y):\ x^2-y^2<0,\ xy<0\} \\ x^2-y^2-2ixy & w \quad D_3 = \{(x,y):\ x^2-y^2>0,\ xy<0\} \\ -x^2+y^2+2ixy & w \quad D_4 = \{(x,y):\ x^2-y^2<0,\ xy>0\} \end{cases}$$

Sprawdzamy, że tylko w D_1 i D_2 są spełnione r. Cauchy'-Riemanna. W D_3 i D_4 oraz na brzegach D_1 i D_2 funkcja nie jest różniczkowalna, czyli nie jest analityczna.

Przykład Przekonać się, że funkcje $e^{\pm z}$, $e^{\pm iz}$ są analityczne w całej płaszczyźnie.

Równania Cauchy-Riemanna można przepisać w układzie współrzędnych biegunowych $z = x+iy = re^{i\varphi}$
$= r\cos\varphi + ir\sin\varphi$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi$$

$\tan\varphi = \frac{y}{x}$

$x = r\cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

podobnie obliczamy $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$ i po podstawieniu do warunków Cauchy-Riemanna dostajemy

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Jeżeli $f(z)$ jest holomorficzna w każdym $z \in D$, to mówimy, że jest holomorficzna w D.

Niech $f(z)$ będzie holomorficzna w D. Załóżmy, że $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ i funkcje u, v będą dwukrotnie różniczkowalne (zobaczymy później, że to już wynika z holomorficzności).

Różniczkując stronami równania Cauchy-Riemanna mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

a z równości pochodnych mieszanych, dostajemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(r. Laplace'a 2-wym.)}$$

$$i \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

więc części rzeczywista u i urojona v funkcji holomorficznej f są funkcjami harmonicznymi.

Fakt ten pozwala wyznaczyć funkcję analityczną (z dokładnością do stałej), jeśli znamy jej część rzeczywistą lub urojoną.

Przykład. niech $v(x,y) = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3$.

Sprawdzamy, że funkcja ta spełnia równanie Laplace'a. Zatem z równań Cauchy-Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 - 12xy + 3y^2$$

Całkując ten układ równań dostajemy

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + C.$$

Zatem szukaną funkcją $f = u + iv$ jest

$$f(z) = (2+i)z^3 + C$$

Interpretacja geometryczna

Niech $f = u + iv$ będzie funkcją holomorficzną.

Definiujemy dwa pola wektorowe

$$\vec{P} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\vec{Q} = \operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Z r. Cauchy–Riemanna wynika, że $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$

Zatem rodziny krzywych

$$u(x,y) = \text{const}$$

i $$v(x,y) = \text{const}.$$

są wzajemnie ortogonalne w każdym punkcie.

Przykład rodziny krzywych $x^2 - y^2 = \text{const}$ i $2xy = \text{const}$ są ortogonalne,

gdyż $u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 = z^2$ jest holomorficzna.

Funkcje wieloznaczne. Powierzchnie Riemanna

Zdefiniujemy teraz rozszerzenie funkcji logarytm na zmienne zespolone. Chcemy, aby dla dodatnich rzeczywistych argumentów był to „zwykły" logarytm naturalny

tzn. $\ln r$

niech teraz $z = re^{i\varphi}$, $\ln z = u + iv$

$u(r,\varphi) = \ln r$

Zauważmy, że już dla zmiennej zespolonej mamy wieloznaczności, gdyż każda liczba $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele faz, bo

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

$$-\pi < \varphi < +\pi$$

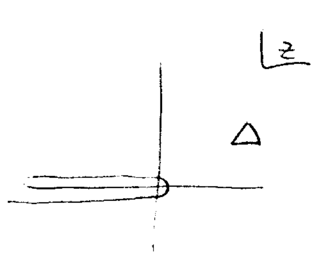
φ nazywa się argumentem głównym

$$\arg z = \varphi \qquad -\pi < \varphi < \pi$$

natomiast wieloznaczny jest $\mathrm{Arg}\, z = \varphi + 2\pi k$, $k = \pm 1, 2, \dots$

funkcja $\arg z$ jest nieciągła na ujemnej półosi.

Jeśli z $\mathbb{C}'$ wyciąć ujemną półoś, to $\arg z$ jest ciągła i jednoznaczna w Δ



$$\Delta = \mathbb{C}' - \mathbb{R}_-$$

Mówimy: W obszarze Δ możemy wydzielić jednoznaczną i ciągłą gałąź $\arg z$ funkcji wieloznacznej $\mathrm{Arg}\, z$ wybierając pewną wartość k.

Gałęzie te można „posklejać" w ten sposób, że wraz ze wzrostem φ przy przejściu przez $\varphi = \pi$ przechodzimy na nową gałąź, dla której k rośnie o 1.

W ten sposób konstruujemy powierzchnię Riemanna dla funkcji Arg z.

Wracamy do funkcji ln z

Chcemy żeby $u(r,\varphi) = \ln r$.

z równań Cauchy–Riemanna mamy

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \quad v(r,\varphi) = \varphi + c$$

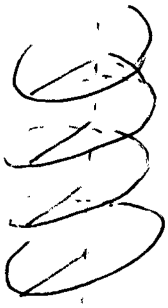
żeby $\ln 1 = 0 \Rightarrow c = 0$.

ponieważ funkcja Arg z jest wieloznaczna, to i logarytm jest wieloznaczny

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$$

Możemy, podobnie jak dla funkcji arg, wprowadzić punkt rozgałęzienia i cięcie wzdłuż ujemnej półosi $\mathrm{Re}\, z \leq 0$, $\mathrm{Im}\, z = 0$

logarytm główny $\ln z = \ln|z| + i \arg z$



I podobnie jak dla Arg możemy utworzyć powierzchnię Riemanna funkcji Ln z przez „sklejenie" kolejnych płatów Z_k

Zauważmy że cięcie na płaszczyźnie z można poprowadzić w sposób dowolny od punktu rozgałęzienia w $z=0$ do punktu w ∞.

Inny przykład funkcji wieloznacznej

$$w = \sqrt{z} \qquad z \neq 0.$$

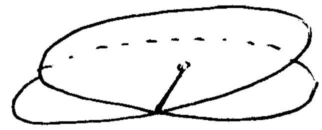
Jest to funkcja dwuznaczna

bo każdej wartości z przyporządkowuje

$$\sqrt{|z|}\; e^{\frac{i(\arg z + 2\pi k)}{2}} \qquad \text{dla } k = 0, 1.$$

ustalając k mamy funkcję jednoznaczną w obszarze $0<|z|<\infty$, ale nieciągłą na ujemnej półosi rzeczywistej z uwagi na nieciągłości $\arg z$

Możemy teraz zbudować powierzchnię Riemanna biorąc dwie płaszczyzny zespolone, rozciąć je wzdłuż półosi ujemnej rzeczywistej i skleić je „na krzyż", tzn górny brzeg cięcia na jednej płaszczyźnie skleić z dolnym na drugiej i na odwrót. W ten sposób dostajemy $w=\sqrt{z}$ jednoznaczną i ciągłą



Obrazem jednego płata funkcji $\sqrt{z}$ jest prawa lub lewa półpłaszczyzna zespolona a obrazem cięcia cała oś urojona.

Inny przykład

$$w = \sqrt{(z-1)(z+2)}$$

Punktami rozgałęzienia są $z=1$ i $z=-2$

Są to punkty pierwiastkowe, więc mamy dwa płaty. Ale obchodząc jednocześnie punkty 1 i -2 nie zmieniamy płata. Cięcie wybieramy np. wzdłuż konturu łączącego te punkty rozgałęzienia.

Odwzorowanie konforemne

Na funkcję $f(z)$ można popatrzeć jak na odwzorowanie płaszczyzny zespolonej (dwuwymiarowej) na płaszczyznę zespoloną. Jeśli przekształcenie zachowuje kąty przecięcia między krzywymi, to nazywamy je konforemnym.

Okazuje się, że przekształcenia konforemne zadane są funkcjami analitycznymi, za wyjątkiem punktów krytycznych, tzn. takich, w których pochodna $f'(z)=0$.

Wybierzmy bowiem dwie krzywe sparametryzowane przez $z_1(t)$ i $z_2(t)$ przecinające się w $z_1(t_0)=z_2(t_0)\equiv z_0$. Obrazami tych krzywych są $w_1(t)=f(z_1(t))$ i $w_2(t)=f(z_2(t))$ przecinające się w $w_0=f(z_0)$. Różniczkując mamy w $t=t_0$

$$w_1'(t_0) = f'(z_0)\, z_1'(t_0)$$

$$w_2'(t_0) = f'(z_0)\, z_2'(t_0)$$

Ponieważ $\arg(z_1'(t_0))$ określa kąt nachylenia wektora stycznego do krzywej $z_1(t)$ w punkcie t_0 do osi rzeczywistej (i tak samo dla $z_2'(t_0)$), to kąt nachylenia obrazów w w_0 jest powiększony o $\arg(f'(z_0))$, a więc taki sam dla obu krzywych [z wyj. gdy $f'(z_0)=0$].

Przykład

$f(z) = z^2$, jedyny punkt krytyczny, to $z=0$.

Weźmy proste $z_1 = t+ic$ (równoległe do osi Re)

i proste $z_2 = d+it$ (równoległe do osi Im)

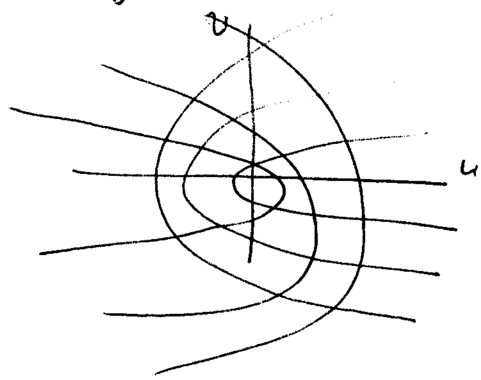
$$w_1(t) = (t+ic)^2 = t^2-c^2+2ict \qquad u = t^2-c^2, \quad v = 2ct$$

eliminując t dostajemy $u = \dfrac{v^2}{4c^2} - c^2$

rodzina parabol

$$w_2(t) = (d+it)^2 = d^2-t^2+2ict \Rightarrow u = -\frac{v^2}{4d^2} + d^2$$

Dla $c=d=0$ parabole te degenerują się do półprostych



Przykład

Inwersja $w = \dfrac{1}{z}$

$$w = \frac{z^*}{|z|^2} = \left(\frac{z}{|z|^2}\right)^*$$

Obraz znajdziemy w dwóch krokach:
najpierw odległości zmieniamy z r na $\frac{1}{r}$,
a później odbijamy względem osi Re.

5.3. Całki konturowe i tw Cauchy'ego

$$f(z) = u + iv$$

$$dz = dx + i\,dy$$

$$\int_{\tilde{C}} f(z)dz = \int_{\tilde{C}} u\,dx - v\,dy + i \int_{\tilde{C}} v\,dx + u\,dy$$

Jeśli kontur całkowania sparametryzujemy

$$z(t) = x(t) + i y(t), \text{ to}$$

$$\int_{\tilde{C}} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \left(u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt}\right) dt + i \int_{t_1}^{t_2} \left(v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt}\right) dt$$

gdzie uwzględnić trzeba pamiętać o parametryzacji

tzn. $u = u(x(t), y(t))$

$v = v(x(t), y(t))$ itd.

teraz te całki można zebrać razem do

$$\int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt}\, dt$$

Podobnie jak dla całek krzywoliniowych, gdy kontur ma załamania (gdzie nie istnieje pochodna $\frac{dz}{dt}$), to całkę liczymy jako sumę całek po częściach gładkich.

Kontur może być zamknięty i wtedy mamy dwie możliwości

$$\oint_C f(z)dz \quad \text{lub} \quad \oint f(z)dz$$

Przykład

$$\oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^m \, dz \quad , \qquad m - \text{całkowite}$$

wybieramy parametryzację okręgu $z(t) = z_0 + R e^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$

$$\oint (z-z_0)^m \, dz = \int_0^{2\pi} R^m e^{imt} \, i R e^{it} \, dt = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}$$

Jeśli istnieje taka $F(z)$, że $\frac{dF}{dt} = f(z)$, to

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=z(t)} \frac{dz(t)}{dt} \, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(z(t))}{dt} \, dt = F(z(t_2)) - F(z(t_1)) = F(z_2) - F(z_1)$$

Jest to uogólnienie dobrze znanego wzoru z rachunku całkowego funkcji rzeczywistych, wyrażającego całkę oznaczoną przez funkcję pierwotną. Wynika z niego również fakt, że dla wszystkich konturów całkowania leżących w pewnym obszarze ściągalnym $\mathcal{D}$ o tym samym początku i końcu całka konturowa z $f(z)$ daje ten sam wynik. Wymaganie, aby obszar $\mathcal{D}$ był ściągalny jest bardzo ważne. Widać to wyraźnie na przykładzie konturu zamkniętego. Jeśli kontur jest zamknięty, to całka konturowa znika. W przykładzie z poprzedniej strony całka po okręgu dla $m = -1$, tzn. z funkcji $\frac{1}{z-z_0}$) nie znika mimo że pochodną funkcji $\ln(z-z_0)$ jest $\frac{1}{z-z_0}$. Jak pamiętamy, funkcja $\ln(z-z_0)$ jest wieloznaczna, a funkcja podcałkowa $\frac{1}{(z-z_0)}$ ma osobliwość w $z=z_0$, więc kontur okrążający $z=z_0$ nie jest ściągalny.

Przy całkach konturowych ważne jest rozróżnienie, czy dany kontur całkowania jest zamknięty. To zależy od własności funkcji podcałkowej. Rozpatrzmy

<u>Przykład</u>

Niech funkcja podcałkowa $f(z)=\sqrt{z}$. Wiemy już, że jest to funkcja wieloznaczna i jak wygląda powierzchnia Riemanna, aby ta funkcja ta była funkcją jednoznaczną. Funkcja ta ma punkt rozgałęzienia w $z=0$ i powierzchnia Riemanna składa się z dwóch kopii płaszczyzny zespolonej odpowiednio sklejonych wzdłuż cięcia od $z=0$ do $z=\infty$ (rys. na stronie 5-18).

Fakt, że mamy dwie kopie płaszczyzny zespolonej składające się na powierzchnię Riemanna wynika stąd, że

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2\pi)}$$

ale $\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\varphi}{2}}$ lub $\sqrt{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$

a więc tej samej wartości z odpowiadają dwie wartości funkcji $\sqrt{z}$. Stąd, aby tę funkcję ujednoznacznić robimy rozróżnienie między z i $ze^{i2\pi}$, tzn mówimy, że ~~leżą~~ z i $ze^{2\pi i}$ leżą na różnych płatach powierzchni Riemanna. Jak te płaty sklejamy w powierzchnię Riemanna jest kwestią umowy, ale ta umowa ma wpływ na definicję ujednoznacznionej funkcji $\sqrt{z}$.

a) Jeśli cięcie poprowadzimy wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej to pierwszy płat odpowiada fazie $0 < \varphi < 2\pi$ liczby zespolonej, a drugi płat fazie $2\pi < \varphi < 4\pi$.

wtedy przy przekształceniu $z \to \sqrt{z}$ pierwszy płat zostaje odwzorowany w górną połówkę płaszczyzny zespolonej, bo

$$0 < \varphi < 2\pi \longrightarrow 0 < \varphi < \frac{2\pi}{2} = \pi$$

drugi płat w dolną połówkę, bo

$$2\pi < \varphi < 4\pi \longrightarrow \pi = \frac{2\pi}{2} < \varphi < \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

b) Jeśli cięcie poprowadzimy wzdłuż ujemnej półosi urojonej, to pierwszy płat odpowiada fazie $-\pi < \varphi < \pi$, a drugi φ: $\pi < \varphi < 3\pi$. Wówczas przy $z \to \sqrt{z}$

pierwszy płat $-\pi < \varphi < \pi \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

tzn prawa połówka płaszczyzny zespolonej

drugi płat $\pi < \varphi < 3\pi \rightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$

lewa połówka płaszczyzny ~~zesp~~ zespolonej.

Ma to wpływ na wartości funkcji, bo

$\sqrt{-i}$ w przypadku a) wynosi $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

w przypadku b) wynosi $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

koniec przykład.

Przykłady

1) Dla funkcji $\sqrt{z}$ kontur będący okręgiem o środku $z=0$ nie jest zamknięty, bo przecina cięcie, tzn po okrążeniu zera przechodzimy z jednej powierzchni Riemanna na drugą. Aby kontur taki był zamknięty, to albo

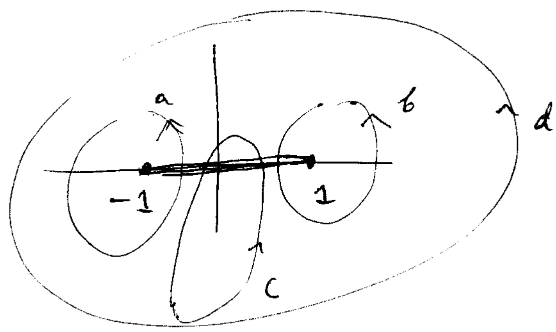
a) nie powinien okrążać $z=0$

b) albo okrążać zero parzystą liczbę razy (bo funkcja $\sqrt{z}$ jest dwuznaczna).

2) Dla funkcji $\sqrt[3]{z}$ kontur zamknięty musi okrążać $z=0$ trzykrotnie, sześciokrotnie, itp, tzn $3n$-razy.

3) Dla funkcji $f(z) = \ln z$ kontur zamknięty nie może okrążać $z=0$, albo przechodzić przez cięcie tę samą liczbę razy w jedną stronę i w przeciwną stronę bo funkcja logarytm jest nieskończenie wiele razy niejednoznaczna.

4) Dla funkcji $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}$, która ma pierwiastkowe rozgałęzienie w $z = \pm 1$ cięcie można poprowadzić od $z = -1$ do $z = +1$. Wtedy kontury



a i b nie są zamknięte

c i d są zamknięte.

Twierdzenie Cauchy'ego

Jeżeli w ściągalnym obszarze $\mathcal{D}$ mamy określoną funkcję analityczną $f(z)$, to całka konturowa z tej funkcji po kawałkami gładkimi konturze $\tilde{C}$ całkowicie leżącym w $\mathcal{D}$ wynosi zero, tzn.

$$\oint_{\tilde{C}} f(z) = 0.$$

Dowód jest natychmiastowy. Ponieważ f jest analityczna, to pochodne cząstkowe u i v, gdzie $f=u+iv$ istnieją. ~~są ciągłe~~ Załóżmy, że są ciągłe. Ponieważ pochodne cząstkowe spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna, to są spełnione założenia tw. Greena i na mocy tego twierdzenia całka znika. Tw. Cauchy'ego jest więc konsekwencją tw. Greena.

Znacznie później Goursat podał dowód bez założenia, że $f'(z)$ jest funkcją ciągłą.

Słuszne jest też twierdzenie odwrotne:

Tw. Morery

Jeśli $f(z)$ jest ciągła w ściągalnym obszarze $\mathcal{D}$ i dla każdego konturu zamkniętego $\hat{C} \subset \mathcal{D}$ zachodzi

$$\oint_{\hat{C}} f(z)\,dz = 0,$$

to f jest analityczna w $\mathcal{D}$.

Dowód: zerowanie całki oznacza niezależność od drogi funkcji $F(z)$ zdefiniowanej jako całka konturowa z $f(z)$ od pewnego punktu z_0 do z. $F(z)$ jest różniczkowalna, więc analityczna. Możemy napisać $F(z+h)-F(z) = f(z+\xi h)\cdot|h|$ i w granicy $|h|\to 0$ dostajemy $f(z)=F'(z)$. Zatem f jest analityczna jako pochodna funkcji analitycznej.

Przykład

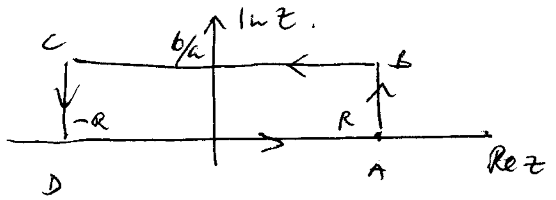
Oblicz $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(2bx)\,dx \quad a>0.$

Rozpatrzmy całkę

$\int e^{-az^2}$

e^{-az^2} analityczna w całej płaszczyźnie. Całka po konturze zamkniętym znika.

Wybieramy kontur jak na rysunku



Mamy $I_{AB}+I_{BC}+I_{CD}+I_{DA}=0$. gdzie I_{AB} - całka od A do B.

dla AB parametryzujemy kontur $z = R+it$, $0 \le t \le \frac{b}{a}$

$$I_{AB} = \int_{AB} e^{-az^2}\,dz = \int_0^{b/a} e^{-a(R^2-t^2+2Rti)}\, i\,dt =$$

$$= i e^{-aR^2} \underbrace{\int_0^{b/a} e^{at^2-2aRti}\,dt}_{\le M\cdot L} \quad \cancel{\le i e^{-aR^2}}$$

$$M \ge \max\left|e^{at^2-2aRti}\right| = e^{b^2/a}$$

$$|I_{AB}| \le e^{-aR^2} e^{b^2/a}\,\frac{b}{a} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

podobnie $I_{CD} \to 0$.

$$I_{DA} = \int_{-R}^{R} e^{-at^2}\,dt$$

$$I_{BC} = \int_R^{-R} e^{-a(t+i\frac{b}{a})^2}\,dt = -\int_{-R}^{R} e^{+b^2/a} e^{-at^2}(\cos 2bt -$$

$$- i\sin 2bt)\,dt$$

Stąd w granicy $R\to\infty$ $$e^{b^2/a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}(\cos 2bt - i\sin 2bt)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Więc

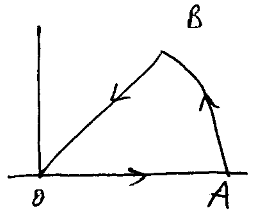
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos 2bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/a}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\sin 2bx = 0.$$

ta całka jest trywialna

Przykład

obliczyć $\int_0^\infty \cos x^2 \, dx$

weźmy funkcję e^{iz^2} i rozpatrzmy całkę z niej po konturze



. Z tw. Cauchy'ego całka znika tzn.

$$I_{OA} + I_{AB} + I_{BO} = 0.$$

$$I_{OA} = \int_0^R e^{it^2} dt$$

$$I_{BO} = \int_R^0 e^{i(te^{i\pi/4})^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dt =$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow[R\to\infty]{} -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

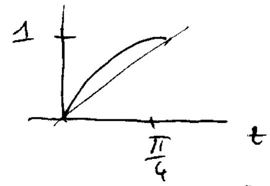
$$I_{AB} = \int_0^{\pi/4} e^{i(Re^{it})^2} Rie^{it} dt$$

$$= iR \int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2t + i\sin 2t)} e^{it} dt$$

oszacujemy tę całkę

$$|I_{AB}| \le R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t} dt$$

Ale z wypukłości funkcji $\sin 2t$



$\sin 2t \geq \frac{4t}{\pi}$ dla $0 < t \le \frac{\pi}{4}$

więc $$|I_{AB}| \le R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 4t/\pi} dt = \frac{1-e^{-R^2}}{4R} \pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_0^\infty e^{it^2} dt = \int_0^\infty (\cos t^2 + i \sin t^2) \, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos t^2 \, dt = \int_0^\infty \sin t^2 \, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$