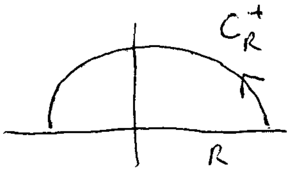
Lemat Jordana

Jeśli funkcja $f(z)$ w górnej półpłaszczyźnie i na osi rzeczywistej równomiernie znika dla $|z|\to\infty$ i λ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to w granicy $R\to\infty$ całka po górnym półokręgu o środku w $(0,0)$ znika.



$$\int_{C_R^+} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Dowód:

$$I = \int_{C_R^+} f(z)\, e^{i\lambda z}\, dz = iR\int_0^{\pi} f(Re^{it})\, e^{i\lambda R(\cos t + i\sin t)}\, e^{it}\, dt$$

Zatem

$$|I| \le \int_0^{\pi} |f(Re^{it})|\, e^{-\lambda R\sin t}\, R\, dt \le$$

$$\le \max_{t\in(0,\pi)} f(Re^{it}) \int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin t}\, R\, dt$$

Z założenia lematu $\max f(Re^{it}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, musimy więc wykazać, że całka dąży do stałej.
Skorzystamy z wypukłości funkcji $\sin t$ na odcinku $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ oraz faktu, że $\cos t \ge \cos t_0$ dla $t\le t_0$ na odcinku $t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin t} R\, dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin t} R\, dt = 2\int_0^{t_0} e^{-\lambda R\sin t} R\,\frac{\cos t}{\cos t}\, dt +$$

$$+ 2\int_{t_0}^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin t} R\, dt \le 2\int_0^{t_0} e^{-\lambda R\sin t} R\,\frac{\cos t}{\cos t_0}\, dt$$

$$+ 2\int_{t_0}^{\pi/2} e^{-2\lambda R t/\pi} R\, dt =$$

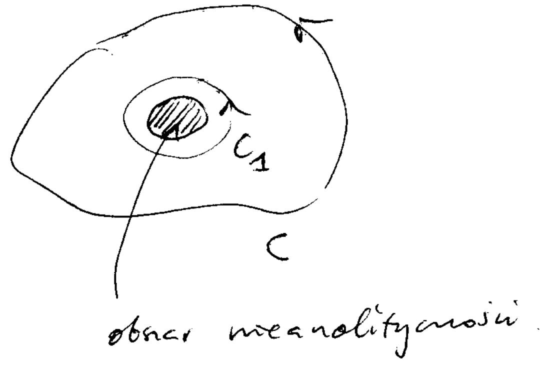
$$= \frac{2}{\lambda \cos t_0}\left(1 - e^{-\lambda R \sin t_0}\right) + \frac{\pi}{\lambda}\left(e^{-2\lambda R t_0/\pi} - e^{-\lambda R}\right) \to$$

$$\to \frac{2}{\lambda \cos t_0}$$ co kończy dowód.

Podobnie dowodzimy, że gdy funkcja f w dolnej półpłaszczyźnie i na osi rzeczywistej równomiernie (jednostajnie) znika dla $|z| \to \infty$ i λ jest liczbą rzeczywistą ujemną, to całka po dolnym półokręgu w granicy $R \to \infty$ znika.

tzn
$$\int_{\tilde{C}_R^-} f(z) e^{i\lambda z}\, dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Jeśli funkcja jest analityczna i kontur leży w obszarze ściągalnym, to możemy kontur modyfikować dowolnie i całka nie zależy od konturu. Całka po konturze zamkniętym w takim przypadku znika. Załóżmy teraz, że ~~obszar~~ kontur zamknięty obejmuje obszar nieanalityczności funkcji podcałkowej, tzn leży w obszarze niesciągalnym.



Wówczas
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$
gdzie C_1 $\oint$ można wybrać tak, że ściśle otacza obszar nieanalityczności.

Jeśli kontur C obejmuje kilka obszarów nieanalityczności funkcji podcałkowej, to wówczas całka po tym konturze daje się przedstawić jako

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_i \oint_{C_i} f(z)\,dz$$

gdzie kontury C_i obejmują ściśle obszary nieanalityczności.

Niech $f(z)$ – analityczna. Rozpatrzmy całkę

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$, gdzie kontur C obejmuje punkt $z=z_0$.

Jest to jedyny punkt nieanalityczności funkcji $\frac{f(z)}{z-z_0}$ więc

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = \oint_{K(z_0,\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

gdzie $K(z_0,\varepsilon)$ jest okręgiem o środku w z_0 i promieniu $\varepsilon \to 0$. Kontur ten możemy zapisać w postaci parametrycznej $z(t)=z_0+\varepsilon e^{it}$

$$\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi i\, f(z_0)$$

Wyprowadziliśmy wzór Cauchy'ego

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}$$

Wzór Cauchy'ego można uogólnić na przypadek niejednospójnego $\mathcal{D}$. Jeśli w $\mathcal{D}$ jest obszar nieanalityczności funkcji $f(z)$ objęty konturem $\vec{F}$, to dla konturu $\vec{C}$ obejmującego ten obszar mamy

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\oint\limits_{\vec{C}}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-\oint\limits_{\vec{F}}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Zastosowanie tw. i wzoru Cauchy'ego

1) $$I=\oint\limits_{\vec{C}}\frac{e^z}{z-2}\,dz$$, $\vec{C}$ pewien kontur na $\mathbb{C}$.

Funkcja podcałkowa jest analityczna z wyjątkiem $z=2$. Jeśli kontur $\vec{C}$ nie otacza tego punktu, to na mocy tw. Cauchy'ego $I=0$.
Jeśli kontur obejmuje punkt $z=2$, to

$$I=2\pi i\, e^z\Big|_{z=2}=2\pi i e^2$$

2) $$I=\oint\frac{z^2+1}{z^2-1}\,dz$$

Funkcja podcałkowa jest analityczna na całej $\mathbb{C}$ z wyjątkiem punktów $z=-1$ i $z=+1$.

a) jeśli $\vec{C}$ nie okrąża 1 i -1 $\Rightarrow$ $I=0$

b) kontur $\vec{C}$ okrąża punkt $z=-1$

$$I=\oint\frac{z^2+1}{z-1}\,\frac{1}{z+1}\,dz=2\pi i\,\frac{z^2+1}{z-1}\Big|_{z=-1}=-2\pi i$$

c) kontur obejmuje $z=+1$ $\Rightarrow$ $I=+2\pi i$

d) kontur obejmuje $z=1$ i $z=-1$, całka jest sumą b i c $\Rightarrow$ $I=0$.

Wzór całkowy Cauchy'ego dla pochodnych

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i\, h}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{ \oint \frac{f(z)}{\left(z-(z_0+h)\right)(z-z_0)}\,dz \right. =$$

$$\frac{z-z_0-h+h}{z-z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)\;h}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz$$

Teraz wystarczy zauważyć, że $\frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}$ jest analityczna dla infinitezymalnie małych h, czyli ograniczona. Zatem można ją ograniczyć przez wartości maksymalną na konturze $\tilde{C}$ × długość konturu $= \max \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\, 2\pi\varepsilon$ i w granicy $h\to 0$ druga całka znika.

Stąd
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

Wynik ten można też dostać różniczkując stronami wzór Cauchy'ego $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$, ale wtedy trzeba jeszcze wykazać, że można zamienić kolejność różniczkowania i całkowania.

Podobnie dowodzimy
$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz \qquad \text{itd.}$$

Stąd wynika natychmiastowy wniosek, że funkcje analityczne są nieskończenie wiele razy różniczkowalne.

Szereg Taylora

przypomnienie: szeregi funkcyjne, zbieżności punktowa i jednostajna.

Uogólnienie twierdzenia o zamianie sumy z całką

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funkcji ciągłych $f_n(z)$ zbiega jednostajnie w obszarze $\mathcal{D}$ do funkcji $f(z)$, to całka konturowa z $f(z)$ po kawałkami gładkim konturze $\tilde{C}$ leżącym w $\mathcal{D}$ równa się sumie całek konturowych z $f_n(z)$, tzn

$$\int_{\tilde{C}} f(z)dz = \int_{\tilde{C}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tilde{C}} f_n(z)\,dz$$

Pierwsze tw. Weierstrassa

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funkcji analitycznych $f_n(z)$ w obszarze $\mathcal{D}$ zbiega jednostajnie do funkcji $f(z)$ w dowolnym obszarze domkniętym $B \subset \mathcal{D}$ (zbieżność niemal jednostajna). Wówczas

1) $f(z)$ jest funkcją analityczną w $\mathcal{D}$

2) $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \qquad k = 1, 2, \dots$$

gdzie szereg po prawej stronie zbiega jednostajnie w dowolnym $B \subset \mathcal{D}$.

Twierdzenie to określa warunki przemienności różniczkowania z sumą nieskończoną.

Drugie tw. Weierstrassa

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funkcji analitycznych $f_n(z)$ w obszarze $\mathcal{D}$ i ciągłych na jego brzegu zbiega jednostajnie na brzegu $\mathcal{D}$. Wówczas szereg ten zbiega jednostajnie w całym $\mathcal{D}$.

Twierdzenie to wynika z tw. Morery, wzoru całkowego Cauchy'ego i tw. o zamianie sumy z całką. Pozostawiamy je bez dowodu.

Przykład

Rozpatrzmy szereg $1+z+z^2+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie z i jest zbieżny do $\frac{1}{1-z}$ w kole $|z|<1$, i zbieżny jednostajnie do tej funkcji w każdym kole $|z| \leq R < 1$. Mamy bowiem

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| \leq \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{R^{n+1}}{1-R} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{dla } |R|<1$$

zatem dla tego szeregu obowiązują wszystkie powyższe twierdzenia w kole zbieżności.

Dla szeregów potęgowych $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ obowiązują analogiczne kryteria określające obszar ich zbieżności, jak dla szeregów nieskończonych.
W szczególności, szereg ten jest jednostajnie zbieżny w kole $|z-z_0| \leq r < R$, gdzie

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{— kryterium Cauchy'ego}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \quad \text{— kryterium D'Alemberta}$$

Twierdzenie o jednoznaczności szeregów potęgowych

Jeśli szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad i \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{zbieżne}$$

jednostajnie dla $|z-z_0|<R$ do tej samej funkcji, to wówczas $c_n = b_n$ dla wszystkich n.

Dowód jak dla szeregów rzeczywistych.

Możemy teraz udowodnić

tw. Taylora

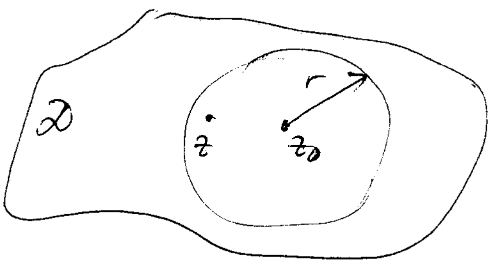
Niech $f(z)$ - analityczna w $\mathcal{D}$, $z_0 \in \mathcal{D}$. wtedy możemy tę funkcję rozwinąć jednoznacznie wokół z_0 w szereg potęgowy (Taylora)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \text{gdzie} \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\hat{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

zaś kontur $\hat{C}$ leży w całości w $\mathcal{D}$. Szereg ten jest zbieżny jednostajnie w każdym kole o środku z_0 i promieniu R mniejszym niż wynosi odległość od punktu z_0 do najbliższej nieanalityczności.

Dowód jest prostszy niż dla szeregów rzeczywistych, bo dla funkcji analitycznych mamy modyfikować dowolnie kontur całkowania, o ile nie wychodzimy z konturem poza obszar analityczności.



Przyjmijmy zatem, że jest to okrąg $|z-z_0| = R$.

Dla funkcji analitycznej $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$.

stąd możemy oszacować

$$|f^{n}(z_0)| \le \frac{n!\, M}{R^n}, \quad \text{gdzie } M = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$$

Zatem $|c_n| \le \frac{M}{R^n}$. Więc oczywiście szereg

$\sum c_n (z-z_0)^n$ jest zbieżny jednostajnie w kole o środku z_0 i promieniu R. Wstawiając $f^n(z_0)$ do wyrażenia na szereg mamy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} f(\xi)\, d\xi .$$

Ponieważ szereg jest jednostajnie zbieżny, ~~to zmieniamy~~ bo $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$ i geometryczny, i sumując dostajemy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

✓.

Zauważmy, że z nierówności Cauchy'ego

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!\, M}{R^n}, \quad \text{gdzie } M = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|,$$

wynika, że jedyną funkcją analityczną na całej płaszczyźnie i ograniczoną jest funkcja stała (tw. Liouville'a). Mamy bowiem dla $n=1$

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{R} .$$

Z ograniczoności $M < \infty$ a z żądania analityczności na całej $\mathbb{C}$ wynika, że można wziąć $R \to \infty \Rightarrow f'(z_0) = 0$ i to dla dow. z_0. $\Rightarrow f = \text{const.}$

Przykłady:

1) $$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots$$ rozwinięcie wokół $z=0$. promień zbieżności $= 1$.

ale jeśli rozwiniemy wokół np $z=i$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$$

promień zbieżności wynosi $|1-i| = \sqrt{2}$.

2) $$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

3) $$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

promień zbieżności na całej pł. zesp.

4) $$\ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

promień zbieżności $|z|<1$ ale fazy $|\varphi|<\pi$

Przedłużenie analityczne

Jeśli funkcja jest analityczna i nie znika tożsamościowo w D, to miejsca zerowe tej funkcji w D są izolowane, tzn zawsze można wybrać otoczenie miejsca zerowego. Wynika to z rozwinięcia Taylora tej funkcji wokół punktu zerowego. Szereg ten musi się zacząć od pewnej dodatniej potęgi m, tzn.

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots \qquad f(z_0)=0$$

$$= (z-z_0)^m\, g(z), \quad \text{gdzie} \quad g(z_0) \neq 0.$$

$g(z)$ jest też analityczna, zatem nie znika w pewnym otoczeniu z_0, a więc $f(z)$ nie ma w tym otoczeniu innych punktów zerowych.

Ten fakt ma interesujące konsekwencje.

Tw. o jednoznaczności

1) Niech $f(z)$ analityczna w $\mathcal{D}$, której punkty zerowe z_n tworzą ciąg zbieżny do $a \in \mathcal{D}$. Wtedy $f(z) \equiv 0$ w całym $\mathcal{D}$.

2) z_n miejsc zerowych nie musi być zbieżny. Wystarczy, że ma co najmniej jeden punkt skupienia. Wtedy $\Rightarrow$ $f(z) \equiv 0$.

3) Jeśli $g(z)$ i $h(z)$ analityczne i $g(z_n) = h(z_n)$, a ciąg z_n ma punkt skupienia, to $g(z) = h(z)$

Stąd wynika twierdzenie o przedłużeniu analitycznym

Jeśli $f(z)$ analityczna w $\mathcal{D}_0$
$F(z)$ analityczna w $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}_0$
$f(z) = F(z)$ dla wszystkich $z \in \mathcal{D}_0$

Wówczas mówimy, że $F(z)$ jest przedłużeniem analitycznym $f(z)$ na obszar $\mathcal{D}$.

Twierdzenie o przedłużeniu brzmi:

Jeśli w $\mathcal{D}_0$ można wybrać ciąg punktów z_n, takich że $f(z_n) = F(z_n)$, i z_n ma punkt skupienia $\in \mathcal{D}_0$, to przedłużenie analityczne jest jednoznaczne

Dowód przez zaprzeczenie: Niech istnieją różne $F_1(z)$ i $F_2(z)$. Ale to jest sprzeczne z tw. o jednoznaczności.

Twierdzenie pozostaje słuszne, jeśli $\mathcal{D}_0$ i $\mathcal{D}$ mają jedynie część wspólną $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}$, w której można wybrać ciąg punktów z_n z punktem skupienia w $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}$. Pozwala to znaleźć przedłużenie funkcji $f(z)$ na obszar poza $\mathcal{D}_0$.

Przykład: $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$ dla $z \in \mathcal{D}_0 = \{z;\ |z| < 1\}$

$F(z) = \frac{1}{1-z}$ dla $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

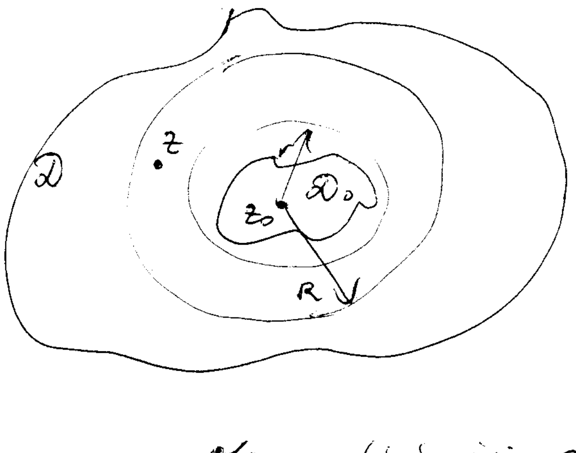
$F(z)$ jest przedłużeniem analitycznym $f(z)$ poza $|z| < 1$.

Na ogół w fizyce mamy do czynienia z funkcjami analitycznymi na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem pewnego zbioru punktów, w których funkcja jest nieskończona. Pytanie, czy takie funkcje można rozwinąć ~~całą~~ w szereg. O tym traktuje następny punkt.

Szereg Laurenta

Tw. Niech $f(z)$ analityczna w $\mathcal{D}$ z wyjątkiem obszarów lub punktów, gdzie nie jest analityczna. Niech też z pewnego z_0, niekoniecznie należącego do obszaru analityczności można narysować okręgi o promieniach $r < R$ określający pierścień $r < |z - z_0| < R$ w całości leżący w obszarze analityczności. Wtedy dla każdego z z tego pierścienia słuszne jest rozwinięcie w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$



$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad n = -1, -2, \dots$$

Obszar zbieżności zawarty jest między r i R.

Dowód: podobny jak dla tw. Taylora

Rozpatrzmy najpierw wyrazy z nieujemnymi potęgami

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ jest zbieżny w kole o promieniu R

i sumuje się

suma szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=R} f(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-z_0)}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=R} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

podobnie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{-(k+1)}}{(z-z_0)^{k+1}} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

Zatem

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz = f(z)$$

ze wzoru na str 5-33

Jeśli z_0 jest punktem izolowanym, to promień $r=0$, tzn pierścień zbieżności ~~$0<|z|<R$~~ $0<|z-z_0|<R$ jest kołem bez swojego środka $z=z_0$

Przykład $\frac{1}{1-z}$ jest sumą $1+z+z^2+\dots$, tzn szereg Taylora względem $z_0=0$.

Funkcję tę możemy rozwinąć w szereg Laurenta ~~wokół $|z|=1$~~ wokół $z_0=0$, ale dla $|z|>1$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right) = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\dots$$

szereg ten jest zbieżny na zewnątrz jednostkowego okręgu, tzn dla $|z|>1$.

Przykład

Rozłożyć w szereg Taylora lub Laurenta funkcję $f(z)=\frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$

$$\frac{-2z+3}{z^2-3z+2} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z}$$

możemy teraz skorzystać z poprzednich przykładów dla rozwinięcia wokół zera

a) $|z|<1$ szereg Taylora

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\dots\right) = \cancel{\frac{1}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \dots$$

więc $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$ dla $|z|<1$

b) w pierścieniu $1<z<2$

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$$

c) w obszarze $|z|>2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Def. Punkt $z_0 \in D$ nazywamy regularnym punktem funkcji analitycznej $f(z)$, jeśli istnieje otoczenie z_0, w którym $f(z)$ możemy przedstawić w postaci szeregu Taylora względem tego punktu.

Def. Gdy taki szereg Taylora nie istnieje to mówimy o punkcie osobliwym.

Def. Punkt osobliwy jest izolowany, jeśli istnieje takie otoczenie tego punktu, które nie zawiera innych punktów osobliwych.

Wokół takich punktów (regularnych i izolowanych, osobliwych) można funkcję rozwinąć w szereg Taylora lub Laurenta.

Def. Jeśli w szeregu Laurenta

a) nie występują potęgi ujemne $z-z_0$, to jest to usuwalny punkt osobliwy, np $\frac{\sin z}{z}$

b) występuje tylko skończona liczba członów z ujemnymi potęgami $z-z_0$. Taki punkt nazywamy biegunem rzędu m, gdzie m jest największą co do modułu ujemną potęgą $z-z_0$, np $m=+4$, gdy $(z-z_0)^{-4}$.

c) gdy występuje ∞ liczba potęg ujemnych, to punkt nazywamy istotnie osobliwym, np $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$.

Do powyższej klasyfikacji możemy włączyć punkt w nieskończoności rozpatrując zamiast $f(z)$ funkcję $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ w punkcie $z=0$.

Residuum

Jeśli wewnątrz konturu zamkniętego występują punkty osobliwe, to całka konturowa nie musi znikać. Wiemy, że możemy ją przedstawić jako sumę całek po konturach ściśle obejmujących osobliwości.

Załóżmy, że wewnątrz konturu mamy tylko jeden izolowany punkt osobliwy w z_1.

tzn $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_1)^n$ wokół z_1.

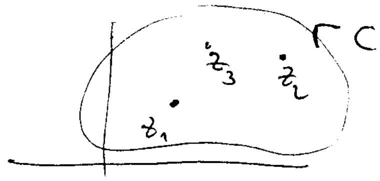
Całka konturowa wtedy wynosi:

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum c_n \oint_C (z-z_1)^n\,dz = 2\pi i\, c_{-1}$$

Współczynnik c_{-1} w rozwinięciu Laurenta funkcji wokół punktu osobliwego odgrywa szczególną rolę. Nazywać go będziemy residuum funkcji w punkcie osobliwym z_1.

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$$

Jeśli kontur obejmuje więcej punktów osobliwych izolowanych, to



$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Jeśli z_0 jest biegunem pierwszego rzędu, to

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$ więc

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Jeśli biegun jest drugiego rzędu, to

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Aby wyłuskać c_{-1} trzeba obliczyć

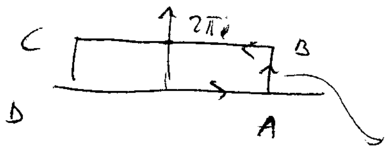
$$\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}(z-z_0)^2 f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,c_n\,(z-z_0)^{n+1}\right)$$

Dla bieguna m-tego rzędu

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\right]$$

Przykład

Oblicz całkę $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx \qquad 0<a<1$



na brzegu AB $\quad \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}=\frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} \xrightarrow[R\to\pm\infty]{} 0$

więc całki po AB i CD $\to 0$.

Zatem
$$\oint \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx+\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx$$
$$=\left(1-e^{2\pi a i}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx.$$

Z kolei funkcja podcałkowa ma biegun w $e^{z}=-1$, tzn w $z_0=i\pi$, co widać zapisując
$$\frac{1}{1+e^{z}}=\frac{1}{1+e^{i\pi+(z-z_0)}}=\frac{1}{1+e^{i\pi}e^{z-z_0}}=\frac{1}{1-\left(1+\frac{z-z_0}{1!}+\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\dots\right)}$$
$$=\frac{-1}{z-z_0+\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\dots}=\frac{-1}{z-z_0}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{(z-z_0)}{2!}+\frac{(z-z_0)^3}{3!}+\dots}}_{\text{skończone w } z_0=i\pi.}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i\pi}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}=\lim_{z\to i\pi}\frac{(z-z_0)e^{az}}{1+e^{i\pi+(z-z_0)}}=-e^{i\pi a}$$

więc
$$\left(1-e^{2\pi i a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=-2\pi i\,e^{i\pi a}$$

co daje
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Residuum logarytmiczne

Niech $f(z)$ analityczna jednowartościowa w ∞ poza skończoną liczbą izolowanych punktów osobliwych. Jej logarytmicznym residuum w pewnym z_0 nazywamy residuum pochodnej logarytmicznej ψ tej funkcji

$$\psi(z) = \left(\ln f(z)\right)' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Jeśli z_0 jest zerem $f(z)$, tzn

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots \qquad m>0$$

to

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m c_m (z-z_0)^{m-1} + \dots}{c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{m c_m + (m+1)c_{m+1}(z-z_0)+\dots}{c_m + c_{m+1}(z-z_0)+\dots}$$

Stąd

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = \begin{cases} m & \text{gdy } z_0 \text{ zerem } f \text{ rzędu } m \\ -n & \text{gdy } z_0 \text{ biegunem } f \text{ rzędu } n. \end{cases}$$

Więc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = M_C - N_C$$

suma krotności zer i biegunów wewnątrz C

Residuum w nieskończoności

def $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|\to\infty} f(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\xi)\,d\xi$$

gdzie kontur C musi obejmować wszystkie punkty osobliwe $f(z)$

z def.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

suma po wszystkich residuach wewnątrz.

Zamieniając zmienne $\zeta = \frac{1}{z}$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = -\operatorname*{Res}_{\zeta=0} \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

Dowód podstawowego twierdzenia algebry

Tw. Każdy wielomian ma pierwiastek w zbiorze $\mathbb{C}$
lub bardziej szczegółowo: ma ~~wp~~ pierwiastków tyle, ile wynosi stopień wielomianu, przy czym każdy pierwiastek liczy się tyle razy, ile ~~jej~~ wynosi jego krotność.

$$W(z) = c_n z^n + \dots + c_0 \qquad c_n \neq 0.$$

dowód: $M_C = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, gdyż wielomian nie ma punktów osobliwych.

$$\frac{W'(z)}{W(z)} = \frac{n c_n z^{n-1} + \dots \ c_1}{c_n z^n + \dots + c_0}$$

Sumę wszystkich residuów $\frac{W'(z)}{W(z)}$ możemy zastąpić przez residuum w ∞.

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2} \frac{W'(\frac{1}{\zeta})}{W(\frac{1}{\zeta})} = -\frac{1}{\zeta} \frac{n c_n + (n-1)c_{n-1}\zeta + \dots \ c_1 \zeta^{n-1}}{c_n + c_{n-1}\zeta + \dots + c_0 \zeta^n}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{W'(z)}{W(z)} = -\operatorname*{Res}_{\zeta=0} \varphi(\zeta) = n,$$ czyli rzeczywiście $M_C = n$.

Metody obliczania całek

1) całki z funkcji trygonometrycznych

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$$

obliczamy przez residua całki konturowej

$$I = -i \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{z} \qquad z = e^{i\varphi}$$

2) Jeśli ~~ca~~ funkcja $f(z)$ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie za wyjątkiem skończonej liczby biegunów i znika conajmniej jak $\frac{1}{|z|^{1+\varepsilon}}$ przy $|z| \to \infty$
$\varepsilon > 0$

to $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \underset{z=z_k}{\text{Res}} f(z)$

residua tylko z górnej półpłaszczyzny.

Jeśli analityczna w dolnej półpłaszczyźnie i znika szybciej jak $\frac{1}{|z|^{1+\varepsilon}}$ ~~gdy~~ $|z| \to \infty$, to wtedy trzeba wziąć z minusem sumę residuów w dolnej półpłaszczyźnie.

3) Jeśli a) $f(z)$ analityczna w górnej półpłaszczyźnie z wyjątkiem skończonej liczby biegunów

b) $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ dla $\text{Arg}\, z \in [0, \pi]$

c) rzeczywista $\lambda > 0$

to $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i \sum f(z) e^{i\lambda z}$

residua z górnej półpłaszczyzny

Funkcje Eulera

Funkcja gamma $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\,dt$ $\quad \text{Re}\, z > 0.$

mimo łatwo sprawdzić, że dla $\text{Re}\, z > 0$ spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna, więc $\Gamma(z)$ jest tam funkcją analityczną.

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^{z+1-1}\,dt = -\int\limits_0^\infty \frac{de^{-t}}{dt}\, t^z\,dt =$$

$$= -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-t} \frac{dt^z}{dt}\,dt = z\int\limits_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt = z\Gamma(z)$$

uogólnienie pojęcia funkcji silnia $\Gamma(\cancel{z+1}) = z\Gamma(z)$

Funkcję $\Gamma(z)$ można przedłużyć na płaszczyznę zespoloną. Weźmy najpierw $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$, wtedy

$$\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-z}\, dt$$ dobrze określone

Weźmy teraz rzeczywiste x $\quad 0 < x < 1$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \int_0^\infty e^{-s}\, s^{-x}\, ds =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty dt\, ds\; e^{t+s} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t} \;. =$$

zamieniamy zmienne $\quad u = t+s, \quad v = \frac{t}{s}$

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$= \int_0^\infty du\; e^{-u} \underbrace{\int_0^\infty dv\, \frac{v^{x-1}}{1+v}} \qquad \left\{ v = e^w \right\}$$

$$\int_0^\infty dv\, \frac{v^{x-1}}{1+v} = \int_{-\infty}^{\infty} dw\, \frac{e^{xw}}{1+e^w} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

więc $\quad \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \frac{1}{\Gamma(1-x)}$ $\quad$ wyprowadzony dla $0<x<1$.

Na tym odcinku możemy wybrać ciąg x_n zbieżny do $0 < x_0 < 1$, dla tego ciągu $\Gamma(x)$ jest równa

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} \cancel{\Gamma(}\, \frac{1}{\Gamma(1-z)}\Big|_{z=x_n},$$ a więc przedłużając analitycznie

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \frac{1}{\Gamma(1-z)}$$ ~~dla $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$~~

wszędzie tam, gdzie prawa strona istnieje.

Ponieważ $\Gamma(1-z)$ jest dobrze określone dla $\mathrm{Re}\, z < 1$, to ten wzór daje nam przedłużenie analityczne funkcji $\Gamma(z)$ na całą płaszczyznę, z wyjątkiem punktów osobliwych (biegunów) w $z = 0, -1, -2, \ldots$

Funkcja beta

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad \text{dla } \operatorname{Re} p > 0,\ \operatorname{Re} q > 0.$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds\; e^{-(t+s)}\, t^{p-1} s^{q-1}$$

zamieniamy zmienne $x = t+s$, $y = \frac{t}{t+s}$,

$0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq 1$

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)} = x \qquad t = xy,\quad s = x(1-y)$$

to

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty x\,dx\; e^{-x}\, x^{p+q-2} \int_0^1 dy\; y^{p-1}(1-y)^{q-1} =$$

$$= \Gamma(p+q)\, B(p,q)$$

czyli
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

rozszerzamy B na p,q tam, gdzie prawa strona dobrze określona.

Wzór Stirlinga

$x \gg 0$. Szukamy wzoru

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x\,dt \quad \{t = xs,\ dt = x\,ds\} =$$

$$= x^{x+1} \int_0^\infty ds\; e^{-x\underbrace{(s-\ln s)}_{g(s)}}$$

minimum dla $s = 1$

rozwijamy wokół $s = 1$
$$g(s) \approx 1 + \tfrac{1}{2}(s-1)^2 + \ldots$$

$$\Gamma(x+1) \approx x^{x+1} e^{-x} \int_0^\infty \exp\left(-\tfrac{x}{2}(s-1)^2\right) ds \simeq x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

wzór Stirlinga.