Rozdział VI

Szeregi Fouriera

Niech $F(z)$ analityczna (jednoznaczna) w pierścieniu $r<|z|<R$.
Jest zatem rozwijalna w szereg Laurenta

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho}\frac{F(\xi)}{(\xi-0)^{n+1}}\,d\xi$$

gdzie $r<\rho<R$

(w dowodzie mieliśmy $\rho=r$ dla $n=-1,-2,\dots$
oraz $\rho=R$ dla $n=0,1,2,\dots$)
ale $f(z)$ analityczne w pierścieniu, więc kontur można dowolnie deformować wewnątrz tego pierścienia).

parametryzujemy kontur przez $\xi=\rho e^{i\varphi'}$

$$d\xi=\rho i e^{i\varphi'}\,d\varphi'$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{F(\rho e^{i\varphi'})}{(\rho e^{i\varphi'})^{n+1}}\,i\rho e^{i\varphi'}\,d\varphi'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(\rho e^{i\varphi'})}{\rho^n e^{in\varphi'}}\,d\varphi'$$

oznaczymy $\quad f(\varphi)\equiv F(\rho e^{i\varphi'}) \quad , \quad z=|z|e^{i\varphi}$

$$f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi')}{\rho^n e^{in\varphi'}}\,d\varphi'\,|z|^n e^{in\varphi}$$

wybieramy $\rho=|z|$

$$f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi')\,e^{-in\varphi'}\,d\varphi'\right)e^{in\varphi}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f(\varphi)\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{in\varphi} \\ A_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi')\,e^{-in\varphi'}\,d\varphi' \\ f(\varphi+2\pi)=f(\varphi) \;\; = \text{okresowa} \end{gathered}}$$

rozwinięcie funkcji okresowej w szereg Fouriera

Szereg Fouriera można zapisać w postaci, w której nie występuje jawnie i. Mamy bowiem

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\cos nx - i \sin nx\right) dx$$

$$\equiv \frac{1}{2} a_n - i \frac{1}{2} b_n.$$

widać, że
$$a_{-n} = a_n$$
$$b_{-n} = -b_n$$

więc
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

gdzie
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

n-ty wyraz szeregu Fouriera nazywa się n-tą harmoniczną funkcji okresowej $f(x)$.

<u>Wniosek:</u> dla funkcji okresowych $f(x)$ generowanych przez funkcję analityczną $F(z)$ w pewnym pierścieniu istnieje jednoznaczne przedstawienie w postaci szeregu Fouriera.

Czy jest szersza klasa funkcji, które można przedstawić w postaci szeregu Fouriera?

Na to pytanie daje odpowiedź:

Twierdzenie Dirichleta

Jeśli funkcja $f(x)$ dla $x \in [0, 2\pi]$

a) jest ciągła poza skończoną liczbą punktów nieciągłości

b) w punktach nieciągłości i na brzegu odcinka $[0, 2\pi]$ ma skok skończony

tzn $\lim_{\epsilon \to 0} |[f(x_0 - \epsilon) - f(x_0 + \epsilon)]| < \infty$

$\lim_{\epsilon \to 0} |f(2\pi - \epsilon) - f(0 + \epsilon)| < \infty$

c) i ma skończoną liczbę ekstremów, tzn $[0, 2\pi]$ można rozbić na skończoną liczbę odcinków, w których $f(x)$ jest monotoniczna

to szereg Fouriera jest zbieżny do

a) $f(x)$ w punktach ciągłości $f(x)$

b) $\lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon)}{2}$ w punktach nieciągłości

c) $\lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{f(\epsilon) + f(2\pi - \epsilon)}{2}$ na końcach $[0, 2\pi]$.

dowód twierdzenia pomijamy.

Zauważmy, że dla funkcji okresowej o okresie 2π przedział x można wybrać dowolnie, np $x \in [x_0, x_0 + 2\pi]$.
Dla funkcji $f(x)$ z okresem T

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{możemy napisać}$$

$$g(x) = f\left(x \frac{T}{2\pi}\right), \quad \text{gdzie } g(x + 2\pi) = f\left((x + 2\pi)\frac{T}{2\pi}\right) =$$

$$= f\left(x \frac{T}{2\pi} + T\right) = f\left(x \frac{T}{2\pi}\right) = g(x)$$

więc $g(x)$ ma już okres 2π.

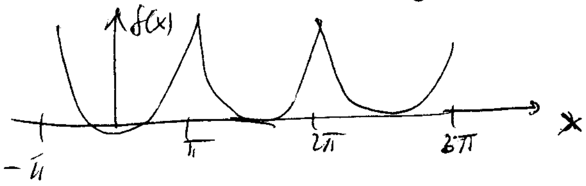
więc

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T} x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi x}{T} + b_n \sin n \frac{2\pi x}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(n \frac{2\pi x}{T}\right) dx, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(n \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

Przykład rozłożyć na szereg Fouriera funkcję okresową ciągłą zdefiniowaną na odcinku $[-\pi, \pi]$ wzorem

$$f(x) = x^2$$



okres wynosi 2π,
Jeśli okresowo zadana na odcinku $[-l, l]$, to okres wynosi $2l$ i wtedy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{l}\right) + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\text{gdzie } a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{l}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

w tym przykładzie funkcja $f(x)$ jest parzysta $\Rightarrow b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2\cos(nx) = (-1)^n\frac{4}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

czyli

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Jeśli położymy $x = \pi$, $\cos n\pi = (-1)^n$, to

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wzór Parsevala

Jeśli funkcja okresowa $f(x)$ jest całkowalna z modułem do kwadratu po swoim okresie, to

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

Dowód:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi x}{T}\right) + b_n \sin\frac{2\pi x n}{T}\right)$$

$$f^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^* \cos\frac{2\pi x m}{T} + b_m^* \sin\frac{2\pi x m}{T}\right)$$

mnożymy stronami, całkujemy po okresie, korzystamy ze wzoru

$$\int_a^{a+T} dx \cos\frac{2\pi x n}{T} \cos\frac{2\pi x m}{T} = \begin{cases} T & m=n=0 \\ T/2 & m=n\neq 0 \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

tak samo dla funkcji sinus

oraz $\int_a^{a+T} dx \cos\frac{2\pi x n}{T} \sin\frac{2\pi x m}{T} = 0$

i dostajemy wzór Parsevala.

Przykład: Funkcja okresowa określona na odcinku $|x| < \frac{1}{2}$ wzorem $f(x) = x^2$. Okres $T=1$.

funkcja symetryczna, $b_n \equiv 0$, natomiast

$$a_0 = 2\int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{6}, \quad a_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} x^2 \cos(2\pi n x) dx = \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

lewa strona wzoru Parsevala $\int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2 dx = \int_{-1/2}^{1/2} x^4 = \frac{2}{5}\frac{1}{2^5} = \frac{1}{80}$.

prawa strona wzoru Parsevala ①

$$\frac{1}{144} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^4 n^4} = \frac{1}{80} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Transformata Fouriera

Warunki Dirichleta dla funkcji rzeczywistej $f(x)$ w przedziale skończonym (a, b)

1° funkcja jest przedziałami monotoniczna w (a, b)

2° ciągła z wyjątkiem skończonej liczby punktów nieciągłości, przy czym

$$f(t_0) = \frac{1}{2}\left(f(t_0 + \varepsilon) + f(t_0 - \varepsilon)\right)$$

Taka funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale domkniętym $[a, b]$ jeśli jest określona na tym przedziale.

Zajmiemy się takimi funkcjami, które spełniają warunki Dirichleta w każdym przedziale skończonym (a, b) na osi liczbowej.

Jeśli dodatkowo $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$ to wówczas zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt < \infty$$

Tw. Fouriera:

Jeśli funkcja spełnia warunki Dirichleta i całka z jej modułu jest skończona, to w punktach, gdzie funkcja jest różniczkowalna zachodzi

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos\left(u\,(y - x)\right) dy$$

dowód trudny, pomijamy

$$\cos u(y - x) = \cos uy \cos ux + \sin uy \sin ux$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos ux \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \cos uy + \sin ux \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin uy\, dy\right] du$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(a(u) \cos ux + b(u) \sin ux\right) du}$$

całka Fouriera

gdzie

$$\boxed{\begin{aligned} a(u) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos uy\, dy \\ b(u) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin uy\, dy \end{aligned}}$$

$a(u)$ parzyste

$b(u)$ - nieparzyste

inne przedstawienie $\cos u(y-x) = \frac{1}{2}\left[e^{iu(y-x)} + e^{-iu(y-x)}\right]$

tutaj zamieniamy $\int_0^\infty du \to \int_{-\infty}^{0} du$

i dostajemy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, e^{-iuy}\right] e^{iux}$$

Definiujemy transformatę Fouriera

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx} \\ \text{i} \quad f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx} \end{aligned}}$$

Uwaga: gdzie 2π to kwestia konwencji.

np $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx}$

lub $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-2\pi ikx}$, $\quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{2\pi ikx}$

<u>Przykład</u>. Transformata Fouriera funkcji ~~[illegible]~~ Gaussa $f(x) = \exp\left(-x^2/\sigma^2\right)$, „szerokość" $= \frac{1}{\sigma}$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\, e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{4} - \frac{1}{\sigma^2}\left(x + \frac{ik\sigma^2}{2}\right)^2\right]$$

$$= \sqrt{\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}}$$

transformata tej funkcji jest też funkcją Gaussa o „szerokości" $\frac{\sigma}{2}$.

zasada nieozn. $\Delta x \cdot \Delta k \simeq \frac{1}{2}$

Przykład: Transformata (trójwymiarowa) potencjału Kulombowskiego.

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3r\, f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

przechodzimy do wsp. kulistych, oś z-tową wzdłuż $\vec{k}$.

wtedy $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$, $f(\vec{r}) = \cancel{A}(- \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

całkę po φ można wykonać.

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} r^2 dr\, f(r)\, e^{-ikr\cos\theta} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 f(r) \int_0^{\pi} d\varphi \sin\varphi\, e^{-ikr\cos\varphi}$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} dr\, r^2 f(r) \frac{\sin kr}{kr}$$

też sferycznie symetryczne.

Dla potencjału Yukawy $f(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}$

$$\tilde{f}(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} dr\, e^{-\lambda r} \sin kr = \frac{4\pi}{\lambda^2 + k^2}$$

w granicy $\lambda \to 0$ dostajemy potencjał Kulombowski.

więc $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{V}(k) = -\frac{Ze^2}{\varepsilon_0 k^2}$

Wzór Parsevala

$$\int dx\, |f(x)|^2 = \int \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2$$

w trzech wymiarach $\int d^3r\, |f(\vec{r})|^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\tilde{f}(\vec{k})|^2$

Własności transformaty Fouriera

1) transformata Fouriera jest przekształceniem liniowym

$$f(x) \to \tilde{f}(k)$$

$$a f(x) + b g(x) \to a \tilde{f}(k) + b \tilde{g}(k)$$

2) przesunięcie funkcji daje pomnożenie transformaty o czynnik fazowy

$$g(x) = f(x-x_0) \Rightarrow \tilde{g}(k) = \tilde{f}(k)\, e^{-ikx_0}$$

3) przeskalowanie argumentu powoduje przeskalowanie transformaty

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \tilde{g}(k) = \frac{1}{|c|} \tilde{f}\left(\frac{k}{c}\right)$$

4) sprzężenie zespolone funkcji

$$g(x) = f^*(x) \Rightarrow \tilde{f}^*(k) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx\right)^* =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, e^{-ikx} dx = \left(\tilde{f}(-k)\right)^*.$$

5) ~~pochodna~~ transformata pochodnej funkcji

$$\cancel{\frac{d\tilde{f}(k)}{dk} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, ik\, e^{ikx} = ik\tilde{f}(k)}$$

$$\widetilde{(f')}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} e^{-ikx} dx = ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx =$$

$$= ik\, \tilde{f}(k)$$

przez części

wyrazy brzegowe znikają, bo $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^n \tilde{f}(k)\, e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

można n potraktować jak liczbę zespoloną pod warunkiem, że całka po prawej stronie istnieje.

6) transformata splotu funkcji

splot $(f * g)\, x = \int dy\, f(x-y)\, g(y) = \int dz\, f(z)\, g(x-z)$

$$\widetilde{(f * g)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (f * g)(x)\, e^{-ikx} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z)\, g(x-z)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, g(x-z)}_{\substack{x-z=y \\ dx = dy}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z)\, e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, g(y)\, e^{-iky} = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k).$$

7) tw. Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2\, dk$$

8) zasada nieoznaczoności

Jeśli $f(x)$ jest skupiona wokół pewnej wartości argumentu, to $\tilde{f}(k)$ jest rozmyta.

definiujemy wartości średnie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$$ normalizacja

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, |f(x)|^2\, dx \qquad \langle k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k\, |\tilde{f}(k)|^2\, dk$$

teraz dyspersje σ_x, σ_k, których kwadraty zdefiniowane są jako

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2\, |f(x)|^2\, dx$$ „szerokości" rozkładu w x

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k - \langle k \rangle)^2\, |\tilde{f}(k)|\, dk$$ w k

dla prostoty możemy przyjąć $\langle x \rangle = 0 = \langle k \rangle$
(tzn. predefiniować x i k, tak żeby wartości średnie wynosiły zero).

$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$

$\sigma_k = \sqrt{\langle k^2 \rangle}$

Rozważmy pomocniczą funkcję

$$0 \leq \mathcal{J}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \left(\frac{d}{dx} + \lambda x \right) f(x) \right|^2$$

przez części

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d}{dx} + \lambda x \right) f^*(x) \right] \left(\frac{d}{dx} + \lambda x \right) f(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^* \left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(\lambda x f(x) \right) + \lambda x \frac{d}{dx} f + \lambda^2 x^2 f \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^* \left[\left(-i \frac{d}{dx} \right)^2 - \lambda + \lambda^2 x^2 \right] f(x)$$

$$= \langle k^2 \rangle - \lambda + \lambda^2 \langle x^2 \rangle \geq 0$$

(bo $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^*(x) \left(-i \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk = \langle k^2 \rangle$

wyróżnik ~~[illegible]~~ nie może być dodatni

czyli $1 - 4 \langle x^2 \rangle \langle k^2 \rangle \leq 0$

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} \sqrt{\langle k^2 \rangle} \geq \frac{1}{2}$$