dla prostoty możemy przyjąć $\langle x\rangle = 0 \langle k\rangle$
(tzn. predefiniować x i k, tak żeby wartości średnie wynosiły zero).

Rozważmy pomocniczą funkcję

$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle}$

$\sigma_k = \sqrt{\langle k^2\rangle}$

$$0 \le J(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \left(\frac{d}{dx} + \lambda x\right) f(x)\right|^2$$

przez części

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d}{dx} + \lambda x\right) f^*(x)\right] \left(\frac{d}{dx} + \lambda x\right) f(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^* \left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\lambda x f(x)\right) + \lambda x \frac{d}{dx} f + \lambda^2 x^2 f \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^* \left[\left(-i\frac{d}{dx}\right)^2 - \lambda + \lambda^2 x^2 \right] f(x)$$

$$= \langle k^2\rangle - \lambda + \lambda^2 \langle x^2\rangle \ge 0$$

(bo $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; f^*(x) \left(-i\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\tilde f(k)|^2 dk = \langle k^2\rangle$

wyróżnik ~~...~~ nie może być dodatni

czyli $1 - 4\langle x^2\rangle\langle k^2\rangle \le 0$

$$\sqrt{\langle x^2\rangle}\sqrt{\langle k^2\rangle} \ge \frac{1}{2}$$

Transformata Fouriera ma bardzo szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach. Jest szczególnie przydatna przy rozwiązywaniu równań różniczkowych.

np. równanie dyfuzji $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$

podstawiając $P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde P(k,t)$

dostajemy

$$\frac{d\tilde P(k,t)}{dt} = -Dk^2 \tilde P(k,t)$$

Na dystrybucję delta Diraca można więc zdefiniować w nast. sposób

$$(\delta_x \mid f) = \int dy\ \delta_x(y)\, f(y) = \int dy\ \delta(x-y)\, f(y) \equiv f(x)$$

Każda „dobra" funkcja całkowalna jest dystrybucją.
Możemy nadać sens delcie Diraca budując jej model przez granicę ciągu dobrze określonych funkcji

Weźmy model delty

$$\delta^{\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, g_\varepsilon(k)\, e^{ikx}$$

gdzie $g_\varepsilon(k)$ tak dobrane, że ta całka istnieje.
Bierzemy $g_\varepsilon(k)$ takie, żeby $\delta^\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta(x)$
tzn $g_\varepsilon(k) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$.

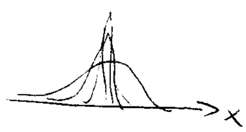
Rozpatrzmy model delty

$$g^{\varepsilon}(k) = e^{-\varepsilon k^2} \qquad \left(\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1 \right.$$

$$\delta^{\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\varepsilon k^2 + ikx} \underbrace{=}_{\text{całka gaussowska}} \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon}}\; e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$$

zauważmy, że $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^\varepsilon(x)\, dx = 1$ niezależnie od wartości ε

i $\delta^\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ \infty & \text{dla } x = 0. \end{cases}$



Jest to często używany model funkcji Diraca

Inne modele delty Diraca

$$g_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon|k|} \quad \longleftrightarrow \quad \delta^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

Elementarnie o dystrybucjach

Przepiszmy całkę Fouriera

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} f(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)} \right]}_{\substack{\equiv \\ \delta(x-y)}} f(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\; \delta(x-y)\; f(y)$$

Wielkość $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}$ wprowadził Dirac i nosi nazwę delty Diraca.

Nie jest to w „zwykłym" sensie funkcja.
30 lat po Diracu Schwartz nadał tej wielkości precyzyjny sens wprowadzając pojęcie dystrybucji.
Pojęcie dystrybucji jest nierozerwalnie związane z tzw przestrzenią funkcji próbnych.
Jest to przestrzeń funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych o zwartym nośniku (gładkie i całkowalne) o wartościach zespolonych.
Wtedy dystrybucję definiuje się jako funkcjonał liniowy na przestrzeni funkcji próbnych o wartościach zespolonych i ciągły. Innymi słowy dystrybucja przyporządkowuje funkcji próbnej liczbę zespoloną i to przyporządkowanie jest liniowe i ciągłe.
Np. dla funkcji rozpatrywaliśmy

$$(f\,|\,g) = \int f(y)\, g(y)\, dy.$$

Różniczkowanie dystrybucji

Definiujemy różniczkowanie stosując wzór całkowania przez części.

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$\langle T', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dT}{dx} \varphi(x)\, dx = T\varphi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

to znika, bo φ próbna

Można więc różniczkować dystrybucję nieskończenie wiele razy.

$$\cancel{\frac{d^n T}{dx}} \quad (T^{(n)} | \varphi) = (-1)^n \int T \frac{d^n\varphi}{dx^n}\, \cancel{dx}$$

Przykład.

definiujemy $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$

$$(\operatorname{sgn}' | \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dx} \varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) \frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{dx}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{d\varphi}{dx}\, dx = -\varphi\Big|_{\infty} + \varphi\Big|_0 + \varphi\Big|_0 - \varphi\Big|_{-\infty}$$

$$= +2\varphi(0) = 2 \int \delta_0(x)\, \varphi(x)\, dx = 2(\delta_0 | \varphi)$$

więc $\cancel{\frac{d}{dx}} \operatorname{sgn}' = 2\delta_0$

Można to też sprawdzić na modelu funkcji sgn i δ

np model $\operatorname{sgn}_\varepsilon(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sgn}_\varepsilon(x) = \frac{d}{dx} \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}\right) = 2 \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = 2\delta_\varepsilon(x).$$

Ważny wzór

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \qquad g(x_i) = 0.$$

x_i – miejsca zerowe g

KONIEC