Zadania na Ćwiczenia z Matematyki II L

SERIA 1

1 WEKTORY I WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY

- wielomian charakterystyczny, krotność pierwiastków $w_F(\lambda)$
- wartości własne macierzy
- wektory własne macierzy
- zagadnienie własne dla macierzy
- tw. Cayley'a-Hamiltona
- spektrum (widmo) macierzy, zależność $\operatorname{Sp} F$ od $\mathbb{K}$

1. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$.

2. Niech $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Zbadać $\operatorname{Sp} F$ gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oraz gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3. Rozwiązać zagadnienie własne dla tzw. klatki Jordana $J(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & o & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

4. Rozwiązać zagadnienie własne dla następujących macierzy:

$$\text{a) } F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } F = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } F = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0, \quad \text{d) } F = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 DIAGONALIZOWALNOŚĆ

- transformacja podobieństwa
- diagonalizowalność macierzy
- transformacja diagonalizująca
- macierze: symetryczne, antysymetryczne, hermitowskie, unitarne, rzutowe, normalne, ortogonalne, nilpotentne

1. Zbadać diagonalizowalność następujących macierzy i podać transformacje diagonalizujące:

$$\text{a) } F = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Podać transformację diagonalizującą F i F^{-1}:

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3 FUNKCJE OD MACIERZY

- metoda wielomianu aproksymacyjnego Hermite'a
- funkcje analityczne macierzy diagonalizowalnych, dowolone funkcje macierzy diagonalizowalnych

1. Znaleźć $\sqrt{A}$ dla macierzy: a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
2. Obliczyć $\sin F$, gdzie $F = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.
3. Niech $F = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Znaleźć F^n, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

4 FORMY KWADRATOWE

- forma kwadratowa
- macierz symetryczna odpowiadająca formie kwadratowej
- postać kanoniczna formy kwadratowej, sygnatura, rząd
- diagonalizacja form kwadratowych: diagonalizacja macierzy symetrycznej, metoda Lagrange'a; transformacja diagonalizująca

1. Sprowadzić formę kwadratową $h(x, y, z) = 3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 2xz$ do postaci kanonicznej dwiema metodami: diagonalizując macierz symetryczną i metoda Lagrange'a. Podać transformację diagonalizująca.
2. Sprowadzić do postaci kanonicznej następujące formy kwadratowe:

   a) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2x_3$

   b) $h(x, y, z) = xy - yz + 2xz$

   Podać rząd i sygnaturę.