# Zadania na Ćwiczenia z Matematyki II L

## SERIA 3

## 1 PRZESTRZENIE WEKTOROWE

- zmiana bazy
- operatory liniowe
- reprezentacja macierzowa operatora liniowego
- jądro i obraz operatora liniowego

1. Dane są dwie bazy w $\mathbb{R}^3$: $v = (v_1, v_2, v_3)$ oraz $v' = (v_1', v_2', v_3')$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1' = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć macierz zmiany bazy $v \longrightarrow v'$ oraz wyznaczyć współrzędne wektora $(w)^{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ w obu bazach. $(w)^{\mathrm{c}}$ oznacza współrzędne wektora w bazie kanonicznej.

2. Dane jest odwzorowanie w bazie kanonicznej

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Podać macierz tego odwzorowania w bazie $\overline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ gdzie

$$\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami wektorowymi odpowiednio z bazami $e = (e_1, e_2)$ i $f = (f_1, f_2, f_3)$. Dane jest odwzorowanie liniowe $F : V \longrightarrow W$ zdefiniowane przez:

a) $\begin{cases} Fe_1 = 2f_1 - f_2 - 2f_3 \\ Fe_2 = f_1 + 2f_2 - f_3 \end{cases}$, $w = 4f_1 - 7f_2 - 4f_3$.

b) $\begin{cases} Fe_1 = f_1 - 2f_2 + f_3 + 3f_4 - f_5 \\ Fe_2 = 2f_1 + f_2 - 2f_3 + 2f_4 - 3f_5 \\ Fe_3 = -2f_1 + 2f_2 + f_3 - 2f_4 + f_5 \end{cases}$, $w = -9f_1 + 2f_2 + 8f_3 - 7f_4 + 8f_5$.

Podać macierz $(F)_e^f$. Sprawdzić czy $w \in \operatorname{Im} F$. Znaleźć $\operatorname{Ker} F$.

4. Niech $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie rzutem prostopadłym na płaszczyznę rozpiętą przez wektory $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Podac macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej.

5. Niech $\mathbb{K}_2[x]$ i $\mathbb{K}_4[x]$ oznaczają przestrzeń wielomianów odpowiednio stopnia $\leqslant 2$ i $\leqslant 4$. Zbadać czy odwzorowanie $T : \mathbb{K}_2[x] \longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ dane przez
$$(Tp)(x) = (x^2 + x + 1)p(x)$$
jest liniowe i podać jego macierz w bazach kanonicznych $e = (1, x, x^2)$ i $f = (1, x, x^2, x^3, x^4)$. Znaleźć $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$, $\dim \operatorname{Ker} T$ oraz $\dim \operatorname{Im} T$.

6. Niech $V$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni wektorowej funkcji ciągłych nad $\mathbb{C}$ o bazie
$$b = (\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x).$$
Operator liniowy $T : V \longrightarrow T$ zadany jest formułą
$$Tf(x) = i\frac{df}{dx}.$$
   a) Zapisać macierz operatora $T$ w bazie $b$. Wyznaczyć $\operatorname{Ker} T$ oraz $\operatorname{Im} T$.
   b) Czy otrzymana macierz jest ortogonalna, unitarna, symetryczna, hermitowska?
   c) Znaleźć wartości własne i wektory własne tej macierzy.
   d) Jakim funkcjom odpowiadają znalezione wektory?