Zadania na Ćwiczenia z Matematyki II L

SERIA 6

1 ZASTOSOWANIA CAŁEK WIELOKROTNYCH

1. Dany jest walec obrotowy o promieniu r i osi obrotu OY. Obliczyć objętość części walca wznoszącej się nad trójkątem OAB, ktory jest połową kwadratu OBAC o boku r, leżącego w płaszczyźnie OXY. (Współrzędne punktów: O $= (0,0)$, A $= (r,r,0)$, B $= (r,0,0)$, C $= (0,r,0)$).

2. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchnią $z^2(a^2 - x^2 - y^2) = 1$ i walcem o tworzącej równoległej do osi OZ, którego przekrój płaszczyzną OXY jest okręgiem $x^2 + y^2 - ax = 0$ $(a > 0)$.

3. Obliczyć pole części powierzchni $2xy - z^2 = 0$ wyciętej przez prostopadłościan, którego podstawa znajduje się w płaszczyźnie OXY, a wierzchołkami jej są punkty A $= (0,0,0)$, B $= (4,0,0)$, C $= (4,9,0)$ i D $= (0,9,0)$.

4. Wyznaczyć moment bezwladności walu w kształcie stożka ściętego. Długość wału wynosi l, promienie podstaw stożka są R_1 i R_2 $(R_1 < R_2)$. Gęstość materiału wynosi ρ.

5. Obliczyć za pomocą calki potrójnej objętość elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, \quad a,b,c > 0.$$

6. Znaleźć masę M prostopadłoscianu $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, wiedząc, że gęstość w punkcie (x,y,z) wynosi $\rho(x,y,z) = x + y + z$.

7. Krzywa $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ dzieli obszar ograniczony okręgiem $x^2 + y^2 - ax = 0$ na trzy części. Obliczyć ich pola.

2 KRZYWOLINIOWE UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH; KRZYWE I POWIERZCHNIE W $\mathbb{R}^3$

1. Współrzędne sferoidy wydłużonej (η,θ,φ), gdzie $0 \leqslant \eta < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, są zdefiniowane wzorami:

$$\begin{aligned} x(\eta,\theta,\varphi) &= a\sinh\eta\sin\theta\cos\varphi, \\ y(\eta,\theta,\varphi) &= a\sinh\eta\sin\theta\sin\varphi, \\ z(\eta,\theta,\varphi) &= a\cosh\eta\cos\theta, \end{aligned}$$

gdzie $a > 0$. Obliczyć jakobian przekształcenia (odwzorowania) $(\eta,\theta,\varphi) \longrightarrow (x,y,z)$ i wykazać, że jest ono lokalnie odwracalne poza punktami osi OZ. Znaleźć przekształcenie odwrotne. Wyznaczyć $\nabla\phi$ we współrzędnych (η,θ,φ).

2. Wykazać, że przekształcenie $(u,v,w) \longrightarrow (x,y,z)$, gdzie $x(u,v,w) = u + v - w + 3$, $y(u,v,w) = 2u - v + w + 2$, $z(u,v,w) = u + 2v + w + 1$ jest odwracalne i znaleźć przekształcenie odwrotne do niego. Znaleźć $\triangle\phi$ we współrzędnych (u,v,w).

3. Przkształcić następujące równanie różniczkowe wprowadzając nowe zmienne:

$$\nabla(\phi\vec{v}) = 0,$$

$$\xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x,$$

gdzie ϕ jest polem skalarnym a $\vec{v} = (1,1,1)$.

4. Mając dane równanie parametryczne krzywej znaleźć jej równanie w postaci $F(x, y) = 0$:

   a) $x(t) = 1 - \sin t$, $y(t) = 2 + \cos t$,
   b) $x(t) = 1 - t$, $y(t) = t^2$.

   Znaleźć wersor styczny $\vec{t}$, wersor normalny $\vec{n}$ do krzywej, $\vec{dr}$ oraz $dl = |\vec{dr}|$.

5. Powierzchnia S sparametryzowana jest w następujący sposób:

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \left(a \operatorname{ch}\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, a \operatorname{ch}\left(\frac{u}{a}\right) \sin v, u\right)$$

   Znaleźć równanie powierzchni S w postaci uwikłanej $F(x, y, z) = 0$. Wyznaczyć wektory styczne do krzywych $u = \text{const.}$ oraz $v = \text{const.}$: ∂_v, ∂_u. Znaleźć $\vec{dS} = \partial_u \times \partial_v$ oraz $dS = |\vec{dS}|$

6. Sparametryzować powierzchnię zadaną równaniem uwikłanym $e^z \cos x - \cos y = 0$ (tzw. powierzchnia Scherka). Znaleźć ∂_u oraz ∂_v. Wyznaczyć $\vec{dS}$. oraz dS.

3 CAŁKI KRZYWOLINIOWE

1. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane

$$\int\limits_{L_i} (x + y)\, dx + y\, dy \quad (i = 1, 2),$$

   gdzie L_1 onacza łuk AB cykloidy o równaniach $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, a L_2 odcinek AB, przy czym podane punkty mają współrzędne: A $= (0, 0)$, B $= (2a\pi, 0)$.

2. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane

$$\int_{L_i} x^2\, dy - 2y\, dx \quad (i = 1, 2),$$

   gdzie L_1 oznacza górny półokrąg AB, a L_2 odcinek AB, przy czym podane punkty mają współrzędne: A $= (0, 0)$, B $= (2, 0)$.

3. Dana jest siła $\vec{F} = (x^3 - y, xy)$. Wyznaczyć jaką pracę trzeba wykonać pokonując tą siłę wzdłuż drogi po łuku paraboli $y^2 = 8x$ od punktu A $= (0, 0)$ do punktu B $= (2, 4)$.