Zadania na Ćwiczenia z Matematyki II L

SERIA 7

1 CAŁKI KRZYWOLINIOWE

1. Obliczyć $\int\limits_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, gdzie Γ jest skierowaną krzywą będącą brzegiem przekroju obszaru $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge z \geqslant 0\}$ płaszczyzną $x - y = 0$.
2. Obliczyć za pomocą całki krzywoliniowej skierowanej pole obszaru ograniczonego kardioidą $\rho(\varphi) = a(1 - \cos\varphi)$.
3. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int\limits_{C} x^2 y\, ds$, gdzie kontur C jest częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.
4. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int\limits_{C} (x + y)ds$, gdzie kontur C jest brzegiem kwadratu $|x| + |y| \leqslant a$, $a > 0$.
5. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywoliniową z pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$, jeśli krzywa Γ zorientowana jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i otacza obszar Ω:
   (a) $\vec{A}(\vec{r}) = y\vec{e}_x + 4x\vec{e}_y$, gdzie Ω jest kwadratem $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$,
   (b) $\vec{A}(\vec{r}) = (2x - y)\vec{e}_x + (x + 3y)\vec{e}_y$, a Ω jest ograniczony elipsą $x^2 + 4y^2 = 4$.
6. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć
$$\int_{\Gamma} e^x[(1 + \cos y)dy + (y - \sin y)dx],$$
gdzie Γ jest krzywą zorientowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i składającą się z odcinka $0 \leqslant x \leqslant \pi$ i wykresu $y(x) = \sin x$.
7. Jak długi jest łuk krzywej $\vec{r}(rt) = \frac{2}{t}\vec{e}_x + 6t\vec{e}_y + 3t^2\vec{e}_z$ zawarty między płaszczyznami $x = 2$ i $x = 1$.
8. Obliczyć krążenie pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$ po krzywej Γ: $\vec{r}(u) = (\cos u, 2, \sin u)$, $u \in [0, 2\pi]$.

2 CAŁKI POWIERZCHNIOWE

1. Obliczyć
$$\int_{H} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$
gdzie $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge z \geqslant 0\}$ jest półsferą zorientowaną na zewnątrz.
2. Obliczyć powierzchnię części walca $x^2 + y^2 = ax$ znajdującą się wewnątrz kuli $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
3. Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{E}(x, y, z) = (x, y, z)$ przez zorientowaną na zewnątrz powierzchnię
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

4. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną

$$\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

gdzie $\vec{B} = (y - z, z - x, x - y)$ a S jest powierzchnią bedącą częścią płaszczyzny $x + z - 1 = 0$ wyciętą przez walec $x^2 + y^2 = 1$, zorientowaną tak, że $\vec{n} \cdot \vec{e}_z > 0$. $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do S zadającym orientację.

5. Obliczyć całkowity ładunek elektryczny rozmieszczony na powierzchni

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 5z - 15 = 0 \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge z \geqslant 0\}.$$

jeśli gęstość ładunku na S jest wprost proporcjonalna do $3x + 2y + 5z$.

3 ANALIZA WEKTOROWA, TW. GAUSSA, TW. STOKESA

1. Obliczyć
   (a) $\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{r})$,
   (b) $\nabla \times (r\vec{B})$,
   (c) $\nabla \times (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}))$, gdzie $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są stałymi wektorami.

2. Znaleźć dywergencję i rotację pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r})$ postaci
   (a) $(x^2 + yz)\vec{e}_x + (y^2 + zx)\vec{e}_y + (z^2 + xy)\vec{e}_z$
   (b) $\frac{1}{r^n}(\vec{e} \times \vec{r})$, gdzie $\vec{e}$ jest stałym wektorem a $n > 0$
   (c) $\frac{x}{yz}\vec{e}_x + \frac{y}{xz}\vec{e}_y + \frac{z}{xy}\vec{e}_z$

3. Sprawdzić, że pole wektorowe $\vec{E}(\vec{r}) = (yz, xz, xy)$ jest bezwirowe i znaleźć takie pole skalarne ϕ, że $E = -\nabla\phi$.

4. Obliczyć całkę

$$\int_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

gdzie S jest zorientowaną na zewnątrz powierzchnią stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ograniczoną płaszczyznami $z = 0$ i $z = h$ tzn.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge 0 \leqslant z \leqslant h\}.$$

Wskazówka: Zamknąć od góry powierzchnię S kołem, zastować twierdzenia Gaussa a następnie odjąć wkład od koła.

5. Obliczyć całkę

$$\int_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

gdzie S jest zorientowaną do wewnątrz powierzchnią boczną sześcianu $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ na dwa sposoby: bezpośrednio oraz korzystając z twierdzenia Gaussa.

6. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć całkę

$$\int_C ydx + zdy + xdz,$$

gdzie $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \wedge x + y + z = 0\}$ jest okręgiem którego orientacja jest zadana przez pole wektorwe $\vec{t}(u) = \partial_u \vec{r}$:

$$\vec{r}(u) = \frac{R}{\sqrt{2 + \sin 2u}} (\cos u, \sin u, -\cos u - \sin u)$$

7. Wykazać, że pole wektorowe $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ o składowych

$$A_x = 4xy^3z^4 - 3y^2 - 16x^3z, \quad A_y = 6x^2y^2z^4 - 6xy + 2z^3, \quad A_z = 8x^2y^3z^3 + 6yz^2 - 4x^4$$

ma potencjał w całej przestrzeni.