I Kolokwium z Matematyki II L

17 kwietnia 2009r.

Uwaga: Każde zadanie proszę rozwiązywać na oddzielnej kartce. Za każde zadanie można uzyskać 6 punktów. Czas pracy: $12^{15} - 15^{00}$.

1. Dana jest macierz $H = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

   a) Znaleźć wartości własne oraz wektory własne H.

   b) Obliczyć $e^{\frac{i\pi}{2}H}$.

2. W przestrzeni unitarnej $V = \langle 1, x, x^2 \rangle$ wielomianów stopnia $\leqslant 2$ dla $x \in [0, +\infty[$ z iloczynem skalarnym $\langle p|q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$ znaleźć bazę ortonormalną metodą Grama-Schmidta.

   Użyteczny wzór: $\int\limits_0^\infty x^n e^x = n!$, $(0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24, \ldots)$.

3. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, takie że

$$Tv = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Znaleźć macierz odwzorowania T w bazie $e = (e_1, e_2, e_3)$ w $\mathbb{R}^3$ i bazie $f = (f_1, f_2)$ w $\mathbb{R}^2$.

   b) Wyznaczyć $\operatorname{Ker} T$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2} & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Pokazać, że funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,0)$ tzn. pokazać, że $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

   b) Obliczyć pochodną kierunkową $\nabla_e f(0,0)$ w kierunku wektora $e = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ funkcji f w punkcie $(0,0)$.

5. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ w obszarze Ω ograniczonym prostymi: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 6$