ZADANIA DOMOWE Z MATEMATYKI II L

SERIA 4

1 FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH

1. Zaznaczyć w układzie współrzędnych dziedziny D_f poniższych funkcji:

$$\text{a) } f(x,y) = \ln(xy+1), \quad \text{b) } f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y), \quad \text{c) } f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}, \quad \text{d) } \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}-1},$$
$$\text{e) } f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-2), \quad \text{f) } f(x,y) = \int_x^y \frac{e^t dt}{t^2-1}.$$

2. Obliczyć granicę (o ile istnieje) funkcji w punkcie P oraz granice iterowane:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, dla $P=(0,0)$,

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{\arcsin(x-y)}$, dla $P=(1,1)$,

   c) $f(x,y) = x^y$, dla $P=(0,0)$,

   d) $f(x,y) = \operatorname{Re}\left[\exp\left(\dfrac{1}{x+iy}\right)\right]$, dla $P=(0,0)$.

3. Obliczyć (jeśli istnieją) granice podwójne oraz odpowiadające im granice iterowane:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^4}{x^2+xy+y^2}$,

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^2}{x^2+xy+y^2}$,

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$.

4. Zbadać przebieg zmienności funkcji
$$z(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$$
wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$. Czy ma ona granicę w tym punkcie?

5. Obliczyć pochodne cząstkowe $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_z f$ funkcji
$$\text{a) } \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^3-y^3}, \quad \text{b) } \sin(\sin(x^2+y^2)), \quad \text{c) } \sqrt{x^y}, \quad \text{d) } (\sin x)^{\ln y}, \quad \text{e) } f(x,y,z) = \sqrt{xy}(3x+2z)^{yz}$$
.

   Sprawdzić, czy $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$.

6. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji:

a) $f(x,y) = |\sin x|^{\ln|y|}$, $D_f = [\mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})]\backslash\{(k\pi, 1)\}$.

b) ** [1] Pokazać, że funkcji f z punktu a) nie da sie przedłużyć do funkcji $\widetilde{f}$ ciągłej na $D_{\widetilde{f}} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$:

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{gdy} \quad (x,y) \in D_f, \\ g = \text{const.} & \text{gdy} \quad (x,y) \in \{(k\pi, 1)\}. \end{cases}$$

c) $f(x,y) = \ln|x + \ln|y||$.

7. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^2}$ we wszystkich punktach, w których te pochodne istnieją.

8. Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych rzędu drugiego $\partial_x^2 f$, $\partial_y^2 f$, $\partial_{xy} f$ oraz $\partial_{yx} f$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2} & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

w punkcie $(0,0)$. Zbadać ciągłość i różniczkowalność (w sensie Frécheta) funkcji f w punkcie $(0,0)$. Na przykładzie funkcji f wykazać, że ciągłość pochodnych cząstkowych nie jest warunkiem koniecznym różniczkowalności funkcji.

9. Wyznaczyć pochodne kierunkowe $\nabla_v f(P)$ w kierunku dowolnego wektora v w punkcie $P = (1,1)$ funkcji $f(x,y) = x^y - y^x$.

10. Dana jest funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Dla jakiej wartości parametru α w punkcie $P = (0,0)$ istnieje pochodna kierunkowa $\nabla_v f(P)$ w kierunku wektora $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? Ile ona wynosi?

b) Dla jakiej wartości parametru α w punkcie $P = (0,0)$ istnieje pochodna kierunkowa $\nabla_v f(P)$ w kierunku wektora $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$? Ile ona wynosi?

11. Obliczyć pochodne cząstkowe i pochodne kierunkowe w kierunku wektora $e = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

w punkcie $O = (0,0)$.

12. Sprawdzić, że

a) zarówno fala stojąca $f(x,t) = \sin(kx)\sin(kct)$ jak i fala biegnąca $f(x,t) = \sin(k(x - ct))$, gdzie k, c = const., spełniają równanie falowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

b) funkcja $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ spełnia dla $(x,y) \neq (0,0)$ równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

13. ** Niech V będzie dowolną unitarną przestrzenią wektorową. Zdefiniujmy funkcję $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \mapsto f(v_1, v_2) = \begin{cases} (||v_1||^2 + ||v_2||^2)^{|\langle v_1|v_2\rangle|^{\frac{3}{2}}}, & \text{gdy} \quad ||v_1||^2 + ||v_2||^2 > 0, \\ 1, & \text{gdy} \quad v_1 = v_2 = \mathbb{0}. \end{cases}$$

[1] Dwie gwiazdki ** oznaczają, że zadanie jest trudne, nieobowiązkowe.

Pokazać, że f jest różniczkowalna w sensie Frécheta w $(\mathbb{0}, \mathbb{0})$.

Uwaga 1: Zadanie jest dosyć trudne, ale dowód różniczkowalności jest bardzo podobny do dowodu w jednym z zadań omawianych na ćwiczeniach.

Uwaga 2: O przestrzeni unitarnej V nic nie zakładamy, więc może być ona nieskończenie wymiarowa. Mimo to dowód różniczkowalności nie jest bardzo trudny.

14. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni:

    a) $z = x^3 - 2x^2y + 3y^2 - 5x$ w punkcie $(x, y, z) = (1, 1, -3)$,

    b) $x^3 + y^3 + z^3 - 36 = 0$ w punkcie $(x, y, z) = (2, 1, 3)$.

15. Rozwinąć w szereg Taylora do czwartego rzędu poniższe funkcje wokół punktu $P = (0, 0)$:

$$\text{a) } \arcsin(x \sin y), \quad \text{b) } \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad \text{c) } \operatorname{Re}(e^{x+iy}).$$