Доклады Академии наук СССР
1959. Том 126, № 6

МАТЕМАТИКА

О. В. БЕСОВ

О НЕКОТОРОМ СЕМЕЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ПРОДОЛЖЕНИЯ

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 III 1959*)

В этой заметке мы рассматриваем семейство $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функциональных пространств. Отдельное функциональное пространство $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ задается произвольной системой чисел p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, θ $(1 \leqslant \theta < \infty)$ и $r_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Мы показываем, что для $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ имеют место теоремы вложения, формулируемые в точности так же, как теоремы С. М. Никольского для введенных им пространств $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$. В то же время пространства $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ интересны тем, что они, в частности, при $p = 2$ и $r_1 = \ldots = r_n = l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ совпадают с пространствами С. Л. Соболева; при $p = 2$ и произвольных $r_i > 0$, а также в некоторых случаях при $1 < p < \infty$ — с пространствами, рассмотренными Л. Н. Слободецким.

Пусть R_n обозначает n-мерное пространство точек, $\mathbf{p} = (x_1, \ldots, x_n)$, и пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{p}) \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, т. е.

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \int_{R_n} |f(\mathbf{p})|^p dv \right\}^{1/p} < \infty \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup_{\mathbf{p} \in R_n} |f(\mathbf{p})| < \infty.$$

Обозначим

$$E_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(f)_p = \inf_{g_{\nu_1,\ldots,\nu_n}} \|f - g_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\|_{L_p},$$

где нижняя грань распространена на всевозможные целые функции $g_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$ соответственно по $x_1, \ldots, x_n$. Положим еще

$$\omega_k(f, t\mathbf{e}_i)_p = \sup_{|h| \leqslant t} \|\Delta_{x_i}^k(f, h)\|_{L_p} = \sup_{|h| \leqslant t} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu f(\mathbf{p} + \nu h \mathbf{e}_i) \right\|_{L_p},$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичный вектор, направленный по оси x_i. Пусть $\theta = \theta(p) \geqslant 1$ — неубывающая для $1 \leqslant p < \infty$ функция. Если $\lim\limits_{p\to\infty} \theta(p) = A < \infty$, то будем считать, что $\theta(p)$ определена и при $p = \infty$, причем так, что $A \leqslant \theta(\infty) < \infty$. Пусть также $r_i > 0$, $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$, где $\bar{r}_i$ — целое, $0 < \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение. Будем говорить, что функция f принадлежит функциональному пространству $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$, если она имеет интегрируемые в степени p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ на R_n частные, обобщенные в смысле С. Л. Соболева, несмешанные производные $\partial^k f / \partial x_i^k$ $(k = 0, 1, \ldots, \bar{r}_i;\ i = 1, 2, \ldots, n)$

и при этом

$$\|f\|B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)} = \|f\|_L + \sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^1 \frac{\omega_{1+[\alpha\ ]}^{\theta}\left(\partial^{\bar{r}_i} f/\partial x_i^{\bar{r}_i},\ te_i\right)_p}{t^{\theta\alpha_i+1}}\,dt\right\}^{1/\theta} < \infty.$$

Теорема 1. *Число*

$$\|f\|_{L_p} + \left\{\sum_{k=0}^{\infty} b^{k\theta} E^{\theta}_{a_1^k,\ldots,a_n^k}(f)_p\right\}^{1/\theta},$$

где $a_i^{r_i} = b > 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, *является нормой в пространстве* $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$, *эквивалентной норме* $\|f\|_{B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}}$.

При доказательстве этой теоремы используется представление функций в виде ряда, построенного с помощью целых функций наилучшего приближения, оценки С. М. Никольского ((1), стр. 248) и А. С. Джафарова (3). Теорема 1 позволяет свести изучение пространств $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ к изучению характера убывания наилучших приближений функций, подобно тому как это сделано у С. М. Никольского в (1, 2) для пространств $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$.

Теорема 2. *Пространства* $B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ *являются B-пространствами.*

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)\sum_{1}^{m}\frac{1}{r_i} - \frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_i} - \sum_{1}^{n}\frac{\lambda_i}{r_i} > 0.$

Тогда, если $f(x_1, \ldots, x_n) \in B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}$, *то*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\partial^{\lambda}}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}} f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0) \in B_{p',\theta'}^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}$$

при любых фиксированных $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$, *где* $\theta' = \theta(p')$, $\rho_i = r_i\varkappa$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *причем имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{B_{p',\theta'}^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}} \leqslant c\|f\|_{B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}},$$

где c *не зависит от* f.

При доказательстве этой теоремы существенно используются неравенства С. М. Никольского ((1), стр. 248, 252 и 254).

Теорема 4. *Пусть заданы положительные числа* r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и всевозможные системы* (λ) *неотрицательных целых чисел* $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$, *для которых*

$$\varkappa^{(\lambda)} = 1 - \sum_{j=m+1}^{n}\frac{\lambda_j}{r_j} - \frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{r_j} > 0.$$

Пусть, кроме того, каждой системе (λ) *приведена в соответствие функция* m *переменных* $\varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m) \in B_{p,\theta}^{(\rho_1^{(\lambda)},\ldots,\rho_m^{(\lambda)})}$, $\rho_i^{(\lambda)} = r_i\varkappa^{(\lambda)}$.

Тогда можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ *от* n *переменных, обладающую следующими свойствами:*

$$f \in B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}, \quad \frac{\partial^{\lambda} f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}} = \varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m),$$

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{(r_1,\ldots,r_n)}} \leqslant c\sum_{(\lambda)}\|\varphi_{(\lambda)}\|_{B_{p,\theta}^{(\rho_1^{(\lambda)},\ldots,\rho_m^{(\lambda)})}},$$

где c *не зависит от функций* $\varphi_{(\lambda)}$.

Доказательство теоремы 4 проводится методом С. М. Никольского — представления функции суммой ряда и продолжения каждого члена ряда (см. ([2]), стр. 296).

Теорема 5. *Пространство* $B_{2,2}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ *совпадает с точностью до эквивалентности норм с пространством* $W_{x_1, \ldots, x_n, 2}^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n)$ *Соболева (по терминологии* ([4])).

Отсюда следует, что теоремы 3 и 4 содержат как частный случай теоремы Л. Н. Слободецкого для пространств $W_{x_1, \ldots, x_n, 2}^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n)$.

Теорема 6. *Пусть* l — *натуральное число,* $1 < p < \infty$, $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in W_p^{(l)}(0 < x_n < 1)$.

Тогда при $k = 0, 1, \ldots, l-1$ *нормальные производные* $\partial^k f / \partial x_n^k$ *при* $x_n = 0$ *как функции* $x_1, \ldots, x_{n-1}$ *принадлежат пространствам* $B_{p,p}^{\left(l-k-\frac{1}{p}, \ldots, l-k-\frac{1}{p}\right)}$. *При этом*

$$\left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k} \right\|_{B_{p,p}^{\left(l-k-\frac{1}{p}, \ldots, l-k-\frac{1}{p}\right)}} \leqslant c \| f \|_{W_p^{(l)}(0<x_n<1)},$$

где c *не зависит от* f.

Замечание 1. Верно и обратное утверждение (см. ([6, 7])).

Теоремы 6 и 3 дают возможность охарактеризовать дифференциальные свойства функции $f \in W_p^{(l)}(R_n)$ на гиперплоскости m измерений ($m \leqslant n-1$), где m определяется в соответствии с условиями этих теорем.

Замечание 2. Все теоремы сохраняются, если вместо $B_{p,\theta}^{(r_1, \ldots, r_n)}$ рассматривать пространства периодических по всем переменным функций с соответствующим образом введенной нормой и наилучшие приближения при помощи тригонометрических полиномов.

Полученные результаты могут быть соответствующим образом распространены на некоторый класс областей n-мерного пространства.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 III 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **38**, 244 (1951). [2] С. М. Никольский, Матем. сборн., **33** (75), 2, 261 (1953). [3] А. С. Джафаров, Тр. Азерб. гос. пед. инст., **2**, 110 (1955). [4] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **118**, № 2, 243 (1958). [5] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **120**, № 3, 468 (1958). [6] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **123**, № 4, 616 (1958). [7] E. Gagliardo, Rend. Sem. Mat. di Padova, **27** (1957).