关于Orlicz空间的端点与严格凸

陈述涛 申亚权

本文首先给出Orlicz序列空间（关于Orlicz范数）的端点与严格凸的判别准则，然后解决文〔1〕提出的由Orlicz函数空间的端点判据讨论其严格凸性及端点的存在性问题。

设 l_M^* 为N函数M(u)生成的Orlicz序列空间，$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l_M^*$ 的模定义为

$$\rho_M(x)=\sum_{n=1}^{\infty}M(x_n)$$

x的范数定义为

$$\|x\|_M=\sup\{\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n: y=(y_1, y_2, \cdots)\in l_N^*, \rho_N(y)\leqslant 1\}$$

其中N(v)为M(u)的余函数。

仿照函数空间的情形〔2〕，可以证明

定理1　设 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l_M^*$ 若存在 $k_0>0$ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}N[p(k_0|x_n|)]=1$$

则

$$\|u\|_M=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot p(k_0|x_n|)$$

其中p(u)为M(u)的右导数。

定理2　对任何 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l_M^*$，

$$\|x\|_M=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(kx_n))$$

对任何 $x\in l_M^*$，记

$$K_x^*=\inf\{k>0: \sum_{n=1}^{\infty}N[p(k|x_n|)]\geqslant 1\}$$

$$K_x^{**}=\sup\{k>0: \sum_{n=1}^{\infty}N[p(k|x_n|)]\leqslant 1\}$$

易证 $K_x^*\leqslant K_x^{**}$

定理3　当且仅当 $k\in[K_x^*, K_x^{**}]$ 时

$$\|x\|_M=\frac{1}{k}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(kx_n))$$

对于实数 u_0，　若

$$M(u_0)<\frac{1}{2}(M(u_0-\varepsilon)+M(u_0+\varepsilon))$$

对所有$\varepsilon>0$成立，就说u_0为$M(u)$的一个严格凸点。$M(u)$的严格凸点全体记为S_M。

定理4　对任何$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l_M^*$，$\|x\|_M=1$，$x$为$l_M^*$闭单位球端点的充要条件是对每一$k\in[K_x^*, K_x^{**}]$，均有$kx_n\in S_M$，$(n=1, 2, \cdots)$

证明：充分性。任取$y=(y_1, y_2, \cdots)$，$z=(z_1, z_2, \cdots)\in l_M^*$，$\|y\|_M=\|z\|_M=1$，$\frac{y+z}{2}=x$，需证$y=z$。

由定理3，存在$k_1, k_2>1$使

$$1=\|y\|_M=\frac{1}{k_1}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(k_1y_n))$$

$$1=\|z\|_M=\frac{1}{k_2}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(k_2z_n))$$

于是由定理2及$M(u)$的凸性

$$\begin{aligned}2&=\|y\|_M+\|z\|_M\\&=\frac{1}{k_1}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(k_1y_n))+\frac{1}{k_2}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(k_2z_n))\\&=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}[1+\frac{k_2}{k_1+k_2}\sum_{n=1}^{\infty}M(k_1y_n)+\frac{k_1}{k_2+k_1}\sum_{n=1}^{\infty}M(k_2z_n)]\\&\geqslant\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}M(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{y_n+z_n}{2})]\\&=2\cdot\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}[1+\sum_{n=1}^{\infty}M(\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}x_n)]\\&\geqslant2\|x\|_M=2\end{aligned}\tag{1}$$

故上面各式均相等且$k_0=\frac{2k_1k_2}{k_1+k_2}\in[K_x^*, K_x^{**}]$，从而由条件$k_0x_n\in S_M$ $(n=1, 2, \cdots)$，又由（1）

$$\frac{k_2}{k_1+k_2}M(k_1y_n)+\frac{k_1}{k_2+k_1}M(k_2z_n)=M(k_0x_n)$$

对所有$n=1, 2, \cdots$成立，故对一切$n\geqslant1$必有$k_1y_n=k_2z_n=k_0x_n$。于是$\|k_1y\|_M=\|k_2z\|_M=\|k_0x\|_M$，即$k_1=k_2=k_0$，进而得到$y_n=z_n=x_n$，$(n=1, 2, \cdots)$ 即$y=z=x$。

必要性，若不然，则有$k_0\in[K_x^*, K_x^{**}]$及$n_0\geqslant1$使$k_0x_{n_0}\overline{\in}S_M$，这说明存在$\varepsilon>0$使$M(u)$在$[k_0x_{n_0}-\varepsilon, k_0x_{n_0}+\varepsilon]$上为直线段：

$$M(u)=au+b\tag{2}$$

由定理3，

$$1=\|x\|_M=\frac{1}{k_0}(1+\sum_{n=1}^{\infty}M(k_0x_n))$$

故由（2）

$$k_0=1+\sum_{n\neq n_0}M(k_0x_n)+ak_0xn_0+b$$

或

$$k_0 = \frac{1 + b + \sum\limits_{n \neq n_0} M(k_0 x_n)}{1 - a x_{n_0}} \tag{3}$$

记

$$k_1(y) = \frac{1 + b + \sum\limits_{n \neq n_0} M(k_0 x_n)}{1 - a y} \tag{4}$$

$$k_2(y) = \frac{1 + b + \sum\limits_{n \neq n_0} M(k_0 x_n)}{1 - 2a x_{n_0} + a y} \tag{5}$$

由（3），$y \to x_{n_0}$时必有$k_1(y) \to k_0$，$k_2(y) \to k_0$由$k_1(y)$与$k_2(y)$的连续性，知存在充分接近x_{n_0}的$y_{n_0} > x_{n_0}$使

$$k_1(y_{n_0}) \cdot y_{n_0},\ k_2(y_{n_0}) \cdot y_{n_0} \in [k_0 x_{n_0} - \varepsilon/2,\ k_0 x_{n_0} + \varepsilon/2] \tag{6}$$

命

$$\begin{aligned} & k_1 = k_1(y_{n_0}),\ k_2 = k_2(y_{n_0}),\quad y_n = \frac{k_0}{k_1} x_n,\quad z_n = \frac{k_0}{k_1} x_n,\quad (n \neq n_0) \\ & z_{n_0} = 2x_{n_0} - y_{n_0} \end{aligned} \tag{7}$$

再记$y = (y_1, y_2, \cdots)$，$z = (z_1, z_2, \cdots)$，则由$y_{n_0} > x_{n_0}$知$y \neq z$，又由（2），（3），（4），$n \neq n_0$时

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2 - 2a x_{n_0}}{1 + b + \sum\limits_{n \neq n_0} M(k_0 x_{n_0})} = \frac{2}{k_0}$$

所以$n \neq n_0$时由（7）

$$\frac{y_n + z_n}{2} = \frac{k_0}{2}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) x_n = x_n$$

又由（7），$z_{n_0} = 2x_{n_0} - y_{n_0}$，故$x_{n_0} = \dfrac{y_{n_0} + z_{n_0}}{2}$，于是$x = \dfrac{y + z}{2}$，今证$\|y\|_M = \|z\|_M = 1$，从而与$x$为$l_M^*$闭单位球端点矛盾。

因$k_0 \in [K_x^*, K_x^{**}]$，由定义，对任何$\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} N[p((1+\alpha) k_0 |x_n|)] \geqslant 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} N[p(1-\alpha) k_0 |x_n|)] \leqslant 1$$

又$n \neq n_0$时$k_1 y_n = k_0 x_n$且α充分小时由（2），（6）

$$p((1 \pm \alpha) k_1 y_{n_0}) = a = p((1 \pm \alpha) k_0 x_{n_0})$$

故对任何充分小的$\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} N[p((1+\alpha) k_1 y_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} N[p((1+\alpha) k_0 x_n)] \geqslant 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} N[p((1+\alpha) k_1 y_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} N[p((1-\alpha) k_0 x_n)] \leqslant 1$$

这说明$k_1 \in [K_y^*, K_y^{**}]$于是由定理3及（2），（4），知$\|y\|_M = 1$。同理由（5），

（7）可证 $\|z\|_M=1$。

定理5 l_M^*严格凸的充要条件是$M(u)$在$[0,u_0]$上严格凸。其中$u_0=q(N^{-1}(1))$，$q(v)$为$M(u)$的余函数$N(v)$的右导数。

证明、充分性，首先注意

$$u_0=q(N^{-1}(1))=\sup\{t>0: p(t)\leqslant N^{-1}(1)\}$$
$$=\sup\{t>0: N(p(t))\leqslant 1\} \tag{8}$$

对任何 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l_M^*$，$\|x\|_M=1$，需证$x$为$l_M^*$的闭单位球的端点。由定理4，只需证明$k\in[K_x^*, K_x^{**}]$时，$kx_n\in S_M$ $(n=1, 2, \cdots)$，由条件只需证明 $k|x_n|\leqslant u_0$。显然$x_n=0$时上式成立。今设$x_n\neq 0$，由（8）

$$K_x^{**}=\sup\{k>0: \sum_{n=1}^{\infty} N[p(k|x_n|)]\leqslant 1\}$$
$$\leqslant \sup\{k>0: N[p(k|x_n|)]\leqslant 1\}$$
$$=\frac{1}{|x_n|}\sup\{k|x_n|>0: N[p(k|x_n|)]\leqslant 1\}$$
$$=\frac{1}{|x_n|}u_0$$

故 $k|x_n|\leqslant K_x^{**}, |x_n|\leqslant u_0$。充分性证完。

必要性。若不然，$M(u)$在某区间$[a, b]\subset[0, u_0]$上为直线段。因对任何正数$\alpha<u_0$，由（8），$N(p(\alpha))\leqslant 1$，故

$$v_0=\sup\{v\geqslant 0: N(p(\frac{b+a}{2}))+N(p(v))\leqslant 1\} \tag{9}$$

是存在的。命

$$k_0=1+M(\frac{b+a}{2})+M(v_0) \tag{10}$$

$u_1=\frac{b+a}{2k_0}$并取$u_2\geqslant 0$使$k_0u_2=v_0$，定义$x=(u_1, u_2, 0, 0, \cdots)$。我们验证 $\|x\|_M=1$ 但 x 不是 l_M^*闭单位球的端点，从而与l_M^*严格凸矛盾。

首先，由（9）及$p(u)$在$[a、b]$上为常数，对任何充分小$\varepsilon>0$，

$$N[p(1+\varepsilon)k_0u_1)]+N[p(1+\varepsilon)k_0u_2)]$$
$$=N[p(\frac{b+a}{2})]+N[p((1+\varepsilon)v_0)]\geqslant 1$$
$$N[p(1-\varepsilon)k_0u_1)]+N[p((1-\varepsilon)k_0u_2)]$$
$$=N[p(\frac{b+a}{2})]+N[p((1-\varepsilon)v_0)]\leqslant 1$$

这表示 $k_0\in[K_x^*, K_x^{**}]$，故由定理3及（10）

$$\|u\|_M=\frac{1}{k_0}(1+M(k_0u_1)+M(k_0u_2))$$
$$=\frac{1}{k_0}(1+M(\frac{b+a}{2})+M(v_0))$$
$$=1$$

但因$k_0u_1 \in [a, b]$，故$k_0u_1 \overline{\in} S_M$，从而由定理4，x不是$l_M^*$闭单位球的端点，矛盾。

对于Orlicz函数空间L_M^*的端点(关于Orlicz范数$\|\cdot\|_M$)，〔1〕曾得到

命题 $x \in L_M^*$，$\|x\|_M = 1$为L_M^*闭单位球K端点的充要条件是对任何$k \in [K^*, K^{**}]$，集合$G(ku(t)) \overline{\in} S_M)$为零测度集。

该文最后说，利用此命题不易讨论L_M^*的严格凸和端点的存在性问题。我们指出，由上述命题可以得到如下两个结果。

推论1，Orlicz空间$(L_M^*, \|\cdot\|_M)$严格凸的充要条件是$M(u)$严格凸。

证明：充分性。由于$M(u)$严格凸，对于任何$k>0$及$u \in L_M^*$，有$G(ku \overline{\in} S_M)$为零集，故$\|u\|_M = 1$时必为K的端点，从而$(L_M^*, \|\cdot\|_M)$严格凸。

必要性。若$M(u)$非严格凸，便有$u_0 \overline{\in} S_M$。取$E_1 \subset G$使$0 < mesE < mesG$，且$N[p)|v_0|)]mesE_1 \leqslant 1$。再取$u_1 > 0$使$N[p(u_1)]mes(G/E_1) \geqslant 1$。然后选$E_2 \subset G/E_1$使得

$$N(p(u_1)mesE_2 = 1 - N(p(|u_0|))mesE_1 \tag{11}$$

命

$$k = p(|u_0|)|u_0|mesE_1 + u_1p(u_1)mesE_2 \tag{12}$$

$v_1 = \frac{|u_0|}{k}$，$v_2 = \frac{u_1}{k}$。定义$u(t) = v_1\chi_{E1}(t) + v_2\chi_{E2}(t)$则由(11)式

$$\int_G N[p(ku(t))]dt = \int_{E1} N[p(u_0)]dt + \int_{E2} N[p(u_1)]dt = 1 \tag{13}$$

从而据文〔2〕定理2·1和(12)式

$$\|u\|_M = \int_G u(t)p(ku(t))dt = p(|u_0|)\frac{|u_0|}{k}mesE_1 + p(u_1)\frac{u_1}{k}mesE_2 = 1$$

又据(13)式及文〔2〕定理2、1的证明

$$\|u\|_M = \frac{1}{k}[1 + \int_G M(ku(t)dt$$

故$k \in [K^*, K^{**}]$，但

$$mesG(ku(t) \overline{\in} S_M \geqslant mseE_1(ku(t) \overline{\in} S_M) = mesE_1 > 0$$

由文〔1〕定理1，u不是闭单位球K的端点。矛盾。

推论2，任何Orlicz空间$(L_M^*, \|\cdot\|_M)$的闭单位球K均有端点。

证明：设$M(u)$为直线段的所有表达式为$p_iu + q_i$，$i = 1, 2, \cdots$。任取G的一有限正测度子集G_0使$1 + q_imG_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots$，再取一充分大的正数u_0，使得$\|u_0\chi_{G0}\|_M = 1$，我们证明$u(t) = u_0\chi_{G0}(t)$为K的端点。

若不然，存在$k>0$使得$G(ku \overline{\in} S_M)$非零集且

$$1 = \|u\|_M = \frac{1}{k}[1 + \int_G M(ku)\,dt] = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}M(ku_0)mG_0$$

由于$u(t)$只取两个值u_0和0，而显然$0\in S_M$，于是$G(ku\in\overline{S_M})$非零集意味着存在$(a, b)\subset S_M^c$使得$ku_0\in(a, b)$。设$M(u)$在(a, b)上为$M(u)=pu+q$，于是

$$1=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}(pku_0+q)mG_0$$

$$=\frac{1}{k}(1+qmG_0)+pu_0mG_0$$

不妨设$1+qmG_0>0$，因$ku_0\in(a, b)$，所以可选到$k'>k$使得$k'u_0\in(a, b)$，于是

$$1=\|u\|_M=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku)dt\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{k'}\left[1+\int_G M(k'u)dt\right]$$

$$=\frac{1}{k'}(1+qmG_0)+pu_0mG_0$$

$$<\frac{1}{k}(1+qmG_0)+pu_0mG_0$$

$$=\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku)dt\right.$$

$$=1$$

矛盾。换言之，u为K的端点。

参 考 文 献

〔1〕苏炳元，朱浩华，Orlicz空间的端点，中山大学学报（1983）

〔2〕吴从炘，王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科技出版社（1983）