

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

МУРАТОВ МУСТАФА АБДУРШИТОВИЧ

ИДЕАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В КОЛЬЦЕ ИЗМЕРИМЫХ
ОПЕРАТОРОВ

ОИ.ОИ.ОИ - математический анализ

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научные руководители -

академик АН УзССР, доктор физико-
математических наук, профессор

Т.А.САРЫМСАКОВ

доктор физико-математических наук,
профессор Ю.М.СМИРНОВ

Ташкент - 1979

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ	3
§ 0. Предварительные сведения	9
ГЛАВА I. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ СХОДИМОСТИ В	
КОЛЬЦЕ $\mathfrak{S}(\alpha)$	22
§ I.1. Сходимости почти всюду и по мере	
в кольце $\mathfrak{S}(\alpha)$	22
§ I.2. Порядковые сходимости в кольце $\mathfrak{S}(\alpha)$	47
ГЛАВА II. ИДЕАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В	
КОЛЬЦЕ $\mathfrak{S}(\alpha)$	58
§ 2.1. Определение и основные свойства	
идеальных подпространств	58
§ 2.2. Линейные функционалы в идеальных	
пространствах	83
§ 2.3. Пространства Орлича измеримых	
операторов	90
§ 2.4. Пространства Орлича с (Δ_2) - условием Π_2	
ЛИТЕРАТУРА	127

В В Е Д Е Н И Е

Изучение алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве было начато в 30–40-х годах в серии основополагающих работ Дж. фон Неймана и Ф.Дж.Мюррея [50], [51], [52], [57], в которых были исследованы слабо-замкнутые подалгебры алгебры $B(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , названные впоследствии алгебрами фон Неймана или W^* -алгебрами.

Важный класс равномерно замкнутых подалгебр алгебры $B(H)$ был рассмотрен в работе И.М.Гельфанда и М.А.Наймарка [5] и позднее И.Е.Сигалом [70]. Было показано, что такие алгебры операторов (C^* -алгебры) можно описать с помощью простой системы аксиом в рамках общей теории нормированных алгебр с инволюцией.

Еще раньше, в конце 20-х – начале 30-х годов в работах Дж. фон Неймана [55], [56] и М.Стоуна [73] было начато систематическое изучение неограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Исследования в указанных направлениях возникли в связи с попытками строгого математического обоснования квантовой механики. К настоящему времени эти исследования получили значительное развитие и занимают центральное место в аппарате квантовой механики, статистической физики и теории поля.

С появления работ Дж.фон Неймана [56] и И.Е.Сигала [71] было положено начало в изучении колец неограниченных

операторов. И.Е.Сигалом было введено кольцо $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, которое является естественным некоммутативным аналогом кольца измеримых функций на пространстве с мерой.

Результаты работ И.Е.Сигала [71] и В.Ф.Стайнспринга [72] позволили получить некоммутативное обобщение классической теории меры и интегрирования. За последние два десятилетия в этом направлении получен целый ряд новых результатов [54], [61], [62], [63], [64], [74], [75], [76], [77].

Настоящая работа также принадлежит к указанному кругу вопросов. Основные результаты диссертации относятся к следующим направлениям:

1. Выяснение взаимосвязей между различными видами сходимости в кольце $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$.

2. Изучение идеальных подпространств кольца $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

Понятие сходимости почти всюду было введено И.Е.Сигалом в [71]. Там же была неявно введена и сходимость по мере как звездная к сходимости почти всюду. Изучению соотношений между этими сходимостями, а также рассмотрению топологии сходимости по мере, посвящены работы многих авторов [54], [60], [67], [68], [78].

Результаты первой части диссертации (глава I) связаны с изучением порядковых сходимостей: (0) – сходимости и сходимости с регулятором в кольце $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Для изучения связей между этими сходимостями, сходимостями почти всюду и по мере оказалось необходимым ввести понятия двусторонних сходимостей почти всюду и по мере.

Приведем основные результаты первой главы.

В § I.1 вводятся понятия двусторонних сходимостей почти всюду и по мере, изучаются их свойства, устанавливается связь между собой и с односторонними сходимостями почти всюду и по мере. В частности, доказано совпадение топологий односторонней и двусторонней сходимости по мере и найдены необходимые и достаточные условия эквивалентности двусторонней и односторонней сходимостей почти всюду, а также - двусторонней сходимости почти всюду и сходимости по мере.

В § I.2 рассматриваются (0) - сходимость и сходимость с регулятором, определяемые естественным образом на эрмитовой части кольца $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, и устанавливается связь между этими порядковыми сходимостями и двусторонними сходимостями почти всюду и по мере. Важно отметить, что эрмитова часть кольца $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ некоммутативна, не является решеткой, что в значительной степени усложняет изучение свойств порядковых сходимостей в этом случае. Наиболее важными результатами этого параграфа являются теоремы, утверждающие, что для ограниченных последовательностей в $\mathcal{A}$ (соответственно, в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$) (0) - сходимость в $\mathcal{A}$ (соответственно, в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$) эквивалентна двусторонней сходимости почти всюду.

Во второй части диссертации (глава 2) рассматриваются нормированные идеальные подпространства кольца $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Как известно, изучение частично упорядоченных нормированных пространств (т.е. нормированных пространств с выделенным конусом положительных элементов), является одним из традиционных направлений функционального анализа. Значительный вклад в этом направлении был сделан М.Г.Крейном, М.А.Рутманом; И.А.Красносельским, П.П.Забрейко, В.Я.Стеценко, Х.Шеффером [10], [21], [22], [36], [37], исследования которых связаны в первую

очередь со спектральными свойствами операторов и решением операторных уравнений.

Наиболее продвинутой частью теории частично упорядоченных нормированных пространств является теория нормированных решеток, в частности, условно полных нормированных решеток (KN - пространств). Последняя представляет собой ветвь общей теории условно полных векторных решеток (K - пространств), основы которой были заложены в 30-х годах Л.В. Канторовичем [11], [12], [13], [14] и в дальнейшем получившей развитие в работах Б.З. Вулиха, А.Г. Пинскера, А.И. Юдина, Г.П. Акилова и др. (см. [3], [15], [16], [53]).

Важнейшим классом условно полных нормированных решеток является класс идеальных пространств кольца S всех измеримых функций на пространстве с мерой. Этот класс содержит многие важные пространства, рассматриваемые в анализе (пространства L_p , Орлича, Лоренца, Марцинкевича, со смешанной нормой). С другой стороны, изучение идеальных подпространств кольца измеримых функций в значительной мере стимулировало развитие общей теории условно полных нормированных решеток (см. [2], [8], [9]^x, [24], [25], [45], [80]).

В этом плане возникает необходимость введения и изучения класса нормированных идеальных подпространств кольца измеримых операторов $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$. Эти пространства являются частично упорядоченными нормированными пространствами относительно порядка, определяемого конусом положительных операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, причем они, так же, как и само кольцо $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, не являются решетками в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ некоммутативна.

x) Более подробная библиография приведена в [15]

Примерами таких пространств в кольце $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ служат некоммутативные пространства $L_p(\mathcal{A}, m)$ m - интегрируемых с p -й степенью операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, где m - точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$. Пространства $L_1(\mathcal{A}, m)$ и $L_2(\mathcal{A}, m)$ были введены и изучены И.Е.Сигалом [71], пространства $L_p(\mathcal{A}, m)$ - Ж.Диксмье [41], [42] (см. также [79]).

В работах В.И.Овчинникова [29], [30] были определены и изучены симметричные идеальные банаховы подпространства в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Этот класс содержит пространства $L_p(\mathcal{A}, m)$ и в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, совпадает с классом симметричных идеальных банаховых пространств измеримых функций, теория которых построена в работах [33], [34], [35], [46], [47], [48], [49].

Во второй главе диссертации вводятся и изучаются общие, не обязательно симметричные, идеальные нормированные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$. Объектом нашего исследования является изучение различных порядковых свойств нормы в таких пространствах и подпространствах линейных функционалов в них. Наиболее подробно изучается класс пространств Орлича измеримых операторов.

Приведем основные результаты второй главы.

В § 2.1 дается определение нормированного идеального подпространства в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Выясняется связь между сходимостями по норме, по мере и с регулятором в нормированном идеальном подпространстве, приводятся необходимые и достаточные условия полноты. Изучаются нормированные идеальные подпространства, в которых норма порядково непрерывна (условие (A)), монотонно полна (условие (B)), порядково полунепрерывна (условие (C)).

В § 2.2 изучаются функционалы на идеальных пространствах. Наиболее важным результатом этого параграфа является теорема о представлении непрерывного функционала при помощи следа.

В §§ 2.3 и 2.4 вводятся и изучаются пространства Орлича измеримых операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Классические пространства Орлича измеримых функций на пространстве с мерой были введены Орличем в работах [58], [59] и впоследствии изучались в работах [17], [18], [19], [38], [45]. Систематическое изложение теории пространств Орлича измеримых функций имеется в монографии М.А.Красносельского и Я.Б.Рутцкого [20].

В § 2.3 доказано, что пространство Орлича измеримых операторов является банаховым идеальным подпространством в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, в котором выполнены условия (В) и (С).

В § 2.4 рассматриваются пространства Орлича, порожденные функцией, удовлетворяющей условию (Δ_2) . Указывается ряд эквивалентных условий, при которых пространство Орлича принадлежит данному классу. Выяснены также необходимые и достаточные условия рефлексивности пространства Орлича.

Результаты §§ 2.3 и 2.4 являются прямым обобщением соответствующих классических результатов. В то же время следует отметить, что пространства Орлича измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, так же, как и все идеальные подпространства в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, не являются решетками в случае, когда $\mathcal{A}$ некоммукативна. Это обстоятельство играет решающую роль при рассмотрении таких пространств и делает, как правило, невозможным применение методов, используемых при рассмотрении идеальных подпространств кольца измеримых функций.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [82], [83], [84], [85], [86].

§ 0. Предварительные сведения

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения об алгебрах фон Неймана и кольцах измеримых операторов. Более подробно смотри [42], [65], [66], [71].

I. Алгебры фон Неймана

Пусть H - гильбертово пространство и $B(H)$ - кольцо всех ограниченных линейных операторов в H .

Замкнутая в слабой операторной топологии инволютивная подалгебра $\mathcal{A}$ в $B(H)$, содержащая единичный оператор $\mathbb{1}$, называется алгеброй фон Неймана. Множество $Z(\mathcal{A})$ всех операторов из $\mathcal{A}$, коммутирующих с каждым оператором из $\mathcal{A}$, называется центром. Если $Z(\mathcal{A})$ состоит только из скалярных кратных единичного оператора $\mathbb{1}$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ называется фактором.

Пусть $\mathcal{A}_p$ множество всех проекторов алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_p$ является полной структурой с ортодополнением относительно порядка и дополнения, определяемых следующим образом:

$P \leq Q$ тогда и только тогда, когда $P(H) \subseteq Q(H)$ и $P^\perp = \mathbb{1} - P$, где $P, Q \in \mathcal{A}_p$ а $P(H)$ и $Q(H)$ замкнутые подпространства в H , на которые проектируют операторы P и Q соответственно.

Порядок на $\mathcal{A}_p$ согласован с порядком в $\mathcal{A}_h = \{A \in \mathcal{A}, A^* = A\}$, определяемым конусом положительных элементов $\mathcal{A}_+ = \{A^*A, A \in \mathcal{A}\}$

Символами $\vee$ и $\wedge$ мы будем обозначать точную верхнюю и точную нижнюю грани проекторов из $\mathcal{A}_p$.

Два проектора P и Q из $\mathcal{A}_\Phi$ называются эквивалентными ($P \sim Q$) или имеющими одинаковую относительную размерность, если существует частично изометрический оператор $U \in \mathcal{A}$ такой, что $U^*U = P$ и $UU^* = Q$. Говорят, что P имеет меньшую относительную размерность, чем Q ($P \preceq Q$), если $P \sim R$ для некоторого проектора $R \leq Q$. Соотношение $\preceq$ обладает свойствами частичного упорядочения и из $P \preceq Q$ и $Q \preceq P$ следует $P \sim Q$. Проектор P называется конечным, если из $Q \leq P$ и $Q \sim P$ следует $Q = P$.

Линейный положительный функционал m на $\mathcal{A}_+$ называется следом, если для произвольных $T \in \mathcal{A}_+$ и унитарного оператора $U \in \mathcal{A}$ $m(UTU^*) = m(T)$

Если $m(T) < +\infty$ для любого $T \in \mathcal{A}_+$, то говорят, что след m конечный. В этом случае

$$m(P \vee Q) = m(P) + m(Q) - m(P \wedge Q)$$

для любых $P, Q \in \mathcal{A}_\Phi$

След m называется точным, если из $T \in \mathcal{A}_+$ и $m(T) = 0$ следует, что $T = 0$

След m называется нормальным, если для любого возрастающего семейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_+$ с верхней гранью $T \in \mathcal{A}_+$ число $m(T)$ есть верхняя грань чисел $m(\mathcal{F})$

Алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ называется конечной, если для любого оператора $T \in \mathcal{A}_+$, $T \neq 0$ существует конечный нормальный след m на $\mathcal{A}_+$ такой, что $m(T) \neq 0$;

$\mathcal{A}$ имеет счетный тип, если любое семейство попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{A}_\Phi$ не более чем счетно.

Предложение I (i) Алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ является конечной тогда и только тогда, когда оператор 1 конечен.

(ii) Конечная алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ имеет счетный тип тогда и только тогда, когда на $\mathcal{A}_+$ существует точный нормальный конечный след τ .

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана, $P \in \mathcal{A}_P$ и $B = \{T \in \mathcal{A} : PT = TP = T\}$ операторы $T|_{P(H)}$ где T пробегает B , образуют алгебру фон Неймана в $P(H)$, которая обозначается $\mathcal{A}_P$ и называется редуцированной алгеброй алгебры $\mathcal{A}$.

Алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ называется алгеброй типа I_n , если существует n попарно ортогональных эквивалентных проекторов $\{P_i\}_{i=1}^n$ из $\mathcal{A}_P$ таких, что $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ и для любого i алгебра фон Неймана $\mathcal{A}_{P_i}$ коммутативна.

Конечная алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ называется алгеброй типа II_1 , если каждый ненулевой проектор $P \in \mathcal{A}_P$ представим в виде суммы двух ортогональных и эквивалентных проекторов из $\mathcal{A}_P$.

Предложение 2. Если $\mathcal{A}$ конечная алгебра фон Неймана и $Z = Z(\mathcal{A})$ ее центр, то существует линейное отображение $M^Z: \mathcal{A} \rightarrow Z$ алгебры $\mathcal{A}$ на Z , удовлетворяющее условиям:

(i) $\|M^Z(T)\|_\infty \leq \|T\|_\infty$ где $T \in \mathcal{A}$ и $\|\cdot\|_\infty$ норма в $\mathcal{A}$;

(ii) $M^Z(1) = 1$;

(iii) если $S \in Z$, $T \in \mathcal{A}$, то $M^Z(ST) = SM^Z(T)$;

(iv) если $T \in \mathcal{A}$, то $M^Z(T^*T) = M^Z(TT^*)$;

(v) $M^Z(T^*T) \geq 0$ и $M^Z(T^*T) = 0$ тогда и только тогда, когда $T = 0$, где $T \in \mathcal{A}$;

(vi) M^Z слабо и сильно непрерывно.

(vii) если $P, Q \in \mathcal{O}_f$, то $P \leq Q$ в том и только в том случае, когда $M^Z P \leq M^Z Q$.

Отображение M^Z называется условным математическим ожиданием алгебры фон Неймана $\mathcal{O}$ на центр Z .

Если $\mathcal{O}$ конечная алгебра фон Неймана и m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{O}_+$, то след m продолжается до положительного линейного функционала m' , обладающего свойствами:

(i) $m'(T) = m(T)$, если $T \in \mathcal{O}_+$

(ii) $m'(TS) = m'(ST)$, если $T, S \in \mathcal{O}$

(iii) m' слабо непрерывен

Функционал m' будем обозначать также через m и называть следом на $\mathcal{O}$.

II. Кольцо $\mathcal{S}(\mathcal{O})$

Линейное подпространство $\mathcal{D} \subset H$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{O}$ ($\mathcal{D} \eta \mathcal{O}$), если $A'(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ для каждого оператора $A' \in \mathcal{O}'$, где $\mathcal{O}' = \{A' \in B(H) :$

$A'A = AA'$ для любого $A \in \mathcal{O}\}$ — коммутант алгебры фон Неймана $\mathcal{O}$ в $B(H)$. Замкнутое подпространство $\mathcal{D}$ присоединено к $\mathcal{O}$ в том и только в том случае, когда оператор проектирования на $\mathcal{D}$ лежит в $\mathcal{O}$.

Линейный оператор T с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$ называется присоединенным к $\mathcal{O}$ ($T \eta \mathcal{O}$), если $\mathcal{D}(T) \eta \mathcal{O}$ и $TA'\xi = A'T\xi$ для всех $A' \in \mathcal{O}'$ и $\xi \in \mathcal{D}(T)$. Ограниченный линейный оператор A присоединен к $\mathcal{O}$ в том и только в том случае, когда он принадле-

жит $\mathcal{O}$.

Спектральным семейством в H называется отображение $\lambda \rightarrow E(\lambda)$ вещественной оси в $B(H)$, обладающее свойствами

(i) $E(\lambda)$ оператор проектирования ;

(ii) если $\lambda \leq \mu$, то $E(\lambda) \leq E(\mu)$

(iii) $\bigwedge_{\lambda} E(\lambda) = 0$, $\bigvee_{\lambda} E(\lambda) = 1$

(iv) для любого μ $E(\mu) = \bigvee_{\lambda < \mu} E(\lambda)$

Т е о р е м а 3. Для каждого эрмитова оператора T в H существует и притом только одно спектральное семейство

$\{E(\lambda)\}$ обладающее свойствами:

(i) $E(\lambda)$ перестановочен с любым оператором $A \in B(H)$ перестановочным с T

(ii) $\xi \in \mathcal{D}(T)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\|E(\lambda)\xi\|^2 < \infty$$

и в том случае

$$T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)\xi$$

$\{E(\lambda)\}$ называется спектральным семейством оператора T ,

а $T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ его спектральным разложением.

Спектральное разложение позволяет определить оператор $f(T)$ для любой непрерывной функции $f(\lambda)$ на вещественной оси, по формуле:

$$f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE(\lambda) \quad (\text{см. [7], стр. 362})$$

Пусть T эрмитов оператор и $\{E(\lambda)\}$ его спектральное семейство. Оператор T присоединен к алгебре фон Неймана $\mathcal{O}$ в том и только в том случае, когда его спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ целиком содержится в $\mathcal{O}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$\{T \geq \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} dE(\lambda), \quad \{T \leq \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{\varepsilon} dE(\lambda).$$

$$\{T > \varepsilon\} = \mathbb{1} - \{T \leq \varepsilon\} \quad \text{и} \quad \{T < \varepsilon\} = \mathbb{1} - \{T \geq \varepsilon\}$$

где $\{E(\lambda)\}$ спектральное семейство оператора T .

Пусть $\mathcal{O}$ конечная алгебра фон Неймана. Линейный оператор T с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$ называется измеримым относительно $\mathcal{O}$, если

$$(i) \quad T \eta \mathcal{O} \subset \mathcal{O} \quad ;$$

$$(ii) \quad T \text{ замкнут. (Сравни с [71] опр. 2.1)}$$

Через $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ обозначим множество всех линейных операторов в H , измеримых относительно $\mathcal{O}$.

Если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ и λ — комплексное число, то T^* , $\lambda T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$.

Кроме того, если $T, S \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$, то операторы $T + S$, TS определены на плотных подпространствах и допускают замыкания, которые вновь являются операторами, измеримыми относительно $\mathcal{O}$. Эти операторы называются сильной суммой и сильным произведением операторов T и S и обозначаются $T \# S$ и $T \cdot S$. Таким образом на $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ введены операции сложения и умножения, умножение на комплексное число и инволюция, которые превращают $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ в кольцо с инволюцией.

В дальнейшем для сложения и умножения измеримых операторов в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ мы будем использовать обычные обозначения $T + S$ и TS подразумевая под ними сильное сложение и сильное умножение.

На множестве $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ эрмитовых операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ можно следующим образом ввести частичный порядок: Оператор $A \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ называется положительным, обозначается $A \geq 0$ если

$(A\xi, \xi) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathcal{D}(A)$. Считаем $A \geq B$, если

$A - B \geq 0$, где $A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$. Такой частичный по-

рядок согласован с алгебраическими операциями:

(i) если $A, B, C \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, $A \geq B$, то $A + C \geq B + C$;

(ii) если $A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, λ - неотрицательное число и $A \geq B$, то $\lambda A \geq \lambda B$;

(iii) если $A, B \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, $A, B \geq 0$ и $AB = BA$ то $AB \geq 0$;

(iv) если $A \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, то $A^*A \geq 0$;

(v) если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, ограниченная сверх-

ху последовательность операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, то существует

$A = \sup_n A_n$ такой, что $A \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ и если $A_n T = T A_n$

для всех n , то $AT = TA$, где $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

Точную верхнюю и точную нижнюю грани семейства операторов $\{A_\alpha\} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, если они существуют, будем обозначать

$\sup_\alpha A_\alpha$ и $\inf_\alpha A_\alpha$.

Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ возрастает и $T = \sup_n T_n$

то будем писать $T_n \uparrow T$. Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ и

$T = \inf_n T_n$, то будем писать $T_n \downarrow T$.

Множество всех положительных операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{A})_+$.

Если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, то он единственным образом представим в виде: $T = T^+ - T^-$, где $T^+, T^- \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_+$ и $T^+ T^- = 0$, а именно

$$T^+ = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda) \quad \text{и} \quad T^- = - \int_{-\infty}^0 \lambda dE(\lambda) \quad \text{где}$$

$\{E(\lambda)\}$ спектральное семейство оператора T .

Если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, то оператор $|T| = (T^* T)^{\frac{1}{2}}$ называется модулем оператора T . Если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, то $|T| = T^+ + T^-$

Для каждого оператора $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ определен проектор $\ell(T) \in \mathcal{A}_\varphi$:

$$\ell(T) = \mathbb{1} - V\{P \in \mathcal{A}_\varphi : PT = 0\}$$

Проектор $\ell(T)$ называется левым носителем оператора T . Он обладает следующими свойствами:

(i) $\ell(T) = \ell(TT^*)$

(ii) $\ell(\lambda T) = \ell(T)$ где $\lambda \neq 0$

(iii) если $P \in \mathcal{A}_\varphi$, то $\ell(PT) \leq P$

(iv) если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, то $\ell(T) = \ell(T^+) + \ell(T^-)$

$$\ell(T) = \ell(|T|), \quad T^+ = \ell(T^+)T \quad \text{и} \quad T^- = \ell(T^-)T.$$

(v) если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_+$, то

$$\ell(T) = V\{P \in \mathcal{A}_\varphi : \text{существует } \varepsilon > 0, \varepsilon P \leq T\}$$

(vi) если $T, S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $TS = ST$, то

$$\ell(T)S = S\ell(T).$$

(vii) $TS = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\ell(T^*)\ell(S) = 0.$$

Аналогично определится правый носитель оператора T

$$\nu(T) = \mathbb{1} - V\{P \in \mathcal{O}_\varphi : TP = 0\}$$

и центральный носитель оператора T

$$z(T) = \bigwedge \{P \in \mathcal{O}_\varphi \cap \mathcal{Z} : PT = T\}$$

Центральный носитель $z(T)$ является минимальным центральным проектором из $\mathcal{O}_\varphi$, мажорирующим носители $\ell(T)$ и $\nu(T)$.

Центральный носитель обладает следующими свойствами:

(i) если $T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ и $S \in \mathcal{Z}(\mathcal{O})_\varphi$, то

$$z(ST) = Sz(T)$$

(ii) если $P, Q \in \mathcal{O}_\varphi$ и $P\mathcal{O}Q = 0$, то есть для каждого оператора $A \in \mathcal{O}$ $PAQ = 0$, то

$$z(P)z(Q) = 0$$

(iii) Пусть $M^z: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{O})$ — условное математическое ожидание алгебры фон Неймана $\mathcal{O}$ на центр $\mathcal{Z}(\mathcal{O})$ и $T \in \mathcal{O}_+$. Тогда $z(M^z T) = z(T)$

(iv) Для каждого $T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$

$$z(T) = V\{z(P), P \in \mathcal{O}_\varphi \text{ существует } \varepsilon > 0 \text{ такое, что } \varepsilon P \leq |T|\}$$

Каждый оператор $T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ имеет следующее представление: $T = U|T|$ где U — частично изометрический оператор такой, что $U^*U = z(|T|)$ и $UU^* = z(|T^*|)$. Такое представление называется полярным разложением оператора T .

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{O}$ конечна, то

$$z(|T|) \sim z(|T^*|) \quad \text{и} \quad \mathbb{1} - z(|T|) \sim \mathbb{1} - z(|T^*|).$$

Поэтому существует частичная изометрия V такая, что

$$V^*V = \mathbb{1} - \chi(|T|) \quad \text{и} \quad VV^* = \mathbb{1} - \chi(|T^*|)$$

Оператор $U+V$ унитарный и $T = (U+V)|T|$.

Таким образом, оператор T можно представить в виде

$$T = W|T|, \quad \text{где оператор } W \text{ унитарен.}$$

Оператор W выбирается неоднозначно. Такое представление оператора T мы будем называть его полярным разложением с унитарным W , подразумевая некоторое его представление такого вида.

III. Пространство $L_1(\mathcal{O})$. Пусть $\mathcal{O}$ конечная алгебра фон Неймана и m точный нормальный конечный след на $\mathcal{O}$.

Оператор $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{O})_h$ называется интегрируемым, если $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| dm(E(\lambda)) < \infty$, где $\{E(\lambda)\}$ спектральное семейство оператора T . Оператор $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{O})$ называется интегрируемым, если $|T|$ интегрируем.

Если оператор T интегрируем, то T^* тоже интегрируем, и если $S \in \mathcal{O}$, то TS и ST интегрируемы.

Совокупность всех интегрируемых операторов из $\mathfrak{S}(\mathcal{O})$ обозначается через $L_1(\mathcal{O})$. След m продолжается до положительного линейного функционала m' на $L_1(\mathcal{O})$, обладающего свойствами:

- (i) если $T \in \mathcal{O}$, то $m'(T) = m(T)$
- (ii) если $T \in L_1(\mathcal{O})$, то $m'(T^*) = \overline{m'(T)}$
- (iii) если $T \in L_1(\mathcal{O})$ и $S \in \mathcal{O}$, то $m'(TS) = m'(ST)$
- (iv) если $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{O})_h \cap L_1(\mathcal{O})$, то $m'(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dm(E(\lambda))$

где $\{E(\lambda)\}$ спектральное семейство оператора T .

Число $m'(T)$ называется интегралом или следом оператора $T \in L_1(\mathcal{A})$. В дальнейшем функционал m' мы будем обозначать также через m .

Если $T \in L_1(\mathcal{A})$, то число

$$\|T\|_1 = \sup \{ |m(TS)| : S \in \mathcal{A}, \|S\|_\infty \leq 1 \}$$

называется L_1 -нормой оператора T . Для $T \in L_1(\mathcal{A})$

$$m(|T|) = \|T\|_1$$

Т е о р е м а 4. $(L_1(\mathcal{A}), \|\cdot\|_1)$ банахово пространство.

IV. Сходимость почти всюду и по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$

Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ сходится почти всюду к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность проекторов

$\{P_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{A}_\varphi$ такая, что $P_n \uparrow \mathbb{1}$, $(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|(T_n - T)P_n\|_\infty < \varepsilon$

Топология τ сходимости по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ порождается множествами вида

$$U_{\varepsilon, \delta} = \{ T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : \text{существует } P \in \mathcal{A}_\varphi, m(P) > 1 - \delta, TP \in \mathcal{A} \text{ и } \|TP\|_\infty < \varepsilon \}$$

которые образуют базис

окрестностей при этой топологии. $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \tau)$ является полным метризуемым топологическим векторным пространством.

τ -сходимость в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ называется сходимостью по мере. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ сходится к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ по мере, если для любой

пары положительных чисел ε и δ найдется номер N такой, что для каждого $n \geq N$ существует такой проектор $P_n \in \mathcal{O}_\Phi$, что $m(P_n) > 1 - \delta$, $(T_n - T)P_n \in \mathcal{O}$ и $\|(T_n - T)P_n\|_\infty < \varepsilon$.

Для каждого оператора $T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ определена функ-

$$\tilde{T} : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\tilde{T}(\alpha) = \inf \{ \lambda \in [0, \infty) : m(1 - E(\lambda)) \leq \alpha \}$$

где $\{E(\lambda)\}$ спектральное семейство оператора $|T|$ (См. [79]).

Предложение 5. Функция $\tilde{T}(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$(i) \quad \tilde{T} = \tilde{T}^* = |T|^\sim, \quad T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$$

$$(ii) \quad \text{если } T \in \mathcal{S}(\mathcal{O}), \quad S \in \mathcal{O}, \quad \text{то}$$

$$(TS)^\sim \leq \|S\|_\infty \tilde{T}$$

$$(iii) \quad \text{если } T, S \in \mathcal{S}(\mathcal{O}), \quad 0 \leq S \leq T, \quad \text{то } \tilde{S} \leq \tilde{T}$$

$$(iv) \quad \text{если } T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})_+, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \text{то } (T^p)^\sim = (\tilde{T})^p$$

$$(v) \quad T \in L_1(\mathcal{O}) \quad \text{тогда и только тогда, когда } T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$$

$$\text{и } \int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) d\alpha < \infty. \quad \text{При этом, если } T \in L_1(\mathcal{O}), \quad \text{то}$$

$$\|T\|_1 = \int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) d\alpha$$

Значения функции $\tilde{T}(\alpha)$ называются S -числами оператора T .

Теорема 6 (i) Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathcal{O})$ сходится по мере к $T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ в том и только в том случае, когда $(T_n - T)^\sim(\alpha) \rightarrow 0$ для каждого $\alpha > 0$.

(ii) если $\{ T_n \}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\mathcal{A})$ сходится по мере
к $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $\sup_n \|T_n\|_1 < \infty$, то $T \in L_1(\mathcal{A})$

и $\|T\|_1 \leq \liminf_n \|T_n\|_1$

(iii) если $T, S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $\int_0^{+\infty} \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) d\alpha < \infty$
то $TS \in L_1(\mathcal{A})$ и $\|TS\|_1 \leq \int_0^{+\infty} \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) d\alpha$

(iv) Для каждого ультраслабо непрерывного линейного
функционала f на $\mathcal{A}$ существует оператор $A \in L_1(\mathcal{A})$
такой, что $f(T) = \tau(AT)$ для каждого $T \in \mathcal{A}$.

ГЛАВА I

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ СХОДИМОСТИ В КОЛЬЦЕ $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$

В этой главе рассматриваются различные виды сходимости в кольце $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ и устанавливается их взаимосвязь. Вводятся понятия двусторонних сходимостей по мере и почти всюду и исследуется их связь со сходимостями по мере, почти всюду и порядковыми ((o) - сходимость, сходимость с регулятором), которые естественным образом определяются на эрмитовой части $\mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$ кольца $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

Всюду в дальнейшем через $\mathcal{A}$ обозначается конечная алгебра фон Неймана, через $\mathcal{A}_u$ - кольцо всех унитарных операторов из $\mathcal{A}$, через $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ кольцо всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{A}$, и через τ - точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$ такой, что $\tau(1) = 1$, где 1 единица алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$. Под произведением TS и суммой $T+S$ операторов T и S из $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ всегда понимается сильное произведение и сильная сумма (см. § 0).

§ I.1. Сходимости почти всюду и по мере в кольце $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$

В этом параграфе исследуются свойства двусторонних сходимостей по мере и почти всюду.

В отличие от этих сходимостей обычные сходимости по мере и почти всюду в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ (см. § 0) будем называть односторонними.

Определим топологию двусторонней сходимости по мере. Для каждой пары положительных чисел ε и δ рассмотрим множество $\Omega_{\varepsilon, \delta}$ всех операторов $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, для каждого из которых существует такой проектор $P \in \mathcal{A}_p$, что $m(P) > 1 - \delta$, $PTP \in \mathcal{A}$ и $\|PTP\|_{\infty} < \varepsilon$.

Предложение I.I.I. Семейство $\{\Omega_{\varepsilon, \delta}\}_{\varepsilon > 0, \delta > 0}$ порождает в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ топологию τ_d , относительно которой $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ есть отделимое топологическое векторное пространство.

Доказательство. Прежде всего покажем, что семейство $\{\Omega_{\varepsilon, \delta}\}_{\varepsilon > 0, \delta > 0}$ обладает свойствами:

$$1) \quad \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}} + \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}} \subset \Omega_{\varepsilon, \delta}$$

$$2) \quad \alpha \Omega_{\varepsilon, \delta} = \Omega_{|\alpha|\varepsilon, \delta}, \quad \text{где } \alpha - \text{комплексное число.}$$

Действительно, пусть $T, S \in \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}}$

Тогда существуют такие P и Q из $\mathcal{A}_p$, что $m(P) > 1 - \delta/2$, $m(Q) > 1 - \delta/2$, $PTP \in \mathcal{A}$, $QSQ \in \mathcal{A}$, $\|PTP\|_{\infty} < \varepsilon/2$ и $\|QSQ\|_{\infty} < \varepsilon/2$.

Положим $R = P \wedge Q$

Тогда $m(R) = m(P \wedge Q) = m(P) + m(Q) - m(P \vee Q) > 1 - \delta/2 + 1 - \delta/2 - 1 = 1 - \delta$.

Кроме того, $R(T+S)R = RPTPR + RQSQR \in \mathcal{O}$ и

$$\|R(T+S)R\|_{\infty} \leq \|RPTPR\|_{\infty} + \|RQSQR\|_{\infty} < \varepsilon$$

Поэтому $T+S \in \Omega_{\varepsilon, \delta}$

Равенство $\Omega_{\varepsilon, \delta} = \Omega_{|\alpha|\varepsilon, \delta}$ следует непосредственно из определения множества $\Omega_{\varepsilon, \delta}$.

Таким образом, существует единственная топология τ_d , согласованная с векторной структурой кольца $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, базис окрестностей нуля которой образуют множества $\{\Omega_{\varepsilon, \delta}\}_{\varepsilon > 0, \delta > 0}$ (см. [I], предложение I, стр. I4).

Прежде чем перейти к доказательству отделимости топологии τ_d , установим следующий факт:

если $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ такая, что $m(P_n) \rightarrow 1$ и оператор $X \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ такой, что $P_n X P_n \in \mathcal{O}$ для любого n и $\|P_n X P_n\|_{\infty} \leq \varepsilon$, то $X \in \mathcal{O}$ и $\|X\|_{\infty} \leq \varepsilon \sqrt{2}$

Пусть сначала $X \in \mathcal{S}(\mathcal{O})_h$ и $\{E_{\lambda}\}$ его спектральное семейство. Предположим, что при $\lambda > \varepsilon$ $E_{\lambda} \neq \mathbb{1}$. Тогда $Q = E_{\lambda}^{\perp} \neq 0$. Кроме того $QXQ > \lambda Q > \varepsilon Q$

Рассмотрим проекторы $Q_n = P_n \wedge Q$

Ясно, что $m(Q_n) \rightarrow m(Q) \neq 0$

Поэтому найдется номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$

$Q_n \neq 0$ Так как $Q_n \leq Q$, то

$$Q_n X Q_n \geq \lambda Q_n > \varepsilon Q_n$$

С другой стороны, $Q_n \leq P_n$, поэтому

$$\|Q_n X Q_n\|_{\infty} \leq \|P_n X P_n\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Противоречие показывает, что при $\lambda > \varepsilon$ $E_\lambda = 1$

Аналогично доказывается, что при $\lambda < -\varepsilon$ $E_\lambda = 0$

Поэтому $X \in \mathcal{O}$ и $\|X\|_\infty \leq \varepsilon$

Если теперь $X = X_1 + i X_2$, где $X_1 = \operatorname{Re} X$

и $X_2 = \operatorname{Im} X$, то $P_n X_1 P_n = \frac{1}{2} (P_n X P_n + P_n X^* P_n)$

и $P_n X_2 P_n = \frac{1}{2i} (P_n X P_n - P_n X^* P_n)$

Поэтому $\|P_n X_1 P_n\| \leq \varepsilon$ и $\|P_n X_2 P_n\| \leq \varepsilon$

Тогда по предыдущему $X_1, X_2 \in \mathcal{O}$ и $\|X_1\|_\infty \leq \varepsilon$,

$\|X_2\|_\infty \leq \varepsilon$ откуда $X \in \mathcal{O}$ и

$$\|X\|_\infty^2 = \|X^* X\|_\infty = \|X_1^2 + X_2^2\|_\infty \leq \|X_1^2\|_\infty + \|X_2^2\|_\infty \leq 2\varepsilon^2$$

Следовательно, $\|X\|_\infty \leq \varepsilon \sqrt{2}$

Ясно, что $\bigcap \{ \Omega_{\varepsilon, \delta}, \varepsilon > 0, \delta > 0 \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{\varepsilon_n, \delta_n}$

для произвольных сходящихся к нулю последовательностей

$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пусть $X \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{\varepsilon_n, \delta_n}$

Тогда для каждого ε_k най-

дется последовательность проекторов $\{P_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}_P$

такая, что $m(P_n^{(k)}) > 1 - \delta_n$, $P_n^{(k)} X P_n^{(k)} \in \mathcal{O}$ и

$\|P_n^{(k)} X P_n^{(k)}\|_\infty < \varepsilon_k$. Поэтому $m(P_n^{(k)}) \rightarrow 1$ при

$n \rightarrow \infty$, откуда, как показано выше, $X \in \mathcal{O}$ и $\|X\|_\infty \leq$

$\varepsilon_k \sqrt{2}$. Устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем, что

$\|X\|_\infty = 0$, т.е. $X = 0$.

Следовательно, топология τ_d - отделима. Предложение доказано.

Из доказательства предложения I.I.I. следует, что топология τ_d удовлетворяет первой аксиоме счетности и потому метризуема.

О п р е д е л е н и е I.I.2. Топология τ_d называется топологией двусторонней сходимости по мере, а сходимость операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ в топологии τ_d - двусторонней сходимостью по мере.

Итак, последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$ сходится к оператору $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ двусторонне по мере $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} T$ если для любой пары положительных чисел ε и δ найдется номер N такой, что для каждого $n \geq N$ существует проектор P_n такой, что $m(P_n) > 1 - \delta$, $P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n(T_n - T)P_n\|_{\infty} < \varepsilon$

Известная топология τ односторонней сходимости по мере порождается множествами $U_{\varepsilon, \delta}$ всех таких операторов $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, для каждого из которых существует такой проектор $P \in \mathcal{A}$, что $m(P) > 1 - \delta$, $TP \in \mathcal{A}$ и $\|TP\|_{\infty} < \varepsilon$

Так как $\|PTR\|_{\infty} \leq \|TP\|_{\infty}$, то $U_{\varepsilon, \delta} \subset \Omega_{\varepsilon, \delta}$ и следовательно $\tau_d \leq \tau$

Укажем свойства двусторонней сходимости по мере.

П р е д л о ж е н и е I.I.3. (i) Если $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

($n = 1, 2, \dots$) , и $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} T$ то $T_n^* \xrightarrow{\Delta.п.м.} T^*$

(ii) Если $T_n \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ($n = 1, 2, \dots$) и $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$, то

$$|T_n| \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$$

(iii) Если $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ ($n = 1, 2, \dots$), $T_n \geq 0$ для всех

n и $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} T$, то $T \geq 0$

(iv) Если $T_n, S_n \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $0 \leq S_n \leq T_n$ ($n=1, 2, \dots$)
и $T_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} 0$, то $S_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} 0$

(v) Если $T_n, S_n, T, S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ($n=1, 2, \dots$) $T_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} T$
и $S_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} S$, то $T_n S_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} TS$

(vi) Если $P_n \in \mathcal{A}_\mathcal{P}$ ($n=1, 2, \dots$) и $P_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} 0$
то $m(P_n) \rightarrow 0$

(vii) Пространство $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \tau_d)$ полно.

Доказательство. Для односторонней сходимости по мере перечисленные выше свойства хорошо известны (См. [60], [78]). Поскольку далее в теореме I.I.4 будет доказана эквивалентность односторонней и двусторонней сходимостей по мере, в доказательстве нуждаются лишь свойства (ii), (iv) и (vi), которые используются при доказательстве теоремы I.I.4.

(ii) Пусть $T_n \xrightarrow{\text{А.п.м.}} 0$ и $\varepsilon > 0, \delta > 0$. Тогда существует такой номер N , что для каждого $n \geq N$ найдется такой проектор $P_n \in \mathcal{A}$, что $m(P_n) > 1 - \delta/2$, $P_n T_n P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n T_n P_n\|_\infty < \varepsilon$.

Рассмотрим проекторы $P_{T_n} = \mathbb{1} - \chi(P_n^\perp T_n)$ и $Q_n = P_n \wedge P_{T_n}$, где $\chi(A)$ — правый носитель оператора A .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } m(Q_n^\perp) &= m(P_n^\perp \vee P_{T_n}^\perp) \leq m(P_n^\perp) + m(P_{T_n}^\perp) = \\ &= m(P_n^\perp) + m(\chi(P_n^\perp T_n)) \leq m(P_n^\perp) + m(P_n^\perp) < \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Кроме того, } T_n Q_n &= T_n P_{T_n} Q_n = T_n (\mathbb{1} - \chi(P_n^\perp T_n)) Q_n = \\ &= (P_n + P_n^\perp) T_n (\mathbb{1} - \chi(P_n^\perp T_n)) Q_n = P_n T_n Q_n = P_n T_n P_n Q_n. \end{aligned}$$

Поэтому, при $n \geq N$ получаем:

$$\|Q_n |T_n| Q_n\|_\infty = \|Q_n U_n^* T_n Q_n\|_\infty = \|Q_n U_n^* P_n T_n P_n Q_n\|_\infty < \varepsilon$$

где $T_n = U_n |T_n|$ — полярное разложение оператора T_n

и $U_n \in \mathcal{U}_n$. Таким образом, $|T_n| \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$

(ii) Пусть $0 \leq S_n \leq T_n$ и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$

Тогда для каждой пары положительных чисел ε и δ найдется такой номер N , что для каждого $n > N$ существует

P_n из $\mathcal{A}_\varphi$ такой, что $m(P_n) > 1 - \delta$, $P_n T_n P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n T_n P_n\|_\infty < \varepsilon$. Но тогда $0 \leq P_n S_n P_n \leq P_n T_n P_n$ и потому $\|P_n S_n P_n\|_\infty \leq \|P_n T_n P_n\|_\infty < \varepsilon$

Следовательно, $S_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$

(iii) Предположим, что $P_n \xrightarrow{\text{д.п.м.}} 0$, но $m(P_n) \not\rightarrow 0$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности $\{P_n\}$, можно считать, что существует такое число $\varepsilon > 0$ что $m(P_n) \geq \varepsilon$ ($n = 1, 2, \dots$).

По данному ε найдутся такая последовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и соответствующая ей последовательность проекторов $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{A}_\varphi$, что

$$m(Q_{n_k}) > 1 - \frac{\varepsilon}{K} \quad \text{и} \quad \|Q_{n_k} P_{n_k} Q_{n_k}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{K}$$

Следовательно, $Q_{n_k} P_{n_k} Q_{n_k} < \frac{\varepsilon}{K} \mathbb{1}$, откуда

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K} &= m\left(\frac{\varepsilon}{K} \mathbb{1}\right) > m(Q_{n_k} P_{n_k} Q_{n_k}) = m(P_{n_k} Q_{n_k}) = \\ &= m(P_{n_k}) - m(P_{n_k} Q_{n_k}^\perp) \geq \varepsilon - m(P_{n_k} Q_{n_k}^\perp) \end{aligned}$$

С другой стороны, $m(P_{n_k} Q_{n_k}^\perp) = m(Q_{n_k}^\perp P_{n_k} Q_{n_k}^\perp) \leq m(Q_{n_k}^\perp) < \frac{\varepsilon}{K} \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$.

Полученное противоречие показывает, что
 $m(P_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Т е о р е м а I.I.4 Топология сходимости по мере τ и топология двусторонней сходимости по мере τ_d совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как обе топологии метризуемы, то достаточно показать, что $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$ тогда и только тогда, когда $T_n \xrightarrow{п.м.} 0$. Очевидно, из

$T_n \xrightarrow{п.м.} 0$ следует $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$
 Обратно, пусть $T_n \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$. Покажем, что тогда

$$T_n \xrightarrow{п.м.} 0$$

Пусть $T_n = U_n |T_n|$ полярное разложение оператора T_n с $U_n \in \mathcal{A}_n$.

По предложению I.I.3 (ii) $|T_n| \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим последовательность проекторов $E_{n,\varepsilon} = \{ |T_n| \geq \varepsilon \} =$

$$= \bigvee \{ E \in \mathcal{A}_n, E |T_n| = |T_n| E \geq \varepsilon E \}$$

Тогда $E_{n,\varepsilon} |T_n| E_{n,\varepsilon} \geq \varepsilon E_{n,\varepsilon}$ и потому $E_{n,\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} |T_n|$

По предложению I.I.3 $E_{n,\varepsilon} \xrightarrow{\Delta.п.м.} 0$ и

Значит $m(E_{n,\varepsilon}) \rightarrow 0$

Для произвольного $\delta > 0$ найдется номер N такой, что при $n > N$ $m(E_{n,\varepsilon}) < \delta$

Рассмотрим проекторы $F_n = 1 - \tau(E_{n,\varepsilon} |T_n|)$

$$m(F_n) = 1 - m(\tau(E_{n,\varepsilon} |T_n|)) \geq 1 - m(E_{n,\varepsilon}) > 1 - \delta$$

Кроме того, $T_n F_n = U_n^* |T_n| F_n = U_n^* (E_{n,\varepsilon} + E_{n,\varepsilon}^\perp) |T_n| F_n =$

$$= U_n^* E_{n,\varepsilon} |T_n| (1 - \varepsilon (E_{n,\varepsilon} |T_n|)) + U_n^* E_{n,\varepsilon}^\perp |T_n| F_n =$$

$$= U_n^* E_{n,\varepsilon}^\perp |T_n| E_{n,\varepsilon}^\perp F_n$$

Поэтому $\|T_n F_n\|_\infty = \|U_n^* E_{n,\varepsilon}^\perp |T_n| E_{n,\varepsilon}^\perp F_n\|_\infty \leq$

$$\leq \|E_{n,\varepsilon}^\perp |T_n| E_{n,\varepsilon}^\perp\|_\infty < \varepsilon$$

Таким образом $T_n \xrightarrow{n.m.} 0$. Следовательно, топологии τ и τ_d совпадают

Перейдем к рассмотрению двусторонней сходимости почти всюду.

О п р е д е л е н и е I.I.5 Последовательность

$\{T_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ сходится к оператору T из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ двусторонне почти всюду ($T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$), если для каждого положительного числа ε существует такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}_p$, что $P_n \uparrow \mathbb{1}$ при $n \rightarrow \infty$, $P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n(T_n - T)P_n\|_\infty < \varepsilon$ ($n=1, 2, \dots$)

Двусторонняя сходимость почти всюду обладает следующими свойствами:

П р е д л о ж е н и е I.I.6 (i) Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ и λ - комплексное число, то $\lambda T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} \lambda T$

(ii) Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ то $T_n^* \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T^*$

(iii) Если $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T, S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} S$ то $T_n + S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T + S$

(iv) $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} \operatorname{Re} T \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} \operatorname{Im} T$$

(v) Если $A_n, B_n, T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, $A_n \leq T_n \leq B_n$

$$A_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T \quad \text{и} \quad B_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T, \quad \text{то} \quad T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$$

(vi) Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность попарно ортогональных проекторов из центра Z алгебры фон Неймана $\mathcal{O}$, такая, что $\sum E_n = \mathbb{1}$ и $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$, $(n=1, 2, \dots)$

Тогда $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ в том и только в том случае, когда

$$E_k T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} E_k T \quad \text{для каждого } k=1, 2, \dots$$

(vii) Если $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{O})_h$, $n=1, 2, \dots$ и $T_n \uparrow T$, то $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$

Доказательство. Свойства (i) и (ii) очевидны.

(iii) Пусть $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ и $S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} S$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие последовательности

$$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{из } \mathcal{O}_p, \text{ что } P_n \uparrow \mathbb{1}, \\ Q_n \uparrow \mathbb{1}, P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{O}, Q_n(S_n - S)Q_n \in \mathcal{O}, \\ \|P_n(T_n - T)P_n\| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad \|Q_n(S_n - S)Q_n\| < \varepsilon/2$$

Рассмотрим последовательность проекторов $R_n = P_n \wedge Q_n$. Ясно, что $R_n \uparrow \mathbb{1}$. Кроме того, $R_n(T_n + S_n - T - S)R_n =$
 $= R_n(T_n - T)R_n + R_n(S_n - S)R_n = R_n P_n(T_n - T)P_n R_n +$
 $+ R_n Q_n(S_n - S)Q_n R_n \in \mathcal{O} \quad \text{и}$

$$\|R_n(T_n + S_n - T - S)R_n\|_{\infty} \leq \|R_n P_n(T_n - T)P_n R_n\|_{\infty} + \\ + \|R_n Q_n(S_n - S)Q_n R_n\|_{\infty} < \varepsilon$$

Следовательно, $T_n + S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T + S$

(iv) Следует из (i), (ii) и (iii).

(v) Пусть $A_n \leq T_n \leq B_n$, $A_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ и $B_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности

$$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{из } \mathcal{O}_p \quad \text{такие, что } P_n \uparrow \mathbb{1}, \\ Q_n \uparrow \mathbb{1}, P_n(A_n - T)P_n \in \mathcal{O}, Q_n(B_n - T)Q_n \in \mathcal{O}, \|P_n(A_n - T)P_n\|_{\infty} < \varepsilon \\ \text{и} \quad \|Q_n(B_n - T)Q_n\|_{\infty} < \varepsilon$$

Положим $R_n = P_n \wedge Q_n$. Тогда $R_n \uparrow \mathbb{1}$ и
 $R_n(A_n - T)R_n \leq R_n(T_n - T)R_n \leq R_n(B_n - T)R_n$.

Поэтому $\|R_n(T_n - T)R_n\|_\infty \leq \max\{\|R_n(A_n - T)R_n\|_\infty; \|R_n(B_n - T)R_n\|_\infty\} < \varepsilon$

Следовательно, $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$

(vi) Пусть $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность попарно ортогональных проекторов из центра $\mathcal{Z}$, такая, что $\sum_{n=1}^\infty E_n = \mathbb{1}$

и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует

$\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}_\varphi$ такая, что $P_n \uparrow \mathbb{1}$, $P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$

и $\|P_n(T_n - T)P_n\|_\infty < \varepsilon$ и потому для каждого k

$$\|P_n(E_k T_n - E_k T)P_n\|_\infty = \|E_k P_n(T_n - T)P_n\|_\infty \leq \|P_n(T_n - T)P_n\|_\infty < \varepsilon$$

т.е. $E_k T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} E_k T$

Обратно, пусть $E_k T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} E_k T$ для каждого k и $\varepsilon > 0$. Пусть $\{P_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ такая последовательность из

$\mathcal{A}_\varphi$, что $P_n^{(k)} \uparrow \mathbb{1}$, $P_n^{(k)} E_k (T_n - T) P_n^{(k)} \in \mathcal{A}$ и

$$\|P_n^{(k)} E_k (T_n - T) P_n^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \quad \text{для всех } n$$

Рассмотрим проекторы $Q_n = \sum_{k=1}^\infty P_n^{(k)} E_k$

Так как $\sum_{k=1}^\infty E_k = \mathbb{1}$ и $P_n^{(k)} E_k \uparrow E_k$, то $Q_n \uparrow \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} \text{Кроме того, } \|Q_n(T_n - T)Q_n\|_\infty &= \left\| \sum_{k=1}^\infty P_n^{(k)} E_k (T_n - T) \right\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{k=1}^\infty P_n^{(k)} E_k (T_n - T) P_n^{(k)} \right\|_\infty = \end{aligned}$$

$$= \sup_k \| P_n^{(k)} E_k (T_n - T) P_n^{(k)} \|_\infty < \varepsilon$$

Следовательно, $T_n \xrightarrow{\text{А.П.В.}} T$

(vii) Пусть $T_n \uparrow T$. Тогда $T - T_n \geq 0$ ($n=1,2,\dots$)
и $(T_n - T_n) \downarrow 0$ Пусть $\varepsilon > 0$

Рассмотрим проекторы

$$E_{n,\varepsilon} = \{ T - T_n \geq \varepsilon \} = V \{ E \in \mathcal{O}_\mathcal{F}, E(T - T_n) = \\ = E(T - T_n)E \geq \varepsilon E \}$$

Тогда $E_{n,\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} (T - T_n)$ Покажем, что $\frac{1}{\varepsilon} (T - T_n) \xrightarrow{\text{П.М.}} 0$

Для этого рассмотрим обратимый в $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ оператор

$$S = \mathbb{1} + \frac{1}{\varepsilon} (T - T_1) \text{ и пусть } S_n = S^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\varepsilon} (T - T_n) \right] S^{-\frac{1}{2}}$$

Тогда $S_n \in \mathcal{O}$, $\|S_n\|_\infty \leq 1$ и $S_n \downarrow 0$, следовательно,
но, $S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ в $L_1(\mathcal{O})$ и потому $S_n \xrightarrow{\text{П.М.}} 0$. Опера-

ция умножения непрерывна относительно сходимости по мере

(см. предложение I.I.3 (v)). Поэтому $\frac{1}{\varepsilon} (T - T_n) =$

$$= S^{\frac{1}{2}} S_n S^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{П.М.}} 0. \quad \text{Отсюда, по I.I.3 (iv)}$$

$E_{n,\varepsilon} \xrightarrow{\text{П.М.}} 0$ и по I.I.3 (vi), $m(E_{n,\varepsilon}) \rightarrow 0$

Рассмотрим $P_n = E_{n,\varepsilon}^\perp$. Тогда $m(P_n) \rightarrow 1$

Поэтому существует возрастающая последовательность индексов

$$\{n_k\}_{k=1}^\infty \text{ такая, что } m(P_{n_k}) > 1 - \frac{1}{2^k}$$

$$\text{Пусть } Q_\ell = \bigwedge_{k=\ell}^\infty P_{n_k} \quad (\ell=1,2,\dots)$$

Покажем, что $Q_\ell \uparrow \mathbb{1}$

Для этого рассмотрим проекторы

$$Q_e^{\sim} = \bigwedge_{k=e}^{\sim} P_{n_k}$$

Ясно, что $Q_e^{\sim} \downarrow Q_e$ при $\sim \rightarrow \infty$

и $m(Q_e^e) = m(P_{n_e}) > 1 - \frac{1}{2^e}$.

Далее,

$$\begin{aligned} m(Q_e^{e+1}) &= m(Q_e^e \wedge P_{n_{e+1}}) = \\ &= m(Q_e^e) + m(P_{n_{e+1}}) - m(Q_e^e \vee P_{n_{e+1}}) > \\ &> 1 - \frac{1}{2^e} + 1 - \frac{1}{2^{e+1}} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2^e} + \frac{1}{2^{e+1}} \right) \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, получим $m(Q_e^{e+2}) >$
 $> 1 - \left(\frac{1}{2^e} + \frac{1}{2^{e+1}} + \frac{1}{2^{e+2}} \right)$ и, наконец, $m(Q_e^{\sim}) > 1 - \sum_{k=e}^{\sim} \frac{1}{2^k}$

Переходя к пределу при $\sim \rightarrow \infty$ мы получим

$$m(Q_e) \geq 1 - \sum_{k=e}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

наконец, переходя к пределу при $e \rightarrow \infty$

получим $m(Q_e) \rightarrow 1$

След m - точный, поэтому $Q_e \uparrow \mathbb{1}$

Ясно, что $Q_e \leq P_{n_e}$. Значит $Q_e(T - T_{n_e})Q_e \in \mathcal{A}$
 и $\|Q_e(T - T_{n_e})Q_e\|_{\infty} = \|Q_e P_{n_e}(T - T_{n_e})P_{n_e} Q_e\|_{\infty} =$
 $= \|Q_e E_{n_e, \varepsilon}^{\perp}(T - T_{n_e}) E_{n_e, \varepsilon}^{\perp} Q_e\|_{\infty} < \varepsilon$

При $n \geq n_e$ $T - T_{n_e} \geq T - T_n$, следовательно

$$\|Q_e(T - T_n)Q_e\|_{\infty} < \varepsilon$$

Рассмотрим последовательность проекторов

$$R_n = \begin{cases} 0 & n < n_1 \\ Q_e & n_e \leq n < n_{e+1} \end{cases}$$

Тогда $R_n \uparrow \mathbb{1}$, $R_n(T-T_n)R_n \in \mathcal{A}$ и $\|R_n(T-T_n)R_n\|_\infty < \varepsilon$
 Таким образом, $T_n \xrightarrow{\Delta.п.в.} T$

Напомним, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$
 сходится к $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ односторонне почти всюду ($T_n \xrightarrow{п.в.} T$)
 если для каждого положительного числа ε найдется такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{A}$, что $P_n \uparrow \mathbb{1}$
 $(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|(T_n - T)P_n\|_\infty < \varepsilon$

В следующем предложении описывается связь между одностороннее и двусторонней сходимостями почти всюду и по мере.

Предложение I.I.7 Пусть

$$T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(i) \quad (T_n \xrightarrow{п.в.} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{\Delta.п.в.} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{п.м.} T)$$

(ii) Если $T_n \xrightarrow{п.м.} T$, то существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $T_{n_k} \xrightarrow{п.в.} T$

Утверждение (i) следует непосредственно из определений, а (ii) доказано в работе [60].

Из предложения I.I.7 следует в частности, что если $T_n \xrightarrow{\Delta.п.в.} T$, то существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $T_{n_k} \xrightarrow{п.в.} T$

Двусторонне сходящаяся почти всюду последовательность, вообще говоря, не является сходящейся односторонне почти всюду. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия эквивалентности этих сходимостей.

Напомним, что так как $\mathcal{A}$ - конечная алгебра фон Неймана то существует единственная последовательность попарно ортогональных проекторов из центра $\mathcal{Z}$ алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$:

$$E_0, E_1, E_2, \dots \quad \text{такая, что} \quad \sum_{k=0}^\infty E_k = \mathbb{1} \quad , \quad \mathcal{A}E_n -$$

алгебра типа $\underline{I}_n$ $n=1,2,\dots$ и $\mathcal{A}E_0$ - алгебра типа $\underline{II}_1$.

Если $E_0 = 0$, то $\mathcal{A}$ называется типа $\underline{I}$, если $E_n = 0$ ($n=1,2,\dots$), то $\mathcal{A}$ называется алгеброй $\underline{II}$ типа (См. например, [42]).

Т е о р е м а I.I.8 Следующие условия эквивалентны:

- (i) Для любых $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ если $T_n \xrightarrow{\Delta.p.v.} T$, то $T_n \xrightarrow{p.v.} T$
- (ii) Для любых $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ($n=1,2,\dots$) если $T_n \xrightarrow{\Delta.p.v.} T$, то для каждого положительного числа ε существует последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ из центра $\mathbb{Z}$ -алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ такая, что $P_n \uparrow 1$, $(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|(T_n - T)P_n\|_{\infty} < \varepsilon$
- (iii) Для любых $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ($n=1,2,\dots$) если $T_n \xrightarrow{p.v.} T$ то $T_n^* \xrightarrow{p.v.} T^*$
- (iv) $\mathcal{A}$ является алгеброй типа $\underline{I}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $T_n \xrightarrow{p.v.} T$, тогда $T_n \xrightarrow{\Delta.p.v.} T$

Следовательно, по предложению I.I.6 (ii), $T_n^* \xrightarrow{\Delta.p.v.} T^*$ и наконец по (i) $T_n^* \xrightarrow{p.v.} T^*$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Пусть выполнено условие (iii) но алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ не является алгеброй типа $\underline{I}$.

Тогда существует проектор $E_0 \neq 0$ из центра $\mathbb{Z}$ алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}E_0$ является алгеброй типа $\underline{II}_1$.

В силу свойства (vi) предложения I.I.6 (доказательство которого справедливо и для случая односторонней сходимости

сти почти всюду) без ограничения общности можно считать $E_0 = \mathbb{1}$.

Так как $\mathcal{A}$ - алгебра типа II_1 , то существует проектор $P_1 \in \mathcal{A}_\varphi$ такой, что $P_1 \sim \mathbb{1} - P_1$.

Обозначим $P_1^{(1)} = P_1$, $P_2^{(1)} = \mathbb{1} - P_1$ и $\mathcal{B}_1 = \{P_1^{(1)}, P_2^{(1)}\}$.

Пусть $M^{\mathbb{Z}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ условное ожидание алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ на центр $\mathbb{Z}$ (см. § 0).

$$\text{Тогда } M^{\mathbb{Z}} P_1^{(1)} = M^{\mathbb{Z}} P_2^{(1)} = \frac{1}{2} \mathbb{1}$$

Точно также существуют проекторы P_2 и Q_2 из $\mathcal{A}_\varphi$ такие, что $P_2 < P_1^{(1)}$, $Q_2 < P_2^{(1)}$, $P_2 \sim P_1^{(1)} - P_2$ и $Q_2 \sim P_2^{(1)} - Q_2$.

Обозначим $P_1^{(2)} = P_2$, $P_2^{(2)} = P_1^{(1)} - P_2$, $P_3^{(2)} = Q_2$ и $P_4^{(2)} = P_2^{(1)} - Q_2$ и $\mathcal{B}_2 = \{P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, P_4^{(2)}\}$.

$$\text{Ясно, что } M^{\mathbb{Z}} P_k^{(2)} = \frac{1}{2^2} \mathbb{1} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Продолжая процесс, по любому натуральному числу строим семейство

$$\mathcal{B}_n = \{P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \dots, P_{2^n}^{(n)}\}$$

такое, что все $P_k^{(n)}$ попарно ортогональны и эквивалентны,

$$\sum_{k=1}^{2^n} P_k^{(n)} = \mathbb{1} \quad \text{и} \quad M^{\mathbb{Z}} P_k^{(n)} = \frac{1}{2^n} \mathbb{1} \quad (k = 1, 2, \dots, 2^n)$$

Семейство $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ порождает коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$.

Рассмотрим коммутативную W^* -алгебру $L = L^\infty([0, 1], \lambda)$, где λ - мера Лебега на $[0, 1]$. Пусть $\chi_k^{(n)}$ - характеристическая функция интервала $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$.

Соответствие $P_k^{(n)} \longleftrightarrow \chi_k^{(n)}$ однозначно продолжается до

$*$ - изоморфизма $\mathcal{B}$ на L .

Кроме того, для любых n и k и любого проектора

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{Z} \quad m(P_k^{(n)} E) &= m(M^{\mathcal{Z}}(P_k^{(n)} E)) = m(M^{\mathcal{Z}}(P_k^{(n)}) E) = \\ &= m\left(\frac{1}{2^n} \mathbb{1} \cdot E\right) = \frac{1}{2^n} m(E) = m(P_k^{(n)}) m(E). \end{aligned}$$

Поэтому для любого проектора $P \in \mathcal{B}$ и $E \in \mathcal{Z}$

$$m(PE) = m(P)m(E), \text{ в частности,}$$

$$\text{для любого } P \in \mathcal{B}_P \quad M^{\mathcal{Z}}(P) = m(P)\mathbb{1}$$

Так как $\mathcal{B} \ast$ -изоморфна L , то в $\mathcal{B}$ существует последовательность проекторов $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$m(G_n) \downarrow 0$, но $\{G_n\}$ не сходится почти всюду к нулю в $\mathcal{B}$.

Рассмотрим последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{B}$ такую, что $E_n \downarrow 0$ и $m(E_n) = m(G_n)$

$$\text{Тогда } M^{\mathcal{Z}}(E_n) = m(E_n)\mathbb{1} = m(G_n)\mathbb{1} = M^{\mathcal{Z}}(G_n),$$

поэтому $E_n \sim G_n$

Существует последовательность частично изометрических операторов $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathcal{A}$ такая, что

$$V_n V_n^* = G_n \quad \text{и} \quad V_n^* V_n = E_n$$

Покажем, что $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$, но $\{V_n^*\}$ не сходится к нулю почти всюду.

Действительно, $E_n^{\perp} \uparrow \mathbb{1}$ и $V_n E_n^{\perp} = 0$ поэтому $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$.

Предположим теперь, что $V_n^* \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$

Тогда по теореме 3.1 из [60], для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор H из $\mathcal{A}$, что $m(H) > 1 - \varepsilon$ и

$$\|H V_n\|_\infty = \|V_n^* H\|_\infty \rightarrow 0$$

Поэтому $\|H G_n\|_\infty = \|H V_n V_n^*\|_\infty \rightarrow 0$

Так как $\mathcal{B}$ подалгебра фон Неймана конечной алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$, то существует условное ожидание $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ (см. [75]), т.е. положительное линейное отображение $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ обладающее также свойствами:

- 1) $\Phi(1) = 1$
- 2) Для любых $B \in \mathcal{B}$ и $A \in \mathcal{A}$ $\Phi(AB) = \Phi(A)B$
- 3) $\|\Phi(A)\|_\infty \leq \|A\|_\infty$
- 4) $m(\Phi(A)) = m(A)$

Из свойств Φ мы получаем, что

$$\|\Phi(H)G_n\|_\infty = \|\Phi(HG_n)\|_\infty \rightarrow 0$$

и $m(\Phi(H)) = m(H) > 1 - \varepsilon$

Пусть $R = \{\Phi(H) \geq \frac{1}{2}\} = V\{F \in \mathcal{B}_\Phi, \Phi(H)F \geq \frac{1}{2}F\}$

Тогда $1 - \varepsilon < m(\Phi(H)) = m(\Phi(H)R) + m(\Phi(H)R^\perp) \leq$

$$\leq m(\Phi(HR)) + \frac{1}{2}m(R^\perp) = m(HR) + \frac{1}{2}m(R^\perp) =$$

$$= m(RHR) + \frac{1}{2}m(R^\perp) \leq m(R) + \frac{1}{2}m(R^\perp) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m(R).$$

Следовательно, $m(R) > 1 - 2\varepsilon$

Кроме того, $R \leq 2\Phi(H)$, поэтому

$$G_n R G_n \leq 2 G_n \Phi(H) G_n \quad \text{и}$$

$$\|G_n R G_n\|_\infty \leq 2 \|G_n \Phi(H) G_n\|_\infty = 2 \|\Phi(H) G_n\|_\infty \rightarrow 0$$

Следовательно, $\|G_n R\|_\infty \rightarrow 0$, откуда

$G_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ в $\mathcal{B}$, что противоречит выбору последовательности $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Таким образом, $\{V_n^*\}$ не сходится односторонне почти всюду к 0, в то время как $V_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$.

Противоречие показывает, что $\mathcal{A}$ - алгебра типа I.

Докажем теперь (iv) $\implies$ (ii). Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра типа I и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется последовательность $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_\varphi$ такая, что $Q_n \uparrow 1$, $Q_n(T_n - T)Q_n \in \mathcal{A}$ и $\|Q_n(T_n - T)Q_n\|_\infty < \epsilon$.

Так как $\mathcal{A}$ - алгебра типа I, то существует последовательность $\{E_k\}$ попарно ортогональных проекторов из центра $\mathcal{Z}$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} E_k = 1$ и $\mathcal{A}E_k$ - алгебра типа I_k.

В силу свойства (vi) предложения I.1.6 достаточно рассмотреть случай, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ - типа I_k. Тогда существуют k попарно ортогональных, эквивалентных друг другу абелевых проектора

$F_1, F_2, \dots, F_k$ таких, что $\sum_{i=1}^k F_i = 1$ и их центральные носители $\mathcal{Z}(F_i) = 1$ ($i=1, 2, \dots, k$)

Пусть $M^{\mathcal{Z}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}$ условное ожидание $\mathcal{A}$ на центр $\mathcal{Z}$.

Рассмотрим центральные проекторы:

$$Z_0^{(n)} = V\{z \in \mathcal{Z}_\varphi, Q_n z = 0\}$$

$$Z_1^{(n)} = V\{z \in \mathcal{Z}_\varphi, Q_n z \sim F_1 z\}$$

$$Z_2^{(n)} = V \{ z \in Z_{\mathcal{D}}, Q_n z \sim (F_1 + F_2) z \}$$

и т.д.

$$Z_K^{(n)} = V \{ z \in Z_{\mathcal{D}}, Q_n z \sim (F_1 + F_2 + \dots + F_K) z \}$$

Проекторы $Z_0^{(n)} \dots Z_K^{(n)}$ попарно ортогональны,

$$\sum_{i=0}^K Z_i^{(n)} = Z(Q_n) = \mathbb{1} \quad - \text{центральный носитель } Q_n$$

$$\text{и } M^Z Q_n = \sum_{i=0}^K \frac{i}{K} Z_i^{(n)}$$

$$\text{Пусть } P_n = Z_K^{(n)} = V \{ z \in Z_{\mathcal{D}}, Q_n z \sim z \}$$

Покажем, что $P_n \uparrow \mathbb{1}$

Действительно, $Q_n \uparrow \mathbb{1}$, значит $M^Z(Q_n) \uparrow \mathbb{1}$ откуда $m(M^Z(Q_n)) \uparrow 1$.

$$\text{Ясно, что } M^Z(Q_n)(\mathbb{1} - P_n) \leq (1 - \frac{1}{K})(\mathbb{1} - P_n)$$

$$\begin{aligned} m(M^Z(Q_n)) &= m(M^Z(Q_n)(\mathbb{1} - P_n)) + m(M^Z(Q_n)P_n) \leq \\ &\leq (1 - \frac{1}{K})m(\mathbb{1} - P_n) + m(P_n) = 1 - \frac{1}{K}m(\mathbb{1} - P_n) \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{1}{K}m(\mathbb{1} - P_n) \leq 1 - m(M^Z(Q_n)),$$

откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\mathbb{1} - P_n) = 0$ и, наконец, поэтому $P_n \uparrow \mathbb{1}$

Кроме того, $P_n \leq Q_n$, $P_n(T_n - T)P_n = (T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$

$$\text{и } \|P_n(T_n - T)P_n\|_{\infty} = \|(T_n - T)P_n\|_{\infty} \leq \|Q_n(T_n - T)Q_n\|_{\infty} < \varepsilon$$

Следовательно, выполнено условие (ii)

Теорема доказана

З а м е ч а н и е I.I.9 В силу свойства (iv) предложения I.I.6 условие (ii) теоремы I.I.8 эквивалентно следую-

щему условию (ii)' Для любых $T_n, T \in \mathcal{J}(\mathcal{A})_h$ ($n=1,2,\dots$)
если $T_n \xrightarrow{\Delta.п.в.} T$, то $T_n \xrightarrow{п.в.} T$

Следующая теорема является аналогом теоремы Егорова.

Для односторонних сходимостей этот результат получен в [60]:

Теорема I.I.IO Пусть $T_n, T \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$ ($n=1,2,\dots$)
Тогда $T_n \xrightarrow{\Delta.п.в.} T$ в том и только в том случае, когда выполнено условие:

(R) для любого положительного числа ε существует такой проектор $P \in \mathcal{A}_p$, что $m(P) > 1 - \varepsilon$,

$$P(T_n - T)P \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \|P(T_n - T)P\|_\infty \rightarrow 0$$

Доказательство. Пусть $T_n \xrightarrow{\Delta.п.в.} T$

Тогда для каждого натурального числа K найдется последовательность $\{P_n^{(K)}\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}_p$ такая, что $P_n^{(K)} \uparrow \mathbb{1}$,

$$P_n^{(K)}(T_n - T)P_n^{(K)} \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \|P_n^{(K)}(T_n - T)P_n^{(K)}\| < \frac{1}{K}$$

Поэтому $m(P_n^{(K)}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_K такой, что $m(P_n^{(K)}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^K}$ при $n \geq N_K$. Последовательность $\{N_K\}_{K=1}^\infty$ можно выбрать возрастающей.

$$\text{Пусть} \quad P = \bigwedge_{K=1}^\infty P_{N_K}^{(K)}$$

$$\text{Тогда} \quad m(\mathbb{1} - P) = m\left(\bigvee_{K=1}^\infty (\mathbb{1} - P_{N_K}^{(K)})\right) \leq \sum_{K=1}^\infty m(\mathbb{1} - P_{N_K}^{(K)}) <$$

$$< \sum_{K=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^K} = \varepsilon.$$

$$\text{Итак,} \quad m(P) > 1 - \varepsilon$$

Кроме того, при $n \geq N_K$ имеем:

$$\|P(T_n - T)P\|_\infty = \|P P_{N_K}^{(K)} P_n^{(K)}(T_n - T)P_n^{(K)} P_{N_K}^{(K)} P\|_\infty < \frac{1}{K}$$

Поэтому $\|P(T_n - T)P\|_\infty \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Обратно, пусть выполнено условие (R). Тогда для любого натурального числа ε найдется такой проектор $Q_\varepsilon \in \mathcal{A}_P$, что $m(Q_\varepsilon) > 1 - \frac{1}{2\varepsilon}$, $Q_\varepsilon(T_n - T)Q_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и $\|Q_\varepsilon(T_n - T)Q_\varepsilon\|_\infty \rightarrow 0$.

Рассмотрим последовательность проекторов

$$R_k = \bigwedge_{\ell=k}^{\infty} Q_\ell$$

Как и в доказательстве (vii) I.I.6

можно показать, что $R_k \uparrow \mathbb{1}$.

Ясно, что $R_k(T_n - T)R_k \in \mathcal{A}$. Пусть $\varepsilon > 0$.

Так как $R_k \leq Q_k$, то найдется номер N_1 такой, что при

$$n \geq N_1 \quad \|R_1(T_n - T)R_1\|_\infty < \varepsilon;$$

найдется номер $N_2 > N_1$ такой, что при $n \geq N_2$

$$\|R_2(T_n - T)R_2\|_\infty < \varepsilon$$

и т.д. найдется номер $N_k > N_{k-1}$ такой, что при $n \geq N_k$

$$\|R_k(T_n - T)R_k\|_\infty < \varepsilon$$

Строим последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_P$ следующим образом:

$$P_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n < N_1 \\ R_k, & \text{если } N_k \leq n < N_{k+1} \end{cases}$$

Тогда $P_n \uparrow \mathbb{1}$, $P_n(T_n - T)P_n \in \mathcal{A}$ и $\|P_n(T_n - T)P_n\| < \varepsilon$,

т.е. $T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} T$.

С л е д с т в и е I.I.II Пусть $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $n=1,2,\dots$
 $P \in \mathcal{A}_P$ и $T_n \xrightarrow{\text{А.п.в.}} T$. Тогда $PT_nP \xrightarrow{\text{А.п.в.}} PTP$
 в $\mathcal{S}(\mathcal{A}_P)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m(P) = \alpha$. Для
 каждого $\varepsilon > 0$ существует проектор $R \in \mathcal{A}_P$ такой, что
 $m(R) > 1 - \varepsilon$, $R(T_n - T)R \in \mathcal{A}$ и $\|R(T_n - T)R\|_\infty \rightarrow 0$
 при $n \rightarrow \infty$ (См. теорему I.I.I0).

Рассмотрим проектор $F = R \wedge P$. Ясно, что $F \in \mathcal{A}_P$ и

$$m(F) = m(R \wedge P) = m(R) + m(P) - m(R \vee P) > \\ > 1 - \varepsilon + \alpha - 1 = \alpha - \varepsilon.$$

Кроме того, $\|FP(T_n - T)PF\|_\infty = \|PFR(T_n - T)RFP\|_\infty \leq$

$$\leq \|R(T_n - T)R\|_\infty \rightarrow 0. \quad \text{Таким образом,}$$

$$PT_nP \xrightarrow{\text{А.п.в.}} PTP \quad \text{в } \mathcal{S}(\mathcal{A}_P).$$

В следующей теореме рассматриваются условия ограниченности возрастающей последовательности положительных операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Т е о р е м а I.I.I2 Пусть $\{T_n\}$ возрастающая последовательность операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})_+$. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ порядково ограничена в $\mathcal{S}(\mathcal{A})_+$,
 т.е. существует $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_+$ такой, что $T_n \uparrow T$;

(ii) $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ в топологии τ сходимости по мере;

(iii) Не существует ненулевого проектора $P \in \mathcal{A}_P$ и
 возрастающей к бесконечности последовательности положительных
 чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $\varepsilon_n P \leq PT_nP$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) если $T_n \uparrow T$ то по предложениям I.I.6 (vii) и I.I.7 (i) $T_n \xrightarrow{п.м.} T$ и потому τ - ограничена.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, τ - ограничена и существует проектор $P \in \mathcal{A}_P$ и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такие, что $P \neq 0$, $\varepsilon_n \uparrow +\infty$ и $\varepsilon_n P \leq P T_n P$. Операция умножения τ - непрерывна (см. предложение I.I.3 (v)), поэтому $\{P T_n P\}_{n=1}^{\infty}$ τ - ограничена, откуда следует, что $\{\varepsilon_n P\}_{n=1}^{\infty}$ должна быть τ - ограниченной, что противоречит равенству $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \infty$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\{T_n\}$ возрастающая и $S_n = (1 + T_n)^{-1}$. Тогда $0 < S_n \leq 1$ и $S_n \downarrow$

Пусть $S = \inf S_n$. Допустим, что $\tau(S) \neq 1$

Тогда существует проектор $E \in \mathcal{A}_P$, $E \neq 0$ что

$$SE = 0 \quad (\text{например, } E = 1 - \tau(S)).$$

Тогда $ES_n E \downarrow 0$ и потому $ES_n E \xrightarrow{\Delta.п.в.} 0$

По теореме I.I.10 для каждого $\varepsilon > 0$ существует проектор

P такой, что $m(P) > 1 - \varepsilon$ и $\|PES_n EP\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\varepsilon < m(E)$ и пусть $F = E \wedge P$

Тогда $m(F) = m(E) + m(P) - m(E \vee P) > m(E) + 1 -$

$$-\varepsilon - 1 = m(E) - \varepsilon > 0 \quad \text{поэтому } F > 0$$

Обозначим $\varepsilon_n = \|FS_n F\|_{\infty}$ Ясно, что $\varepsilon_n \downarrow 0$

и $FS_n F \leq \varepsilon_n 1$ Значит, $F(1 + T_n)^{-\frac{1}{2}}(1 + T_n)^{-\frac{1}{2}}F \leq \varepsilon_n 1$

откуда $(1 + T_n)^{-\frac{1}{2}}F(1 + T_n)^{-\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_n 1$ и

следовательно, $F \leq \varepsilon_n (1 + T_n)$

Поэтому $F \leq \varepsilon_n F(1 + T_n)F$, т.е.

$$F \leq \varepsilon_n F + \varepsilon_n F T_n F \quad \text{откуда}$$

$$\frac{1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} F \leq F T_n F$$

что противоречит условию (iii).

Таким образом, $\chi(S) = 1$ и значит существует оператор

$$S^{-1} \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad 1 + T_n \uparrow S^{-1} \quad \text{откуда}$$

$$T_n \uparrow (S^{-1} - 1) \quad \text{т.е.} \quad \{T_n\} \quad \text{порядково ограничена}$$

В заключение параграфа рассмотрим еще один частный случай, когда двусторонне почти всюду сходящаяся последовательность сходится односторонне почти всюду.

Предложение I.I.I3. Если $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$,

$$T_n - T \in \mathcal{A}_+ \quad n=1, 2, \dots, \quad \sup \|T_n - T\|_\infty < \infty$$

и $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$, то $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$

Доказательство. Так как $T_n - T \geq 0$, то существует последовательность $\{H_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}_+$ такая, что

$H_n^2 = T_n - T$, $n=1, 2, \dots$. Из $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ по теореме I.I.I0 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_p$, что $m(P) > 1 - \varepsilon$ и $\|P(T_n - T)P\|_\infty \rightarrow 0$

$$\text{Но } \|P(T_n - T)P\|_\infty = \|PH_n^2P\|_\infty = \|H_nP\|_\infty^2$$

Следовательно, $\|H_nP\|_\infty \rightarrow 0$ и потому

$$\|(T_n - T)P\|_\infty = \|H_n(H_nP)\|_\infty \leq \|H_n\|_\infty \|H_nP\|_\infty \leq$$

$$\leq \sup_n (\|T_n - T\|_\infty^{\frac{1}{2}}) \|H_nP\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Таким образом, $T_n \xrightarrow{\text{п.в.}} T$

§ 1.2 Порядковые сходимости в кольце $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$

В этом параграфе рассматриваются (o) -сходимость и сходимость с регулятором на эрмитовой части $\mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$ кольца $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Как и в любом частично упорядоченном векторном пространстве, эти сходимости определяются следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1.2.1. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$ (o) -сходится к оператору $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$

если $(T_n \xrightarrow{(o)} T)$, если существуют такие последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$, что $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает, $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает, для каждого n $S_n \leq T_n \leq R_n$ и $\sup_n S_n = \inf_n R_n = T$

О п р е д е л е н и е 1.2.2. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$ сходится с регулятором (r) -сходится к оператору $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$ $(T_n \xrightarrow{(r)} T)$ если существуют положительный оператор $R \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ и убывающая к нулю числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что для каждого n $-\varepsilon_n R \leq T_n - T \leq \varepsilon_n R$

Оператор R называется регулятором сходимости.

Легко видеть, что из (r) -сходимости следует (o) -сходимость. Обратное, вообще говоря, неверно. Соответствующие примеры хорошо известны уже в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна (см. [3]).

В следующем предложении приводятся простейшие свойства (o) -сходимости.

П р е д л о ж е н и е 1.2.3. (i) Если $T_n, T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})_h$, $(n=1, 2, \dots)$ и $T_n \xrightarrow{(o)} T$, то для любого действительного числа λ $\lambda T_n \xrightarrow{(o)} \lambda T$

(ii) Если $T_n, T, S_n, S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, $T_n \xrightarrow{(o)} T$ и $S_n \xrightarrow{(o)} S$, то $T_n + S_n \xrightarrow{(o)} T + S$

(iii) Если $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ ($n=1,2,\dots$) и $|T_n - T| \xrightarrow{(o)} 0$ то $T_n \xrightarrow{(o)} T$

(iv) Если $T_n, T, A_n, B_n \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ ($n=1,2,\dots$)
 $A_n \leq T_n \leq B_n$ для каждого n , $A_n \xrightarrow{(o)} T$ и $B_n \xrightarrow{(o)} T$ то $T_n \xrightarrow{(o)} T$

(v) Если $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ ($n=1,2,\dots$) и $T_n \xrightarrow{(o)} T$ то для любого оператора $A \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ $A^* T_n A \xrightarrow{(o)} A^* T A$

Рассмотрим связь порядковых сходимостей со сходимостями по мере и двусторонней почти всюду.

Т е о р е м а I.2.4 Пусть $T_n, T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, ($n=1,2,\dots$)

Тогда (i) $(T_n \xrightarrow{(r)} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{(o)} T) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (T_n \xrightarrow{\text{А.п.в.}} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T)$

(ii) Если $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$, то существует подпоследовательность индексов $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $T_{n_k} \xrightarrow{(r)} T$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первой части теоремы в доказательстве нуждается лишь импликация

$$(T_n \xrightarrow{(o)} T) \Rightarrow (T_n \xrightarrow{\text{А.п.в.}} T)$$

Пусть $T_n \xrightarrow{(o)} T$. Тогда существуют две такие последовательности $\{T_n'\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{T_n''\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$, что $\{T_n'\}$ возрастает, $\{T_n''\}$ убывает,
 $T_n' \leq T_n \leq T_n''$ для каждого n и $\sup T_n' =$
 $= \inf T_n'' = T$.

Тогда по предложению I.I.6 (vii) $T_n' \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ и $T_n'' \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$ откуда по I.I.6 (v) $T_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} T$

Теперь докажем (ii). Пусть $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$

Тогда по предложению I.I.3 (ii) $|T_n - T| \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$

Рассмотрим семейство множеств $\{\Omega_{\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}}\}$

$k=1, 2, \dots$, являющееся базисом окрестностей нуля $\mathfrak{S}(\alpha)$ в топологии τ сходимости по мере (см. § I.I).

Найдется такая последовательность индексов $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ что для всех k

$$k |T_{n_k} - T| \in \Omega_{\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}}$$

Рассмотрим
$$S_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} k |T_{n_k} - T|,$$

тогда при $r > \ell$ имеем

$$S_r - S_\ell = \sum_{k=\ell+1}^r k |T_{n_k} - T| \in \Omega_{\frac{1}{2^{\ell+1}}, \frac{1}{2^{\ell+1}}} + \dots + \Omega_{\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^r}} \subset \Omega_{\frac{1}{2^\ell}, \frac{1}{2^\ell}}$$

Таким образом, последовательность $\{S_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ τ -фундаментальна в $\mathfrak{S}(\alpha)$. Пространство $(\mathfrak{S}(\alpha), \tau)$ - полно

(см. предложение I.I.3 (vii)). Поэтому существует оператор

$S \in \mathfrak{S}(\alpha)$ такой, что $S_\ell \xrightarrow{\text{п.м.}} S$. Так как $S_\ell \geq 0$ для каждого ℓ , то по предложению I.I.3 (iii) $S \geq 0$.

Покажем, что $\{S_\ell\}$ ограничена и $S = \sup_{\ell} S_\ell$

Действительно, $\{S_\ell\}$ - возрастающая последовательность.

Зафиксируем ℓ' . Тогда $S_\ell - S_{\ell'} \xrightarrow{\text{п.м.}} S - S_{\ell'}$ при

$\ell \rightarrow \infty$, и т.к. при $\ell \geq \ell'$ $S_\ell - S_{\ell'} \geq 0$, то

$S - S_{\ell'} \geq 0$, откуда $S \geq S_{\ell'}$. Ввиду произвольности ℓ'

$\{S_e\}$ ограничена сверху оператором S .

Поэтому существует $S' = \sup_e S_e$ в $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$.
 Ясно, что $S_e \xrightarrow{(o)} S'$ и потому $S_e \xrightarrow{п.м.} S'$.

Топология τ отделима, следовательно $S = S' = \sup_e S_e$.

Таким образом, для каждого k $k|T_{n_k} - T| \leq S$
 откуда $|T_{n_k} - T| \leq \frac{1}{k} S$ следовательно, $T_{n_k} \xrightarrow{(r)} T$.

При доказательстве пункта (ii) теоремы I.2.4 был установлен также факт

С л е д с т в и е I.2.5 Если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ и $T_n \xrightarrow{п.м.} T$
 $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_h$ то она ограничена в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $T = \sup_n T_n$.

Рассмотрим теперь вопрос о соотношении двусторонней сходимости почти всюду и (o) -сходимости в $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{B}$ - подалгебра фон Неймана в $\mathcal{A}$.

Говорят, что $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ (o) -сходится к $T \in \mathcal{B}_h$ в $\mathcal{B}$

если существуют такие последовательности $\{T_n'\}_{n=1}^{\infty}$ и

$\{T_n''\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{B}_h$, что $\{T_n'\}$ возрастает,

$\{T_n''\}$ убывает, $T_n' \leq T_n \leq T_n''$ и $\sup T_n' = \inf T_n'' = T$

Очевидно, что если $T_n \xrightarrow{(o)} T$ в $\mathcal{B}$, то $T_n \xrightarrow{(o)} T$ в $\mathcal{A}$ и, тем более, в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Обратное, вообще говоря неверно.

Если конечная алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, то она изоморфна алгебре $L^{\infty}(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) пространство с конечной мерой. Как известно, в том случае последовательность операторов (o) -сходится в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда она ограничена в $\mathcal{A}$ и сходится почти всюду.

Следующая теорема показывает, что аналогичный результат имеет место и в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ некоммутативна.

Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ называется ограниченной в $\mathcal{A}$, если существует оператор $S \in \mathcal{A}_+$ такой, что для всех n $|A_n| \leq S$ или, что эквивалентно, если $\sup_n \|A_n\| < \infty$.

Теорема I.2.6. Пусть $T_n, T \in \mathcal{A}$ ($n=1, 2, \dots$)
Тогда $|T_n - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда $\{|T_n - T|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{A}$ и $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$

Доказательство. Пусть $|T_n - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathcal{A}$. Тогда существует убывающая к нулю последовательность операторов $\{T'_n\} \subset \mathcal{A}_+$ такая, что $|T_n - T| \leq T'_n$ для любого n . Поэтому

$$\sup_n \| |T_n - T| \|_{\infty} \leq \|T'_1\|_{\infty} < +\infty$$

т.е. $\{|T_n - T|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{A}$. Так как $|T_n - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathcal{A}$, то по теореме I.2.4 (i) $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$.

Обратно, пусть $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ и $\sup_n \| |T_n - T| \|_{\infty} \leq 1$.

Рассмотрим две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty$.

Построим по индукции для каждого натурального n две системы проекторов $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{B}_n$, обладающие следующими свойствами:

1) если $P, Q \in \mathcal{P}_n \cup \mathcal{B}_n$, то P и Q ортогональны;

2) если q_n число элементов в $\mathcal{P}_n \cup \mathcal{B}_n$, то $q_n = 2^n$;

3) если $R \in \mathcal{P}_n \cup \mathcal{B}_n$, то найдется единственная пара

$P, Q \in \mathcal{P}_{n+1} \cup \mathcal{B}_{n+1}$ такая, что $R = P + Q$;

4) если $E_n = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} P$, то существует номер N_n такой,

что для каждого $k \geq N_n$

$$\|E_n |T_n - T| E_n\|_\infty < \varepsilon_n;$$

5) если $F_n = \sum_{Q \in \mathcal{G}_n} Q$, то $m(F_n) < \delta_n$

6) $E_n + F_n = 1$

По ε_1 и δ_1 выберем проектор P_1 и номер N_1 такие, что $m(P_1) > 1 - \delta_1$ и при $n \geq N_1$ $P_1 |T_n - T| P_1 \in \mathcal{A}$ и $\|P_1 |T_n - T| P_1\|_\infty < \varepsilon_1$

Обозначим $\mathcal{P}_1 = \{P_1\}$ и $\mathcal{G}_1 = \{Q_1\}$, где $Q_1 = P_1^\perp$

Пусть семейства $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{G}_k$ построены.

Построим семейства $\mathcal{P}_{k+1}$ и $\mathcal{G}_{k+1}$.

Пусть $R \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{G}_k$. Поскольку $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$

то $R |T_n - T| R \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ в $\mathcal{A}_R$ (см. следствие I.I.I)

Поэтому существуют проекторы P и Q и номер $N_{k+1} > N_k$ обладающие следующими свойствами:

1) $P + Q = R$

2) $m(Q) < \frac{\delta_{k+1}}{2^k}$

3) $\|P |T_n - T| P\|_\infty < \frac{\varepsilon_{k+1}}{2^k}$ для $n \geq N_{k+1}$

Обозначим через $\mathcal{P}_{k+1}$ совокупность всех проекторов P , построенных по проекторам $R \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{G}_k$, а через $\mathcal{G}_{k+1}$ - совокупность всех проекторов Q и докажем, что семейства

$\mathcal{P}_{k+1}$ и $\mathcal{G}_{k+1}$ обладают перечисленными выше свойствами.

Свойства 1), 2), 3), 5) и 6) следуют из построения.

Для доказательства свойства 4) воспользуемся следующим неравенством:

если $T' \in \mathcal{A}_+$ и $P \in \mathcal{A}_\varphi$, то

$$T' \leq 2(P T' P + P^\perp T' P^\perp)$$

Действительно, $T' = (P + P^\perp)T'(P + P^\perp) =$
 $= PT'P + P^\perp T'P^\perp + PT'P^\perp + P^\perp T'P$

Но $PT'P + P^\perp T'P^\perp - PT'P^\perp - P^\perp T'P =$
 $= (P - P^\perp)T'(P - P^\perp) \geq 0$

поэтому

$PT'P^\perp + P^\perp T'P \leq PT'P + P^\perp T'P^\perp$

откуда и

следует доказываемое неравенство.

На основании этого неравенства, при $n \geq N_{k+1}$

$$E_{k+1} |T_n - T| E_{k+1} = \left(\sum_{P \in \mathcal{P}_{k+1}} P \right) |T_n - T| \left(\sum_{P \in \mathcal{P}_{k+1}} P \right) \leq$$

$$\leq 2^k \sum_{P \in \mathcal{P}_{k+1}} (P |T_n - T| P) \leq 2^k \cdot \frac{\varepsilon_{k+1}}{2^k} \cdot E_{k+1} = \varepsilon_{k+1} \cdot E_{k+1}$$

где $E_{k+1} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{k+1}} P$

Таким образом, для любого натурального n мы построим семейства $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{G}_n$, обладающие указанными свойствами.

Рассмотрим последовательность операторов

$$H_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n < N_1 \\ 2\varepsilon_k E_k + 2F_k & \text{если } N_k \leq n < N_{k+1} \end{cases}$$

где $F_k = \sum_{Q \in \mathcal{G}_k} Q$

Пусть n такое, что $N_k \leq n < N_{k+1}$ Тогда

$$|T_n - T| \leq 2E_k |T_n - T| E_k + 2F_k |T_n - T| F_k \leq$$

$$\leq 2\varepsilon_k E_k + 2F_k = H_k$$

Таким образом, достаточно

показать, что $H_n \xrightarrow{(0)} 0$

в $\mathcal{A}$.

Все операторы из $\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathcal{P}_k \cup \mathcal{C}_k)$ попарно коммутируют, поэтому все H_n также попарно коммутируют, и следовательно, можно рассмотреть максимальную коммутативную подалгебру фон Неймана $\tilde{\mathcal{A}}$ в $\mathcal{A}$, содержащую все операторы H_n .

Рассмотрим проекторы

$$E_{N_k, \varepsilon_k} = \{H_{N_k} > 4\varepsilon_k\} = V\{F \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{P}} : FH_{N_k} > 4\varepsilon_k F\}$$

Так как $\varepsilon_k \downarrow 0$, то найдется номер K_0 такой, что при $k \geq K_0$ $\varepsilon_k < 1$ следовательно

$$m(E_{N_k, \varepsilon_k}) = m(F_k) < \delta_k, \quad \text{откуда}$$

$$\sum_{k=K_0}^{\infty} m(E_{N_k, \varepsilon_k}) < \sum_{k=K_0}^{\infty} \delta_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$$

и потому $H_{N_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ (см. [28] стр. 79).

Следовательно, $H_n \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ в $\tilde{\mathcal{A}}$ и так как

$$H_n \leq (2\varepsilon_1 + 2)1 \quad \text{для всех } n, \text{ то } H_n \xrightarrow{(0)} 0$$

в $\tilde{\mathcal{A}}$, и потому $H_n \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathcal{A}$.

Таким образом, $|T_n - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathcal{A}$

Рассмотрим теперь соотношение между двусторонней сходимостью почти всюду и (0) -сходимостью в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, то $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ изоморфно кольцу измеримых функций на пространстве с мерой.

В этом случае, как известно, последовательность операторов (0) -сходится в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда она ограничена и сходится почти всюду.

Докажем аналогичный результат в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ некоммутативна.

Т е о р е м а I.2.7. Пусть $T_n, T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ ($n=1,2,\dots$)
 $|T_n - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ в том и только в
 том случае, когда существует положительный оператор $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$
 такой, что $|T_n - T| \leq S$ для всех n , и $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|T_n - T| \xrightarrow{(0)} 0$
 в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$, то, как легко видеть $|T_n - T|$ ограничена в
 $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ и $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ (см. теорему I.2.4 (i))

Обратно, пусть $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ и $|T_n - T| \leq S$

где S - некоторый положительный оператор из $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

Оператор $S + \mathbb{1}$ обратимый, поэтому существует

$$(S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{A}$$

Рассмотрим последовательность

$$T'_n = (S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} |T_n - T| (S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}}$$

Ясно, что $T'_n \in \mathcal{A}$ и $\sup_n \|T'_n\|_\infty \leq 1$

Покажем, что $T'_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$

Пусть $\varepsilon > 0$. Т.к. $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$, то най-
 дутся проектор $P \in \mathcal{A}_p$ и номер N такие, что
 $m(P) > 1 - \varepsilon$, $P|T_n - T|P \in \mathcal{A}$ при $n \geq N$

и $\|P|T_n - T|P\|_\infty \rightarrow 0$ (см. теорему I.I.IO)

Рассмотрим проектор

$$Q = \mathbb{1} - \tau(P^\perp (S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}})$$

Тогда $m(Q^\perp) = m(\tau(P^\perp (S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}})) \leq m(P^\perp) < \varepsilon$

Кроме того, $(S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} Q = (P + P^\perp)(S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} Q =$
 $= P(S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} Q + P^\perp(S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} Q = P(S + \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} Q,$

т.к. $P^\perp (S+1)^{-\frac{1}{2}} Q = P^\perp (S+1)^{-\frac{1}{2}} (1 - \tau(P^\perp (S+1)^{-\frac{1}{2}})) = 0$

Откуда $Q (S+1)^{-\frac{1}{2}} = Q (S+1)^{-\frac{1}{2}} P$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|Q T_n' Q\|_\infty &= \|Q (S+1)^{-\frac{1}{2}} |T_n - T| (S+1)^{-\frac{1}{2}} Q\|_\infty = \\ &= \|Q (S+1)^{-\frac{1}{2}} P |T_n - T| P (S+1)^{-\frac{1}{2}} Q\|_\infty \leq \|P |T_n - T| P\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Следовательно, $T_n' \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$

Тогда по теореме I.2.6 $T_n' \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$

Но т.к. $|T_n - T| = (S+1)^{\frac{1}{2}} T_n' (S+1)^{\frac{1}{2}}$

то по предложению I.2.3 (v) $|T_n - T| \xrightarrow{(o)} 0$

Теорема доказана

Известно, что в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, каждая сходящаяся почти всюду последовательность из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ ограничена в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Нетрудно проверить, что это утверждение остается справедливым для любой конечной алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ типа $\underline{1}$. В общем случае вопрос об ограниченности в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ сходящейся почти всюду последовательности из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ остается открытым.

В заключение параграфа выясним условия, которым должна удовлетворять алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$, чтобы двусторонняя сходимость почти всюду и сходимость по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ были эквивалентны. Как показал Падманабхан в работе [60], односторонняя сходимость почти всюду и сходимость по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна. Аналогичный результат имеет место и для двусторонних сходимостей.

Напомним, что алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ называется дискретной, если каждый проектор $P \in \mathcal{A}$ мажорирует минимальный проектор.

Т е о р е м а I.2.8. Двусторонняя сходимость, почти всюду и сходимость по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна, то эквивалентность двусторонней сходимости почти всюду и сходимости по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ следует из теоремы 3.2 ([60], стр. 365) и предложения I.1.7 (i).

Обратно, пусть эти сходимости эквивалентны. Допустим, что алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ не является дискретной. Тогда

$\mathcal{A}$ содержит коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$,
 (*) - изоморфную $L^\infty([0,1], \lambda)$ где λ - мера Лебега на отрезке $[0,1]$ (См. доказательство теоремы I.1.8). Поэтому в $\mathcal{B}$ существует последовательность проекторов $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $G_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$ и G_n не сходится к нулю почти всюду в $\mathcal{B}$. Если $G_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ в $\mathcal{A}$, то по теореме I.2.6 $G_n \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{A}$, следовательно существует убывающая к нулю последовательность положительных операторов $\{T_n\}$ из $\mathcal{A}$ такая, что $G_n \leq T_n$.

Рассмотрим условное математическое ожидание $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Тогда по свойствам условного математического ожидания,
 $G_n = \Phi(G_n) \leq \Phi(T_n)$ и $\Phi(T_n) \downarrow 0$. Следовательно $G_n \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{B}$, что невозможно, поскольку G_n не сходилась к нулю почти всюду в $\mathcal{B}$.

Таким образом, $G_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$ и не сходится к нулю двусторонне почти всюду в $\mathcal{A}$, а потому и в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Значит, алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ дискретна.

Г Л А В А П

ИДЕАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В КОЛЬЦЕ $\mathcal{S}(\mathcal{A})$

В этой главе вводятся и изучаются идеальные нормированные пространства измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$. Исследуются различные порядковые свойства нормы в таких пространствах, и подпространства линейных функционалов на них. Наиболее подробно изучается класс пространств Орлича измеримых операторов, являющихся примерами банаховых идеальных подпространств в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Всюду в этой главе, как и раньше, $\mathcal{A}$ конечная алгебра фон Неймана, $\mathcal{A}_u$ — кольцо всех унитарных операторов из $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ — кольцо всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{A}$, τ — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, такой что $\tau(1) = 1$. Напомним, что под TS и $T+S$ понимается сильное произведение и сильная сумма операторов из $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ (см. § 0).

§ 2.1. Определение и основные свойства

идеальных подпространств

Введем понятие идеального подпространства в кольце $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

О п р е д е л е н и е 2.1.1 Линейное подпространство E в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ называется идеальным, если выполнены следующие условия:

(и1) если $T \in E$, то $T^* \in E$;

(и2) если $T \in E$, $S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $|S| \leq |T|$, то $S \in E$

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, т.е. если $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ изоморфно кольцу измеримых функций на пространстве с мерой, то приведенное выше определение совпадает с известным определением идеального пространства измеримых функций (См. например, [15] стр. 138).

Обозначим через $E_h = \mathcal{S}(\mathcal{A})_h \cap E$ эрмитову часть E , а через $E_+ = \mathcal{S}(\mathcal{A})_+ \cap E$ конус положительных элементов в E .

З а м е ч а н и е 2.1.2. Линейное подпространство E в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ является идеальным, если оно удовлетворяет условию (и1) и следующим двум условиям:

(и2') если $T \in E_+$, $S \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_+$ и $S \leq T$, то $S \in E$;

(и2'') если $T \in E$, то для каждого $U \in \mathcal{A}_h$ $UT \in E$

Следующие свойства идеальных подпространств в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ получаются непосредственно из определения.

П р е д л о ж е н и е 2.1.3 (i) $T \in E$ тогда и только тогда, когда $|T| \in E$;

(ii) $T \in E$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} T \in E_h$ и $\operatorname{Im} T \in E_h$;

(iii) если $T \in E$ и $U \in \mathcal{A}_h$, то $UT \in E$;

(iv) $\mathcal{A}E = E\mathcal{A} = E$

(v) $T \in E_h$ тогда и только тогда, когда $T^+ \in E_+$ и $T^- \in E_+$, где $T^+ = \frac{1}{2}(|T| + T)$ и $T^- = \frac{1}{2}(|T| - T)$;

(vi) если $P \in E \cap \mathcal{A}_p$, $Q \in \mathcal{A}_p$ и $Q \leq P$ то $Q \in E$.

Выделим теперь класс фундаментальных идеальных подпространств в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Напомним, что для каждого оператора $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ через $\ell(T)$, $r(T)$ и $z(T)$ обозначаются соответственно левый, правый и центральный носители T (см. § 0). Если $T = T^*$, то $\ell(T) = r(T) = s(T)$ называется носителем T .

Пусть теперь E идеальное подпространство в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Рассмотрим семь проекторов из $\mathcal{A}$, которые определяются следующим образом:

$$R_\ell(E) = V\{\ell(T), T \in E\}; \quad R_\varphi(E) = V\{p; p \in E \cap \mathcal{A}_\varphi\};$$

$$R_r(E) = V\{r(T), T \in E\}; \quad R_{z(p)}(E) = V\{z(p), p \in E \cap \mathcal{A}_\varphi\};$$

$$R(E) = V\{s(T), T \in E_+\}; \quad R_z(E) = V\{z(T), T \in E\};$$

$$R_{z\varphi}(E) = V\{p, p \in E \cap \mathcal{A}_\varphi \cap \mathbb{Z}\}$$

Т е о р е м а 2.1.4 Для любого идеального подпространства E в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$

$$R_\ell(E) = R_r(E) = R(E) = R_\varphi(E) = R_{z(p)}(E) = R_z(E) = R_{z\varphi}(E)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $R_\ell(E) = R_r(E) = R(E)$

$$R_\varphi(E) \leq R(E) \leq R_z(E) \quad \text{и}$$

$$R_{z\varphi}(E) \leq R_\varphi(E) \leq R_{z(p)}(E) \leq R_z(E)$$

Для каждого оператора $T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$

$$z(T) = V\{z(p), p \in \mathcal{A}_\varphi, \text{ существует число } \varepsilon > 0, \text{ что } \varepsilon p \leq |T|\} \quad (\text{см. § 0}).$$

Поэтому $z(T) \leq R_{z(p)}(E)$ для любого $T \in E$, от-

куда $R_Z(E) \leq R_{Z(P)}(E)$ и значит $R_Z(E) = R_{Z(P)}(E)$

Покажем теперь, что для каждого ненулевого проектора $P \in E$ существует проектор Q , такой, что $0 < Q \leq P$ и $z(Q) \in E$. Действительно, пусть $M^Z: \mathcal{A} \rightarrow Z$ ус-

ловное ожидание алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ на центр Z .
Так как $0 < P \leq 1$, то $0 < M^Z(P) \leq 1$ и потому существует ненулевой проектор $z_0 \in Z$ и натуральное число k такие, что $\frac{1}{k+1} z_0 < z_0 M^Z P \leq \frac{1}{k} z_0$.

Положим $Q = z_0 P$. Ясно, что $z_0 \leq z(P)$ и потому $z(Q) = z_0 z(P) = z_0$.
Кроме того,

$$M^Z Q = M^Z(z_0 P) = z_0 M^Z(P) \text{ откуда } \frac{1}{k+1} z_0 < M^Z Q \leq \frac{1}{k} z_0.$$

Рассмотрим проектор $z_0 - Q$

$$M^Z(z_0 - Q) = M^Z z_0 - M^Z Q = z_0 - M^Z Q \geq \frac{k-1}{k} z_0.$$

Поэтому существует проектор $Q_2 \leq z_0 - Q$ такой, что $M^Z Q_2 = M^Z Q$ т.е. $Q_2 \sim Q$

Рассуждая аналогично, получим k попарно ортогональных, эквивалентных друг другу проектора $Q = Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_k$ такие, что $\bar{Q} = \sum_{i=1}^k Q_i \leq z_0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } M^Z(z_0 - \bar{Q}) &= z_0 - \sum_{i=1}^k M^Z Q_i < z_0 - \frac{k}{k+1} z_0 = \\ &= \frac{1}{k+1} z_0 < M^Z Q \end{aligned} \quad \text{и потому } z_0 - \bar{Q} < Q$$

Так как $P \in E$ и $Q \leq P$ то $Q \in E$ и следовательно, в силу предложения 2.1.3 (vi), $Q_i \in E$, $i=1, 2, \dots, k$, и $\bar{Q} \in E$ и $z_0 - \bar{Q} \in E$ и, наконец, $z_0 = z(Q) \in E$

Для каждого ненулевого проектора $P \in E$ обозначим

$$A(P) = \{Q \in \mathcal{A}_P, Q \leq P, z(Q) \in E\}$$

Из доказанного выше следует, что $A(P) \neq \{0\}$

Покажем, что $z(P) = V\{z(Q), Q \in A(P)\}$,

Действительно, пусть H такой проектор, что

$$H \leq z(P) \quad \text{и} \quad H z(Q) = 0 \quad \text{для каждого} \quad Q \in A(P)$$

$$\text{Тогда} \quad z(H) \leq z(P) \quad \text{и} \quad z(H) z(Q) = z(H z(Q)) = 0$$

$$\text{Допустим, что} \quad Q_1 = z(H)P > 0$$

Тогда существует такой проектор Q_2 , что $0 < Q_2 \leq Q_1$

и $z(Q_2) \in E$ Но тогда $Q_2 \in A(Q_1) \subset A(P)$ и зна-

$$\text{чит} \quad z(H) z(Q_2) = 0 \quad \text{В то же время}$$

$$z(Q_2) \leq z(Q_1) \leq z(H). \text{Следовательно,} \quad z(Q_2) = 0 \quad \text{и потому}$$

$$Q_2 = 0. \text{Таким образом} \quad z(H)P = 0, \text{откуда}$$

$$z(z(H)P) = z(H)z(P) = z(H) = 0 \quad \text{и} \quad H = 0. \text{Следо-}$$

вательно,

$$z(P) = V\{z(Q), Q \in A(P)\}$$

Так как для каждого $Q \in A(P)$ $z(Q) \in E$,

то $z(Q) \leq R_{zP}(E)$, откуда $z(P) \leq R_{zP}(E)$

$$\text{и} \quad R_{z(P)}(E) \leq R_{zP}(E)$$

$$\text{Следовательно,} \quad R_{z(P)}(E) = R_P(E) = R_{zP}(E) = R_z(E) = R(E)$$

Теорема доказана.

Проектор $R(E)$ называется носителем идеального подпространства E .

О п р е д е л е н и е (2.1.5 Идеальное подпространство E в $\mathcal{A}$ называется фундаментальным, если $R(E) = 1$

Отметим, что как и в коммутативном случае фундаментальное идеальное подпространство E в $\mathcal{A}$ вообще говоря

не содержит $\mathcal{A}$, т.е. $R(E) = 1 \notin E$. В то же время, если $\mathcal{A}$ - фактор, то, как следует из теоремы 2.1.4, любое ненулевое идеальное подпространство E в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ является фундаментальным и содержит $\mathcal{A}$.

Для фундаментальных идеальных подпространств в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ имеет место следующее предложение.

Предложение 2.1.6 Если E фундаментальное идеальное подпространство в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, то

(i) существует последовательность попарно ортогональных центральных проекторов $P_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$, таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1;$$

(ii) для каждого оператора $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_+$ существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из E , что

$$0 \leq T_n \uparrow T$$

Доказательство. (i) следует из определения фундаментальности, т.к. $R(E) = R_{\mathcal{Z}P}(E) =$

$$= V\{P, P \in E \cap \mathcal{Z} \cap \mathcal{A}_P\} = 1$$

(ii) Пусть $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})_+$ и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность центральных проекторов из E такая, что $P_n \uparrow 1$.

Существует последовательность $\{T'_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{A}_+$ такая, что $T'_n \uparrow T$. Ясно, что $P_k T'_n \uparrow T'_n$

при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, для каждого n существует число ℓ_n такое, что $T'_n \leq \ell_n 1$, откуда $P_k T'_n \leq \ell_n P_k$

и следовательно, $P_k T'_n \in E$ для всех k и n .

Рассмотрим $T_n = P_n T'_n$. Ясно, что $\{T_n\}$ возрастает и $T_n \leq T$. Поэтому существует $T' = \sup T_n \leq T$.

Для любого фиксированного m $P_m T_n \uparrow P_m T'$ и

$P_m T_n = P_m (P_n T'_n) = (P_m P_n) T'_n \uparrow P_m T$. Поэтому для
любого m $P_m T' = P_m T$, откуда $T = T'$.

Перейдем к рассмотрению нормированных идеальных подпространств в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

О п р е д е л е н и е 2.1.7 Идеальное подпространство E в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$, снабженное нормой $\|\cdot\|_E$, удовлетворяющей условиям:

(Н1) если $T \in E$, то $\|T\|_E = \|T^*\|_E$;

(Н2) если $T, S \in E$ и $|S| \leq |T|$, то $\|S\|_E \leq \|T\|_E$

называется нормированным идеальным подпространством (сокращенно НИП) в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Полное по норме НИП E в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ называется банаховым идеальным подпространством (сокращенно БИП) в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

В случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, приведенные определения совпадают с определениями НИП и БИП измеримых функций.

Примером БИП в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ является сама алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$. Другими важными примерами БИП в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ служат пространства L_p ($1 \leq p < \infty$), пространства Лоренца и Марцинкевича.

Пространство $L_p(\mathcal{A})$ ($1 \leq p < \infty$) — пространство измеримых операторов, интегрируемых с p -й степенью

$$L_p(\mathcal{A}) = \{T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}) : |T|^p \in L_1(\mathcal{A})\}$$

$$\|T\|_{L_p(\mathcal{A})} = (\tau(|T|^p))^{\frac{1}{p}}$$

Норма $\|T\|_{L_p(\mathcal{A})}$ оператора $T \in L_p(\mathcal{A})$ может быть вычислена по следующей формуле

$$\|T\|_{L_p(\alpha)} = \left(\int_0^\infty (\tilde{T})^p(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение и свойства функции $\tilde{T}(\alpha)$ приведены в § 0.
 Пространство Лоренца $L_\varphi(\alpha)$ Пусть $\varphi(\alpha)$ - возрастающая, вогнутая на $[0, \infty)$ функция, такая, что $\varphi(0) = 0$

$$L_\varphi(\alpha) = \left\{ T \in \mathcal{S}(\alpha) : \int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) d\varphi(\alpha) < \infty \right\}$$

$$\|T\|_{L_\varphi(\alpha)} = \int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) d\varphi(\alpha)$$

Пространство Марцинкевича $M_\psi(\alpha)$. Пусть $\psi(\alpha)$ - положительная функция на $(0, +\infty)$

$$M_\psi(\alpha) = \left\{ T \in \mathcal{S}(\alpha) : \sup_{t>0} \frac{\int_0^t \tilde{T}(\alpha) d\alpha}{\psi(t)} < \infty \right\}$$

$$\|T\|_{M_\psi(\alpha)} = \sup_{t>0} \frac{\int_0^t \tilde{T}(\alpha) d\alpha}{\psi(t)} ;$$

Приведенные выше примеры БИП в $\mathcal{S}(\alpha)$ содержатся в классе симметричных пространств, который рассматривался В.И.Овчинниковым в работах [29], [30] .

Нормированное пространство $E \subset \mathcal{S}(\alpha)$ называется симметричным, если для любых $A \in E$ и $B \in \mathcal{S}(\alpha)$ таких что $\tilde{B}(\alpha) \leq \tilde{A}(\alpha)$ для каждого α , вытекает, что $B \in E$ и $\|B\|_E \leq \|A\|_E$.

Из этого определения видно, что всякое симметричное пространство в $\mathcal{S}(\alpha)$ является нормированным идеальным подпро-

пространством в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ в смысле нашего определения. Обратное неверно уже в случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна.

Важный класс БИП в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ составляют пространства Орлица, которые будут подробно изучены в § 2.3 и § 2.4

Теперь рассмотрим класс нормированных идеальных подпространств в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$, которые в общем случае не являются симметричными. Обозначим через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}(\mathcal{A}))$ центр кольца $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Ясно, что $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}(\mathcal{A}))$ совпадает с кольцом всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathfrak{Z}(\mathcal{A})$.

Пространство $\mathfrak{J}(L)$. Пусть L — идеальное нормированное подпространство в $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}(\mathcal{A}))$ (идеальность понимается относительно кольца $\mathfrak{Z}(\mathfrak{S}(\mathcal{A}))$). Поставим в соответствие пространству L нормированное идеальное подпространство $\mathfrak{J}(L)$ в кольце $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ следующим образом: положим

$$\mathfrak{J}(L) = \{T \in \mathfrak{S}(\mathcal{A}) : \text{существует } H \in L_+, |T| \leq H\}$$

и $\|T\|_{\mathfrak{J}(L)} = \inf \{\|H\|_L : H \in L, |T| \leq H\}$

Для доказательства того, что $(\mathfrak{J}(L), \|\cdot\|_{\mathfrak{J}(L)})$ — БИП в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 2.1.8. Если $T, S \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$, $H_1, H_2 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{S}(\mathcal{A}))$
 $|T| \leq H_1$ и $|S| \leq H_2$, то $|T+S| \leq H_1+H_2$

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $H_1 = \alpha \mathbb{1}$,
 $H_2 = \beta \mathbb{1}$, $|T| \leq \alpha \mathbb{1}$ и $|S| \leq \beta \mathbb{1}$. Тогда $T, S \in \mathcal{A}$
 и $\|T\|_{\infty} \leq \alpha$, $\|S\|_{\infty} \leq \beta$ откуда $\|T+S\|_{\infty} \leq \alpha + \beta$
 Поэтому

$$|T+S| \leq \|T+S\|_{\infty} \cdot \mathbb{1} = \|T+S\|_{\infty} \cdot \mathbb{1} \leq (\alpha + \beta) \mathbb{1} = H_1 + H_2$$

Пусть теперь $H_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$

где $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$, $P_i, Q_j \in Z(\mathcal{A})_{\mathcal{P}}$, $P_i \perp P_{i'}$ при $i \neq i'$, $Q_j \perp Q_{j'}$ при $j \neq j'$, $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ и $\sum_{j=1}^k Q_j = 1$

Рассмотрим проекторы $R_{ij} = P_i \wedge Q_j$. Ясно, что $\sum_{i=1}^n R_{ij} = Q_j$, $\sum_{j=1}^k R_{ij} = P_i$ и $\sum_{i,j} R_{ij} = 1$

Так как $|T| \leq H_1$, $|S| \leq H_2$, то

$$|TR_{ij}| = |T|R_{ij} \leq \alpha_i R_{ij}$$

$$|SR_{ij}| = |S|R_{ij} \leq \beta_j R_{ij}$$

Следовательно, $|(T+S)R_{ij}| = |T+S|R_{ij} \leq (\alpha_i + \beta_j)R_{ij}$ откуда

$$|T+S| = \sum_{i,j} |T+S|R_{ij} \leq \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)R_{ij} = H_1 + H_2$$

Пусть теперь $H_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i$, $H_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j Q_j$,

$\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$, $P_i, Q_j \in Z(\mathcal{A})_{\mathcal{P}}$, $P_i \perp P_{i'}$ при $i \neq i'$, $Q_j \perp Q_{j'}$ при $j \neq j'$, $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ и $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = 1$

и $R_{ij} = P_i \wedge Q_j$. Тогда, как и раньше, $|T+S|R_{ij} \leq (\alpha_i + \beta_j)R_{ij}$ откуда $|T+S| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k R_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j)R_{ij}$

Переходя к пределу по мере при $n \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$, мы получаем, что

$$|T+S| \leq H_1 + H_2$$

Наконец, если $H_1, H_2 \in Z(\mathcal{S}(\mathcal{A}))_+$ произвольные, то

они представимы в виде $H_1 = \inf H_1^{(n)}$, $H_2 = \inf H_2^{(n)}$
 где $H_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} P_i^{(n)}$, $H_2^{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{(n)} Q_j^{(n)}$

$|T| \leq H_1^{(n)}$, $|S| \leq H_2^{(n)}$ и так как

для всех n , то

$$|T+S| \leq H_1^{(n)} + H_2^{(n)} \quad \text{откуда} \quad |T+S| \leq H_1 + H_2$$

Непосредственно из определения $(\mathcal{J}(L), \|\cdot\|_{\mathcal{J}(L)})$ следует, что если $T \in \mathcal{J}(L)$, $S \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$ то $S \in \mathcal{J}(L)$ и $\|S\|_{\mathcal{J}(L)} \leq \|T\|_{\mathcal{J}(L)}$ и $|S| \leq |T|$.

если λ - комплексное число и $T \in \mathcal{J}(L)$. Очевидно, что $\|\lambda T\|_{\mathcal{J}(L)} = |\lambda| \cdot \|T\|_{\mathcal{J}(L)}$ и $\lambda T \in \mathcal{J}(L)$ и

что если $T, S \in \mathcal{J}(L)$, то $T+S \in \mathcal{J}(L)$ и

$$\|T+S\|_{\mathcal{J}(L)} \leq \|T\|_{\mathcal{J}(L)} + \|S\|_{\mathcal{J}(L)}$$

Пусть $T \in \mathcal{J}(L)$ и $T = U|T|$ его полярное разложение с $U \in \mathcal{A}_u$. Тогда $|T^*| = U|T|U^*$

Существует $H \in L_+$ такой, что $|T| \leq H$, следовательно, $|T^*| = U|T|U^* \leq U H U^* = H$ откуда $T^* \in \mathcal{J}(L)$

$$\text{и } \|T^*\|_{\mathcal{J}(L)} = \| |T^*| \|_{\mathcal{J}(L)} = \| |T| \|_{\mathcal{J}(L)} = \|T\|_{\mathcal{J}(L)}$$

Пусть теперь $T \in \mathcal{J}(L)$ и $\|T\|_{\mathcal{J}(L)} = 0$. Тогда существует последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{J}(\mathcal{A}))$ такая, что $|T| \leq H_n$ для всех n и $\|H_n\|_L \downarrow 0$.

Рассмотрим $H = \inf H_n$ - точная нижняя грань $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{Z}(\mathcal{J}(\mathcal{A}))$, которая, как известно, совпадает с точной нижней гранью $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{J}(\mathcal{A})$. Так как L идеально относительно $\mathcal{Z}(\mathcal{J}(\mathcal{A}))$ и $H \in \mathcal{Z}(\mathcal{J}(\mathcal{A}))$, $H \leq H_n$ для всех n , то $H \in L$ и $\|H\|_L \leq \|H_n\|_L$, следовательно, $H = 0$ и так как $|T| \leq H$, то $T = 0$.

Таким образом, $(J(L), \|\cdot\|_{J(L)})$ НИП в $\mathcal{S}(\sigma)$.
 Ниже, в предложении 2.1.17 будут указаны условия при которых
 $(J(L), \|\cdot\|_{J(L)})$ является банаховым.

Возьмем, в частности, в качестве L нормированное
 идеальное пространство $L(H)$, которое определяется сле-
 дующим образом:

$$L(H) = \{T \in Z(\mathcal{S}(\sigma)) : \text{существует } \lambda \geq 0, |T| \leq \lambda H\}$$

$$\text{и } \|T\|_{L(H)} = \inf \{ \lambda \geq 0 : |T| \leq \lambda H \}$$

где $H \in Z(\mathcal{S}(\sigma))_+$

Очевидно, $(L(H), \|\cdot\|_{L(H)})$ банахово идеальное подпрост-
 ранство в кольце $Z(\mathcal{S}(\sigma))$ и сходимость по норме в
 $(L(H), \|\cdot\|_{L(H)})$ эквивалентна сходимости с регулятором H
 в $Z(\mathcal{S}(\sigma))$. Тогда

$$J(L(H)) = \{T \in \mathcal{S}(\sigma) : \text{существует } \lambda \geq 0, |T| \leq \lambda H\}$$

$$\text{и } \|T\|_{J(L(H))} = \inf \{ \lambda : |T| \leq \lambda H \}$$

При этом нетрудно проверить, что $(J(L(H)), \|\cdot\|_{J(L(H))})$
 банахово и сходимость по норме в нем эквивалентна сходимости
 с регулятором H в $\mathcal{S}(\sigma)$, т.е. $\|T_n - T\|_{J(L(H))} \rightarrow 0$
 в том и только в том случае, когда $|T_n - T| \xrightarrow{(\tau)} 0$ с
 регулятором H , где $T_n, T \in J(L(H))$

Отметим также, что носитель пространства $J(L(H))$

$$R(J(L(H))) = R(L(H)) = \mathcal{S}(H) \quad \text{так что}$$

$J(L(H))$ фундаментально в том и только в том случае, когда
 оператор H обратим в $\mathcal{S}(\sigma)$.

Перейдем к изучению основных свойств нормированных идеальных подпространств в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$.

Предложение 2.1.9 Пусть E НИИ в $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$. Тогда
(i) если $T \in E$, то $\|T\|_E = \| |T| \|_E = \|UT\|_E$ для
каждого $U \in \mathcal{A}_u$;

(ii) если $T_n \in E$, $n=1,2,\dots$ то $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0$ тогда
и только тогда, когда $T_n^+ \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0$ и $T_n^- \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0$;

(iii) если $T \in E$ и $A \in \mathcal{A}$, то $\|AT\|_E \leq \|A\|_\infty \|T\|_E$

Доказательство. Свойства (i) и (ii) очевидны.

Докажем (iii). Пусть сначала $A \in \mathcal{A}_+$ и $A \neq 0$.
Рассмотрим оператор $A_1 = \frac{1}{\|A\|_\infty} A$

Найдутся два унитарных оператора U_1 и U_2 из $\mathcal{A}$ такие,

что $A_1 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$

Отсюда $\|AT\|_E = \|A\|_\infty \|A_1 T\|_E =$

$$= \frac{1}{2} \|A\|_\infty \|(U_1 + U_2)T\|_E \leq \frac{1}{2} \|A\|_\infty (\|U_1 T\|_E + \|U_2 T\|_E) =$$

$$= \frac{1}{2} \|A\|_\infty (\|T\|_E + \|T\|_E) = \|A\|_\infty \|T\|_E$$

Если $A = 0$, то неравенство очевидно.

Пусть теперь A произвольный оператор из $\mathcal{A}$ и $A = U|A|$ полярное разложение A с $U \in \mathcal{A}_u$.

Тогда $\|AT\|_E = \|U|A|T\|_E = \||A|T\|_E \leq$

$$\leq \||A|\|_\infty \|T\|_E = \|A\|_\infty \|T\|_E$$

Предложение 2.I.IO E_+ замкнут в НЛП E по норме.

Доказательство. Пусть $T_n \in E_+, n=1,2,\dots$, $T \in E$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$. Ясно, что $T \in E_+$ и потому $T^+, T^- \in E_+$. Рассмотрим носитель $P = \mathcal{S}(T^-)$ оператора T^- . Тогда

$$\|P(T_n - T)P\|_E = \|PT_nP - PTP\|_E = \|PT_nP + T^-\|_E \geq \|T^-\|_E$$

т.к. $PT_nP + T^- \geq T^- \geq 0$

с другой стороны, по предложению 2.I.9 (iii)

$$\|P(T_n - T)P\|_E \leq \|T_n - T\|_E \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Следовательно, $\|T^-\|_E = 0$ т.е. $T^- = 0$, откуда $T = T^+ \geq 0$

В следующем предложении описывается связь между сходимостью с регулятором и сходимостью по норме в НЛП E в $\mathcal{S}(\alpha)$.

Предложение 2.I.II (i). Если E НЛП в $\mathcal{S}(\alpha)$; $T_n, T \in E$, $n=1,2,\dots$ и $|T_n - T| \xrightarrow{(2)} 0$

с регулятором сходимости из E^+ , то $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

(ii) Если E БЛП в $\mathcal{S}(\alpha)$, $T_n, T \in E$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

то найдется такая подпоследовательность индексов $\{n_k\}_{k=1}^\infty$,

что $|T_{n_k} - T| \xrightarrow{(2)} 0$ с регулятором сходимости из E_+ .

Доказательство (i). Пусть E НЛП в $\mathcal{S}(\alpha)$, если $|T_n - T| \leq \varepsilon_n R$, $R \in E_+$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$, то

$$\|T_n - T\|_E = \||T_n - T|\|_E \leq \varepsilon_n \|R\|_E \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

т.е. $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$.

(ii) Пусть E БИП в $\mathcal{S}(\alpha)$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

Тогда $\|T_n - T\|_E \xrightarrow{\|\cdot\|_E} 0$ и потому найдется такая под-
последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\| \|T_{n_k} - T\|_E < \frac{1}{2^k}$$

Рассмотрим ряд:

$$(I) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \|T_{n_k} - T\|_E$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} k \|T_{n_k} - T\|_E < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty$

то ряд (I) сходится абсолютно.

Пространство E банахово. Поэтому существует оператор $S \in E$ такой, что $S = \sum_{k=1}^{\infty} k \|T_{n_k} - T\|_E$

(сумма понимается в смысле сходимости по норме). Так как конус положительных элементов E_+ замкнут в E по норме, то

$S \in E_+$ и $\|T_{n_k} - T\|_E \leq \frac{1}{k} S$. Следовательно,

$\|T_{n_k} - T\|_E \xrightarrow{(r)} 0, k \rightarrow \infty$ причем регулятор сходимости S принадлежит E_+ .

Предложение 2.I.I2. Если на идеальном подпространстве E в $\mathcal{S}(\alpha)$ заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, превращающие его в БИП, то эти нормы эквивалентны.

Доказательство. Пусть $T_n \in E_n, n=1,2,\dots$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ Тогда найдется такая подпоследовательность

$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $T_{n_k} \xrightarrow{(r)} 0$ с регулятором сходимости из E_+ , откуда $T_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$ (см. предложение 2.I.II).

Аналогично, если $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, то существует подпоследовательность $\{n_e\}_{e=1}^\infty$, такая, что $T_{n_e} \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$.
 Следовательно, $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ тогда и только тогда, когда $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, т.е. нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

В следующей теореме устанавливается связь между сходимостью по норме в БИП E и сходимостью по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Теорема 2.1.13 Если E - БИП в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, $T_n, T \in E, n=1, 2, \dots$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$, то $T_n \xrightarrow{п.м.} T$.

Доказательство. Предположим сначала, что $T_n, T \in E, n=1, 2, \dots, T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$ но T_n не сходится к T по мере в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Рассмотрим проекторы $G_n(\alpha) = \{ |T_n - T| \geq \alpha \} = \vee \{ P \in \mathcal{A}_p, P |T_n - T| = |T_n - T| P \geq \alpha P \}$

Из нашего предположения следует, что существует такая пара чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и подпоследовательность индексов $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, для которых $m(G_{n_k}(\varepsilon)) \geq \delta$ и

$\|T_{n_k} - T\|_E < \frac{\varepsilon}{2^{n_k}}$ Действительно, в противном случае для каждой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ $m(G_n(\varepsilon)) < \delta$ и

$\| |T_n - T| (1 - G_n(\varepsilon)) \|_\infty < \varepsilon$, т.е. $|T_n - T| \xrightarrow{п.м.} 0$

Таким образом, переходя если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $m(G_n(\varepsilon)) \geq \delta$ и $\|T_n - T\|_E < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Так как $|T_n - T| G_n(\varepsilon) \geq \varepsilon G_n(\varepsilon)$, то

$$G_n(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} |T_n - T|,$$

откуда $G_n(\varepsilon) \in E$ и

$$\|G_n(\varepsilon)\|_E \leq \frac{1}{\varepsilon} \|T_n - T\|_E < \frac{1}{2^n}$$

и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|G_n(\varepsilon)\|_E < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} G_n(\varepsilon)$

сходится абсолютно в E и т.к. E — банахово, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n(\varepsilon)$$

сходится в E по норме к некоторому

оператору $R \in E_+$. Рассмотрим $S_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} G_n(\varepsilon)$,

тогда $0 \leq S_k \leq R$ и потому $S_k \in E$.

Последовательность $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ убывающая и

$$\|S_k\|_E = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} G_n(\varepsilon) \right\|_E \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|G_n(\varepsilon)\|_E \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

Пусть $S = \inf_k S_k$. Ясно, что $S \in E$ и так как

$$0 \leq S \leq S_k, \text{ то } \|S\|_E \leq \|S_k\|_E \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

т.е. $S = 0$ и следовательно $S_k \downarrow 0$. По предложению

I.I.6 (vii) $S_k \xrightarrow{\text{д.п.в.}} 0$ и по теореме I.I.10, для

каждой пары чисел $\theta > 0$ и $\delta > 0$ найдется проектор

$F \in \mathcal{A}_\varphi$ такой, что $m(F) > 1 - \delta/2$, $FS_k F \in \mathcal{A}$

$$\text{и } \|FS_k F\|_\infty < \theta.$$

Так как $0 \leq FS_k F \in \mathcal{A}$, то $FS_k F < \theta 1$ т.е.

$$F \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} G_n(\varepsilon) \right) F \leq \theta 1 \quad \text{Кроме того, } m(FG_n(\varepsilon)F) =$$

$$= m(G_n(\varepsilon)F) = m(G_n(\varepsilon)) - m(G_n(\varepsilon)F^\perp) \geq \delta - m(G_n(\varepsilon)F^\perp) =$$

$$= \delta - m(F^\perp G_n(\varepsilon) F^\perp) \geq \delta - m(F^\perp) > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$m(F(\sum_{n=k+1}^N G_n(\varepsilon))F) = \sum_{n=k+1}^N m(F G_n(\varepsilon) F) > (N-k) \frac{\delta}{2}$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ мы получим, что

$$m(F(\sum_{n=k+1}^N G_n(\varepsilon))F) \rightarrow \infty$$

Но с другой стороны,

$$m(F(\sum_{n=k+1}^N G_n(\varepsilon))F) \leq m(F S_k F) <$$

$$< m(\theta 1) = \theta$$

$$T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$$

Противоречие показывает, что

В следующей теореме устанавливаются необходимые и достаточные условия полноты нормированного идеального подпространства E в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Теорема 2.1.14 Пусть E - НИИ в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ следующие условия эквивалентны:

(i) E - БИИ в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$

(ii) если $T_n \in E_+, n=1,2,\dots, \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_E < \infty$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ сходится по норме в E_h

(iii) если $T_n \in E_+, n=1,2,\dots, 0 \leq T_n \uparrow$ и $\{T_n\}$ - фундаментальна по норме в E , то существует $T \in E_h$ такой, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

(iv) если $T_n \in E_+, n=1,2,\dots, 0 \leq T_n \uparrow$ и фундаментальна по норме в E , то существует $T \in E$ такой, что $T_n \uparrow T$.

Доказательство (ii) $\Rightarrow$ (i)

$T_n \in E_h$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_E < \infty$ Пусть

$T_n^+ \in E_+$ и т.к. $0 \leq T_n^+ \leq |T_n|$, $0 \leq T_n^- \leq |T_n|$, Тогда T_n^+ ,

то $\|T_n^+\|_E \leq \|T_n\|_E$ и $\|T_n^-\|_E \leq \|T_n\|_E$, отку-

да $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^+\|_E < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^-\|_E < \infty$

По условию (ii) существуют операторы S^+ и S^- в E_+

это $S^+ = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^+$ и $S^- = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^-$

. Рассмотрим опе-

ратор $S = S^+ - S^- \in E_h$ и пусть $G_k = \sum_{n=1}^k T_n$

$$\|G_k - S\|_E = \left\| \sum_{n=1}^k T_n - S \right\|_E = \left\| \sum_{n=1}^k (T_n^+ - T_n^-) - (S^+ - S^-) \right\|_E \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{n=1}^k T_n^+ - S^+ \right\|_E + \left\| \sum_{n=1}^k T_n^- - S^- \right\|_E \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ сходится по норме к оператору $S \in E_h$.

Пусть теперь $T_n \in E$ произвольные, не обязательно эрмитовы, и $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_E < \infty$. Обозначим $T_n' = \operatorname{Re} T_n$,

$T_n'' = \operatorname{Im} T_n$. Тогда $\|T_n'\|_E \leq \frac{1}{2} (\|T_n\|_E + \|T_n^*\|_E) = \|T_n\|_E$

и $\|T_n''\|_E \leq \|T_n\|_E$. Поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n'\|_E$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n''\|_E$ сходятся. Тогда по предыдущему, ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'$ и $\sum_{n=1}^{\infty} T_n''$ сходятся по норме к операторам

S' и S'' из E_h соответственно и следовательно,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ сходится к оператору $S' + i S'' \in E$.

Таким образом, каждый абсолютно сходящийся ряд в E сходится, т.е. E - БИП.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Пусть $0 \leq T_n \uparrow$, $T_n \in E_+$ $n=1,2,\dots$

и $\{T_n\}$ фундаментальна в E по норме. Так как E - БИП, существует оператор $T \in E$, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

По предложению 2.1.10 $T \geq 0$ и для любого фиксированного ℓ $T_n - T_\ell \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T - T_\ell \geq 0$ т.е. $T \geq T_\ell$

откуда следует, что существует $T' = \sup_n T_n$ и $T' \leq T$, поэтому $T' \in E$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Пусть $T_n \in E_+$, $0 \leq T_n \uparrow$ и $\{T_n\}$ фундаментальна по норме в E . По (iv) существует $\sup T_n = T \in E$. Покажем, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\|T_{n+1} - T_n\|_E \leq \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\dots$$

Рассмотрим
$$S_n = T_1 + \sum_{k=1}^n k(T_{k+1} - T_k)$$

Ясно, что $0 \leq S_n \uparrow$ и если $n < \ell$, то

$$\|S_\ell - S_n\|_E = \left\| \sum_{k=n+1}^{\ell} k(T_{k+1} - T_k) \right\|_E \leq \sum_{k=n+1}^{\ell} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Следовательно, по (iv), существует $S = \sup S_n$, $S \in E$.

$$n(T - T_n) = \sup_{m > n} \sum_{k=n}^m n(T_{k+1} - T_k) \leq \sup_{m > n} \sum_{k=n}^{\infty} k(T_{k+1} - T_k) \leq S$$

откуда $0 \leq T - T_n \leq \frac{1}{n} S$ и потому

$$\|T - T_n\|_E \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Рассмотрим

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k$$

старт, и при

$$l > k$$

Пусть $T_n \in E_+, n=1,2,\dots$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|_E < \infty$

Ясно, что $S_k \in E$

, возра-

$$\|S_l - S_k\|_E = \left\| \sum_{n=k+1}^l T_n \right\|_E \leq \sum_{n=k+1}^l \|T_n\|_E \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

т.е. $\{S_n\}$ фундаментальна по норме в E .

Тогда по (iii) существует такой оператор $S \in E_l$, что

$S_n \xrightarrow{\text{д.п.в.}} S$ т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ сходится в E_l по норме.

Теперь рассмотрим, как и в коммутативном случае, несколько условий, которыми может обладать норма в нормированном идеальном подпространстве E в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

О п р е д е л е н и е 2.1.15 Говорят, что норма в E порядково непрерывна, или что в E выполнено условие (A), если

из $0 \leq T_n \downarrow 0, T_n \in E$ следует $\|T_n\|_E \rightarrow 0$

Говорят, что норма в E порядково полунепрерывна, или что в E выполнено условие (C), если

из $0 \leq T_n \uparrow T \in E$ следует, что $\sup_n \|T_n\|_E = \|T\|_E$

Говорят, что норма в E монотонно полна или, что в E выполнено условие (B), если

из $0 \leq T_n \uparrow, T_n \in E, \sup_n \|T_n\|_E < \infty$ следует,

что существует элемент $T \in E$ для которого $T_n \uparrow T$.

Ясно, что если норма в E порядково непрерывна, то она также порядково полунепрерывна.

Рассмотрим соотношения между условиями (A), (B), (C) и

полнотой.

Предложение 2.1.16. Пусть E НИП в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$
(i) Если в E выполнено условие (A) и

$$\mathcal{M} = \{ T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \mid T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k, P_k \in \mathcal{A}_\varphi,$$

$P_i \perp P_j$ при $i \neq j$ и λ_k - действительные числа }
то множество $\mathcal{M} + i\mathcal{M}$ плотно в E по норме.

(ii) Если для любых $T_n, T \in E$, $n=1,2,\dots$ таких, что

$$T_n \xrightarrow{п.м.} T \text{ следует } \|T\|_E \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_E, \text{ то}$$

в E выполнено условие (C).

(iii) Если единичный шар $B_E = \{ T \in E : \|T\|_E \leq 1 \}$
замкнут в $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \tau)$, т.е. если $T_n \in E$, $n=1,2,\dots$, $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

$$\|T_n\|_E \leq 1 \text{ и } T_n \xrightarrow{п.м.} T, \text{ то } T \in E \text{ и } \|T\|_E \leq 1$$

то в E выполнены условия (B) и (C).

(iv) Если в E выполнено условие (B), то E полно по
норме.

Доказательство. (i) Достаточно показать,
что $\mathcal{M}$ плотно в $E_\mathfrak{h}$ по норме. Пусть $T \in E_\mathfrak{h}$. Рассмотрим
максимальную коммутативную подалгебру фон Неймана $\tilde{\mathcal{A}}$ в

$\mathcal{A}$, содержащую спектральное семейство оператора T ,
и пусть $E_1 = E \cap \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{A}})$. Легко видеть, что E_1 - НИП
в $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{A}})$ с нормой, индуцированной из E и в E_1 выпол-
нено условие (A). E_1 изоморфно идеальному пространству из-
меримых функций на пространстве с мерой, поэтому оператор T
есть предел по норме операторов вида $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$, $P_k \in \tilde{\mathcal{A}}_\varphi$

$P_i \perp P_j$ при $i \neq j$ и λ_k - действительные числа
(См. например I5, стр. I42). Поэтому $\mathcal{M}$ плотно в $E_\mathfrak{h}$

по норме.

(ii) Пусть $T_n, T \in E_R$ и $0 \leq T_n \uparrow T$

Тогда $T_n \xrightarrow{п.м.} T$ и потому $\|T\|_E \leq \lim \|T_n\|_E$

С другой стороны $\|T_n\|_E \leq \|T\|_E$ для каждого n

Поэтому $\|T\|_E = \sup_n \|T_n\|_E$ т.е. в E выполнено условие (C).

(iii) Пусть $T_n \in E_+$, $n=1,2,\dots$ $0 \leq T_n \uparrow$ и

$\sup_n \|T_n\|_E = \alpha < \infty$ Рассмотрим $T'_n = \frac{1}{\alpha} T_n \in B_E$

Последовательность $\{T'_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена в топологии $\mathcal{T}$ сходимости по мере. Действительно, в противном случае по теореме I.I.I2, нашлись бы проектор $P \in \mathcal{A}_\varphi$ и последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такие, что $\varepsilon_n \uparrow +\infty$ и $T_n \geq \varepsilon_n P$

для всех n , откуда $P \in E$ и $\|T_n\|_E \geq \varepsilon_n \|P\|_E \rightarrow \infty$

при $n \rightarrow \infty$. По той же теореме $\mathcal{T}$ - ограниченность $\{T'_n\}$ влечет порядковую, т.е. существует $T' \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ такой,

что $T'_n \uparrow T'$. Но тогда $T'_n \xrightarrow{п.м.} T'$, откуда

$T' \in E$ и $\|T'\|_E \leq 1$. Рассмотрим $T = \alpha T'$

Тогда $T_n \uparrow T$, $T \in E$ и $\|T\|_E \leq \alpha = \sup \|T_n\|_E$

поэтому $\|T_n\|_E = \sup_n \|T_n\|_E$ и следовательно в E

выполнены условия (B) и (C).

(iv) Пусть в E выполнено условие (B).

Достаточно показать, что в E выполнено одно из эквивалент-

ных условий теоремы 2.I.I4. Пусть $T_n \in E_+$, $n=1,2,\dots$, $0 \leq T_n \uparrow$

и $\{T_n\}$ фундаментальна по норме. Поэтому $\sup_n \|T_n\|_E < \infty$

и по условию (B) существует $T \in E$ для которого $T_n \uparrow T$

Следовательно E - полно.

Из предложения 2.I.16 (iv) получаем следующее предложение.

Предложение 2.I.17. Если в НИП $L \subset Z(\mathcal{A})$ выполнено условие (B), то $(J(L), \|\cdot\|_{J(L)})$ БИП с условием (B).

Доказательство. Пусть $T_n \in J(L)_+, 0 \leq T_n \uparrow$ и $\sup_n \|T_n\|_{J(L)} < K$ для всех n . Тогда существует такая последовательность $\{H_n\}_{n=1}^\infty \subset L_+$, что $T_n \leq H_n$ для всех n и $\sup_n \|H_n\|_L < K$. Для фиксированного n и $m > n$ имеем: $H_m \geq T_m \geq T_n$. Поэтому

$$G_n = \inf_{m \geq n} H_m \geq T_n, G_n \in L \quad \text{и} \quad G_n \uparrow \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Кроме того, $\sup_n \|G_n\|_L \leq \sup_n \|H_n\|_L < K$

Так как в L выполнено условие (B), то существует

$G = \sup_n G_n$ и $G \in L$. Следовательно, существует

$T = \sup_n T_n$ и $T \leq G$, откуда, по определению пространства $J(L)$, $T \in J(L)$.

Таким образом, в $(J(L), \|\cdot\|_{J(L)})$ выполнено условие (B) и потому оно банахово.

В заключение параграфа покажем, что, как и в коммутативном случае, в пространствах $L_p(\mathcal{A})$, $1 \leq p < \infty$ выполнены условия (A) и (B).

Предложение 2.I.18 В пространстве $L_p(\mathcal{A})$ $1 \leq p < \infty$ выполнены условия (A) и (B).

Доказательство. Пусть $T_n \in L_p(\mathcal{A})$ $n=1, 2, \dots$ и $T_n \downarrow 0$. Тогда $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$ и потому $\tilde{T}_n(\alpha) \rightarrow 0$ для любого $\alpha \in (0, \infty)$ (см. § 0).

Следовательно, $\tilde{T}_n^p(\alpha) \rightarrow 0$ для любого α . Кроме того, $0 \leq T_n \leq T_1$ поэтому $\tilde{T}_n^p(\alpha) \leq \tilde{T}_1^p(\alpha)$ для любого α и тогда по теореме Лебега

$$\int_0^\infty \tilde{T}_n^p(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \tilde{T}_n^p(\alpha) d\alpha \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Но $\int_0^\infty \tilde{T}_n(\alpha) d\alpha = \|T_n\|_{L_p(\mathcal{U})}$ Следовательно

$\|T_n\|_{L_p(\mathcal{U})} \rightarrow 0$ т.е. в $L_p(\mathcal{U})$ выполнено условие (А).

Теперь докажем, что в $L_1(\mathcal{U})$ выполнено условие (В).

Пусть $0 \leq T_n \uparrow$, $T_n \in L_1(\mathcal{U})$ и $\sup_n \|T_n\|_1 < \infty$

Числовая последовательность $\{\|T_n\|_1\}$ возрастающая и ограниченная сверху, поэтому она фундаментальна. Но тогда

$$\|T_n - T_k\|_1 \stackrel{n > k}{=} m(T_n - T_k) =$$

$$= m(T_n) - m(T_k) = \|T_n\|_1 - \|T_k\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n, k \rightarrow \infty$$

Таким образом, $\{T_n\}$ фундаментальна в $L_1(\mathcal{U})$ по норме. Пространство $L_1(\mathcal{U})$ полно. Поэтому по теореме 2.1.14 существует $T \in E$ такой, что $T_n \uparrow T$ т.е. в $L_1(\mathcal{U})$ выполнено условие (В).

Тот факт, что в $L_p(\mathcal{U})$, $1 < p < \infty$ выполнено условие (В) будет доказан ниже (см. следствие 2.3.14).

§ 2.2 Линейные функционалы в идеальных пространствах

В этом параграфе рассматриваются линейные функционалы в идеальных пространствах и исследуется вопрос о их представлении по следу.

Пусть E идеальное подпространство в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Рассмотрим множество:

$$E' = \{T' \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) : TT' \in L_1(\mathcal{A}) \text{ для каждого } T \in E\}$$

Предложение 2.2.1 E' является идеальным подпространством в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Ясно, что E' линейное подпространство в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ (возможно, $E' = \{0\}$).

Пусть $T' \in E'$ и $U, V \in \mathcal{A}_u$. Тогда для любого оператора T из E имеем: $T(UT'V) = [(TV)T']V \in L_1(\mathcal{A})$

т.к. $TU \in E$. Поэтому $UT'V \in E'$ для любых U и V из $\mathcal{A}_u$ и $T' \in E'$, откуда $\mathcal{A}E'\mathcal{A} = E'$.

Пусть $T' = W|T'|$ полярное разложение оператора T' с $W \in \mathcal{A}_u$. Тогда $T'^* = W^*T'W^*$ и потому $T'^* \in E'$.

Пусть теперь $S' \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ и $|S'| \leq |T'|$. Тогда существует оператор $H \in \mathcal{A}$ такой что $\|H\|_\infty \leq 1$ и $|S'| = H^*|T'|H$. Из предыдущих рассуждений ясно, что $T' \in E'$ тогда и только тогда, когда $|T'| \in E'$. Поэтому $H^*|T'|H \in E'$, т.е. $|S'| \in E'$, откуда $S' \in E'$.

Таким образом, E' идеальное подпространство в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Идеальное подпространство E' называется дуальным к идеальному подпространству E .

Каждый оператор $T' \in E'$ определяет на E линейный

Функционал $f_{T'}$ по формуле:

$$f_{T'}(T) = m(TT') \quad \text{для всех } T \in E.$$

Пусть E НЛП в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ и E^* сопряженное пространство к E , т.е. пространство всех непрерывных линейных функционалов на E . Рассмотрим множество:

$$E^X = \{T' \in E' : f_{T'} \in E^*\}$$

и положим для любого $T' \in E^X$

$$\|T'\|_{E^X} = \|f_{T'}\|_{E^*} = \sup \{ |m(TT')|, T \in E, \|T\|_E \leq 1 \}$$

Теорема 2.2.2 $(E^X, \|\cdot\|_{E^X})$ БЛП в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, в котором выполнены условия (B) и (C).

Доказательство. Пусть $T', S' \in E^X$ и λ - комплексное число. Тогда $f_{\lambda T'} = \lambda f_{T'}$ и $f_{T'+S'} = f_{T'} + f_{S'}$ поэтому E^X - линейное подпространство в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Пусть теперь $T' \in E^X$ и $U, V \in \mathcal{A}_u$

Тогда $f_{UT'V}(T) = f_{T'}(VTU)$. Так как

$$\|VTU\|_E = \|T\|_E \quad \text{и} \quad f_{T'} \in E^*, \quad \text{то} \quad f_{UT'V} \in E^*$$

т.е. $UT'V \in E^X$. Следовательно, $\mathcal{A}E^X\mathcal{A} = E^X$.

в частности $T' \in E^X$ тогда и только тогда, когда $|T'| \in E^X$ и из $T' \in E^X$ следует, что $T'^* \in E^X$.

Ясно, что $\|\cdot\|_{E^X}$ норма на E^X . Кроме того

$$\begin{aligned} \|UT'V\|_{E^X} &= \sup \{ |m(TUT'V)|, T \in E, \|T\|_E \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ |m(VTUT')|, T \in E, \|T\|_E \leq 1 \} \leq \\ &\leq \sup \{ |m(T_1T')|, T_1 \in E, \|T_1\|_E \leq 1 \} = \|T'\|_{E^X} \end{aligned}$$

откуда $\|UT'V\|_{E^X} = \|T'\|_{E^X}$, в частности,

$$\|T'\|_{E^X} = \|T'^*\|_{E^X} = \|\lvert T' \rvert\|_{E^X} \quad \text{и для любого } A \in \mathcal{A}$$

$$\|AT'\|_{E^X} \leq \|A\|_{\infty} \|T'\|_{E^X} \quad (\text{см. доказательство 2.1.9 (iii)}).$$

Пусть, наконец, $S' \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $\lvert S' \rvert \leq \lvert T' \rvert$, $T' \in E^X$
и $H \in \mathcal{A}$ такой, что $\lvert S' \rvert = H^* \lvert T' \rvert H$, $\|H\|_{\infty} \leq 1$

$$\text{Тогда } S' \in E^X \quad \text{и} \quad \|S'\|_{E^X} = \|\lvert S' \rvert\|_{E^X} = \\ = \|H^* \lvert T' \rvert H\|_{E^X} \leq \|\lvert T' \rvert\|_{E^X} = \|T'\|_{E^X}$$

Таким образом, E^X — нш в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Докажем теперь, что если $T \in E$ и $T' \in E^X$, то
 $m(\lvert TT' \rvert) \leq \|T\|_E \cdot \|T'\|_{E^X}$ Действительно, пусть

$TT' = U \lvert TT' \rvert$ — полярное разложение оператора TT'
с $U \in \mathcal{A}_u$. Тогда если $T \neq 0$, то

$$\begin{aligned} m(\lvert TT' \rvert) &= m(U^* TT') = \\ &= m\left(\|U^* T\|_E \frac{U^* T}{\|U^* T\|_E} T'\right) = \|U^* T\|_E m\left(\frac{U^* T}{\|U^* T\|_E} T'\right) \leq \\ &\leq \|T\|_E \sup\{|m(T_1 T')|, T_1 \in E, \|T_1\|_E \leq 1\} = \\ &= \|T\|_E \|T'\|_{E^X}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что единичный шар в E^X замкнут относительно сходимости по мере (в $(\mathcal{S}(\mathcal{A}), \tau)$).

Пусть $T_n' \in E^X$, $n=1,2,\dots$ и $\|T_n'\|_{E^X} \leq 1$
и пусть $T_n' \xrightarrow{\text{п.м.}} T' \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ Тогда для любого

$$T \in E \quad TT_n' \xrightarrow{\text{п.м.}} TT' \quad \text{и} \quad TT_n' \in L_1(\mathcal{A})$$

Кроме того, $\|TT_n'\|_1 = m(\lvert TT_n' \rvert) \leq \|T\|_E \|T_n'\|_{E^X} \leq$

$$\leq \|T\|_E$$

Поэтому (См. § 0), $TT' \in L_1(\mathcal{A})$ и

$$\|TT'\|_1 \leq \lim \|TT'_n\|_1 \leq \|T\|_E$$

Следовательно,

$$T' \in E'. \text{ Рассмотрим } f_{T'}(T) = m(TT')$$

$$|f_{T'}(T)| = |m(TT')| \leq m(|TT'|) = \|TT'\|_1 \leq \|T\|_E.$$

Следовательно, $f_{T'} \in E^*$ и потому $T' \in E^*$.

$$\begin{aligned} \text{Наконец, } \|T'\|_{E^*} &= \sup \{ |m(TT')|, T \in E, \|T\|_E \leq 1 \} \leq \\ &\leq \sup \{ m(|TT'|), T \in E, \|T\|_E \leq 1 \} \leq \\ &\leq \sup \{ \|T\|_E, T \in E, \|T\|_E \leq 1 \} = 1 \end{aligned}$$

Таким образом, единичный шар E^* замкнут в $(\mathcal{J}(\mathcal{A}), \tau)$. Тогда по предложению 2.1.16 (iii) в E^* выполнены условия (B) и (C) и потому, по 2.1.16 (iv), E^* полно.

Пусть E идеальное подпространство в $\mathcal{J}(\mathcal{A})$. Положим $(E')' = E''$. Если E НИП в $\mathcal{J}(\mathcal{A})$, то положим $(E^*)^x = E^{xx}$.

Предложение 2.2.3 Если E НИП в $\mathcal{J}(\mathcal{A})$, то $E \subset E^{xx}$ и для каждого $T \in E$

$$\|T\|_{E^{xx}} \leq \|T\|_E$$

Доказательство. Ясно, что $E' \subset E''$ и потому $E \subset (E^*)'$. Пусть $T \in E$ и f_T линейный функционал на E^* такой, что

$$f_T(T') = m(T'T)$$

$$|f_T(T')| = |m(T'T)| = |m(TT')| \leq m(|TT'|) \leq \|T\|_E \|T'\|_{E^*}$$

Следовательно, $T \in E^{xx}$ и

$$\|T\|_{E^{xx}} = \|f_T\|_{(E^*)^x} \leq \|T\|_E$$

С л е д с т в и е 2.2.4 Если E НЛП в $\mathcal{L}(\mathcal{U})$,
 $T_n, T \in E$, $n=1,2,\dots$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$ то $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$

Так как $\|T_n - T\|_{E^{xx}} \leq \|T_n - T\|_E$, то $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{E^{xx}}} T$

Но E^{xx} БЛП (см. теорему 2.2.2). Поэтому по теореме

2.1.13 $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$

Перейдем к рассмотрению (o) - непрерывных линейных
 функционалов на нормированных идеальных подпространствах в
 $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

О п р е д е л е н и е 2.2.5 Линейный функционал f
 на НЛП E называется (o) - непрерывным, если из

$T_n, T \in E$, $n=1,2,\dots$, $|T_n - T| \xrightarrow{(o)} 0$ в E следу-
 ет, что $f(T_n) \rightarrow f(T)$

Обозначим множество всех (o) - непрерывных линейных
 функционалов на E через $E_{(o)}^*$.

П р е д л о ж е н и е 2.2.6 (i) Если E НЛП, в ко-
 тором выполнено условие (A), то $E^* \subset E_{(o)}^*$

(ii) Если E БЛП, то $E_{(o)}^* \subset E^*$

Д о к а з а т е л ь с т в о (i) Пусть E НЛП с ус-
 ловием (A) и $f \in E^*$ и пусть $T_n, T \in E$, $n=1,2,\dots$ и

$|T_n - T| \xrightarrow{(o)} 0$ в E . Тогда существует убывающая
 к нулю последовательность $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из E та-
 кая, что $|T_n - T| \leq S_n$ Тогда $\| |T_n - T| \|_E \leq \|S_n\|_E$.

По условию (A) $\|S_n\|_E \rightarrow 0$, следовательно,

$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$ и потому $f(T_n) \rightarrow f(T)$

Значит $f \in E_{(o)}^*$.

(ii) Пусть E БИП и $f \in E^*_{(0)}$

Если $f \notin E^*$, то существуют $\varepsilon > 0$, $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ и $T \in E$ такие, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$ но $|f(T_n) - f(T)| > \varepsilon$

По предложению 2.1.II (ii) существует подпоследовательность индексов $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $|T_{n_k} - T| \xrightarrow{(2)} 0$ с регулятором сходимости из E .

Поэтому $|T_{n_k} - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в E , откуда

$f(T_{n_k}) \rightarrow f(T)$ Противоречие. Следовательно, $f \in E^*$

С л е д с т в и е 2.2.7. Если E БИП, в котором выполнено условие (A), то $E^* = E^*_{(0)}$

Рассмотрим теперь вопрос о представлении непрерывного линейного функционала на банаховом идеальном подпространстве в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ по следу.

Т е о р е м а 2.2.8 Если E БИП в $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, в котором выполнено условие (A), и $\mathcal{A} \subset E \subset L_1(\mathcal{A})$, то для каждого функционала $f \in E^*$ существует оператор $S \in E'$ такой, что $f(T) = \text{tr}(TS)$ для всех $T \in E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in E^*$ и $\varphi = f|_{\mathcal{A}}$. Рассмотрим $T_n, T \in \mathcal{A}$ $n=1,2,\dots$, $\|T_n\|_\infty \leq 1$, $\|T\|_\infty \leq 1$ такие, что $T_n \rightarrow T$ в сильной операторной топологии. Тогда $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} T$ в $L_1(\mathcal{A})$, поэтому $|T_n - T| \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ и существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$|T_{n_k} - T| \xrightarrow{\text{А.П.В.}} 0$ Тогда по теореме I.2.6

$|T_{n_k} - T| \xrightarrow{(0)} 0$ в $\mathcal{A}$, откуда, по предложению

2.2.6 (i) $\varphi(T_{n_k}) \rightarrow \varphi(T)$ Следовательно, φ

сильно непрерывен на ограниченной части алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$.

Поэтому φ ультраслабо непрерывен и следовательно, по теореме 4.1 из работы 79 существует оператор $S \in L_1(\mathcal{O})$ такой, что $\varphi(T) = m(TS)$ для каждого $T \in \mathcal{O}$.

Пусть теперь $T \in E$. Так как в E выполнено условие (A), то по предложению 2.1.16 (i), алгебра фон Неймана $\mathcal{O}$ плотна в E по норме. Поэтому существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{O}$ такая, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} T$. Тогда по теореме 2.1.13 $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$ и значит по предложению 1.1.3 (v) $T_n S \xrightarrow{\text{п.м.}} TS$ в $\mathfrak{L}(\mathcal{O})$.

Покажем, что $\{T_n S\}$ фундаментальна в $L_1(\mathcal{O})$

$$\begin{aligned} \|T_n S - T_k S\|_1 &= \sup \{ |m((T_n - T_k)SR)|, R \in \mathcal{O}, \|R\|_{\infty} \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ |m(R(T_n - T_k)S)|, \|R\|_{\infty} \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ |\varphi(R(T_n - T_k))|, \|R\|_{\infty} \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ |f(R(T_n - T_k))|, \|R\|_{\infty} \leq 1 \} \leq \\ &\leq \|f\|_{E^*} \sup \{ \|R(T_n - T_k)\|_E, \|R\|_{\infty} \leq 1 \} \leq \\ &\leq \|f\|_{E^*} \|T_n - T_k\|_E \rightarrow 0 \quad \text{при } n, k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$L_1(\mathcal{O})$ полно, следовательно $\{T_n S\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в $L_1(\mathcal{O})$. Но $T_n S \xrightarrow{\text{п.м.}} TS$ Поэтому $T_n S \xrightarrow{\|\cdot\|_1} TS$ и $TS \in L_1(\mathcal{O})$ Следовательно $S \in E'$.

Кроме того

$$f(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(T_n S) = m(TS)$$

Таким образом, $f(T) = m(TS)$ для всех $T \in E$.

§ 2.3 Пространства Орлича измеримых операторов

В этом параграфе определяются пространства Орлича измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, и изучаются их основные свойства. Классические пространства Орлича измеримых функций на пространстве с мерой были введены В. Орличем в работах [58], [59] и в дальнейшем изучались в работах [17], [18], [19], [20], [39], [45].

Напомним определение N -функции (см., например, [20], стр. 19)

О п р е д е л е н и е 2.3.1 Вещественная функция $M(u)$ вещественного переменного u называется N -функцией, если выполнены следующие условия:

- (i) $M(u)$ непрерывная, четная, выпуклая функция;
- (ii) $M(u) = 0$ лишь при $u = 0$
- (iii) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0$ и $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$

Функция $N(v) = \max_{u \geq 0} \{uv - M(u)\}$ тоже является

N -функцией и называется дополнительной к N -функции

$M(u)$. Легко видеть, что дополнительные друг к другу

N -функции $M(u)$ и $N(v)$ связаны неравенством:

$$uv \leq M(u) + N(v) \quad \text{для любых } u \text{ и } v,$$

которое называется неравенством Юнга (см. [20] стр. 24).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $M(u)$ и $N(v)$ дополнительные друг к другу N -функции.

О п р е д е л е н и е 2.3.2 Классом Орлича, порожденным N -функцией $M(u)$, назовем множество

$$L_M(\mathcal{A}) = \{ T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : M(|T|) \in L_1(\mathcal{A}) \}$$

Аналогично определяется класс Орлича, порожденный N - функцией $N(v)$:

$$L_N(\mathcal{A}) = \{ S \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : N(|S|) \in L_1(\mathcal{A}) \}$$

Для $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ обозначим

$$TL_N(\mathcal{A}) = \{ TS : S \in L_N(\mathcal{A}) \}$$

О п р е д е л е н и е 2.3.3. Пространством Орлича, порожденным N - функцией $M(u)$, называется линейное пространство

$$L_M^*(\mathcal{A}) = \{ T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : TL_N(\mathcal{A}) \subset L_1(\mathcal{A}) \}$$

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, т.е. если кольцо $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ изоморфно кольцу всех измеримых функций на пространстве с мерой, то приведенные выше определения совпадают с известными определениями класса и пространства Орлича измеримых функций (см. например, [20], стр. 76 и 83). В этом случае класс Орлича $L_M(\mathcal{A})$ и пространство Орлича $L_M^*(\mathcal{A})$ мы будем называть функциональными.

На пространстве Орлича $L_M^*(\mathcal{A})$ измеримых операторов, так же, как и на функциональном пространстве Орлича, можно задать две нормы: норму Орлича и норму Люксембурга.

О п р е д е л е н и е 2.3.4. Для каждого оператора

$$T \in L_M^*(\mathcal{A}) \quad \|T\|_M = \sup \{ |m(TS)|, m(N(|S|)) \leq 1, S \in L_N(\mathcal{A}) \}$$

называется нормой Орлича оператора T .

Теорема 2.3.5 $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ является банаховым идеальным пространством в $\mathcal{J}(\mathcal{A})$, в котором выполнены условия (B) и (C).

Прежде чем доказать теорему 2.3.5, докажем несколько предложений.

Как уже отмечалось (см. § 0), для каждого оператора $T \in \mathcal{J}(\mathcal{A})$ определена функция:

$$\tilde{T}(\alpha) = \inf \{ \lambda \in [0, +\infty) : m(1 - E(\lambda)) \leq \alpha \}$$

где $\{E(\lambda)\}$ спектральное семейство оператора $|T|$.

Предложение 2.3.6. Если $T \in \mathcal{J}(\mathcal{A})_+$, то $[M(T)]^\sim = M(\tilde{T})$

Доказательство. Пусть $T = \int_0^\infty \mu dF(\mu)$ спектральное разложение оператора T .

Тогда
$$M(T) = \int_0^\infty M(\lambda) dE(\lambda) = \int_0^\infty \mu dF(\mu),$$

где $F(\mu) = E(M^{-1}(\mu))$ (см. [7] стр. 367)

Функция $M(u)$ непрерывна, выпукла и $M(0) = 0$

Следовательно, при $u \geq 0$ $M(u)$ строго возрастает и потому

$$[M(T)]^\sim(\alpha) = \inf \{ \mu \in [0, +\infty) : m(F(\mu)) \geq 1 - \alpha \} =$$

$$= \inf \{ \mu \in [0, +\infty) : m(E(M^{-1}(\mu))) \geq 1 - \alpha \} =$$

$$= \inf \{ M(\lambda), \lambda \in [0, +\infty), m(E(\lambda)) \geq 1 - \alpha \} =$$

$$= M(\inf \{ \lambda \in [0, +\infty) : m(E(\lambda)) \geq 1 - \alpha \}) =$$

$$= M(\tilde{T})(\alpha)$$

для любого $\alpha \in (0, +\infty)$.

Значит $[M(T)]^\sim = M(\tilde{T})$

Предложение 2.3.7 Имеют место следующие вложения:

$$\mathcal{O} \subset L_M(\mathcal{O}) \subset L_M^*(\mathcal{O}) \subset L_1(\mathcal{O})$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{O}$, тогда $|T| \in \mathcal{O}$ и $M(|T|) \in \mathcal{O}$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{O}$ конечна, поэтому $\mathcal{O} \subset L_1(\mathcal{O})$, откуда $M(|T|) \in L_1(\mathcal{O})$ т.е. $T \in L_M(\mathcal{O})$

Пусть теперь $T \in L_M(\mathcal{O})$ и $S \in L_N(\mathcal{O})$. Тогда $M(|T|) \in L_1(\mathcal{O})$ и $N(|S|) \in L_1(\mathcal{O})$. Так как $|T|^\sim = \tilde{T}$ и $|S|^\sim = \tilde{S}$, то по неравенству Юнга и предложению 2.3.6 имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) &\leq M(\tilde{T})(\alpha) + N(\tilde{S})(\alpha) = M(|T|^\sim)(\alpha) + \\ &+ N(|S|^\sim)(\alpha) = [M(|T|)]^\sim(\alpha) + [N(|S|)]^\sim(\alpha) \end{aligned}$$

Интегрируем обе части полученного неравенства:

$$\int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) d\alpha \leq \int_0^\infty [M(|T|)]^\sim(\alpha) d\alpha + \int_0^\infty [N(|S|)]^\sim(\alpha) d\alpha$$

отсюда по предложению 5 (v) и теореме 6 (iii) § 0

$$TS \in L_1(\mathcal{O}) \text{ и значит, } T \in L_M^*(\mathcal{O})$$

Наконец, если $T \in L_M^*(\mathcal{O})$, то $TL_N(\mathcal{O}) \subset L_1(\mathcal{O})$ в частности, $T \cdot \mathbb{1} = T \in L_1(\mathcal{O})$ т.к. $\mathbb{1} \in \mathcal{O} \subset L_N(\mathcal{O})$

Предложение доказано.

$$\text{Обозначим } \mathcal{P}_M(\mathcal{O}) = \{T \in L_M(\mathcal{O}) : m(M(|T|)) \leq 1\}$$

В следующем предложении приводятся простейшие свойства

$L_M(\mathcal{A})$, $\mathcal{P}_M(\mathcal{A})$ и $L_M^*(\mathcal{A})$

Предложение 2.3.8 (I) (i) Если $T \in L_M(\mathcal{A})$ и λ - такое комплексное число, что $|\lambda| \leq 1$, то $\lambda T \in L_M(\mathcal{A})$

(ii) Если $T \in L_M(\mathcal{A})$ и $U \in \mathcal{A}_u$, то

$$UT \in L_M(\mathcal{A}) \text{ и } U^*TU \in L_M(\mathcal{A})$$

(II) Если $T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$ и $U \in \mathcal{A}_u$, то $UT \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$ и $U^*TU \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$

(III) Следующие условия эквивалентны:

(i) $T \in L_M^*(\mathcal{A})$

(ii) $|T| \in L_M^*(\mathcal{A})$

(iii) $T^* \in L_M^*(\mathcal{A})$

(iv) $U^*TU \in L_M^*(\mathcal{A})$ для каждого $U \in \mathcal{A}_u$

(v) $UT \in L_M^*(\mathcal{A})$ для каждого $U \in \mathcal{A}_u$

Доказательство. (I) (i) Пусть $T \in L_M(\mathcal{A})$ и $|\lambda| \leq 1$. Функция $M(u)$ выпукла. Поэтому

$$M(|\lambda T|) = M(|\lambda| \cdot |T|) \leq |\lambda| M(|T|)$$

и так как $M(|T|) \in L_1(\mathcal{A})$ то $M(|\lambda T|) \in L_1(\mathcal{A})$

откуда следует, что $\lambda T \in L_M(\mathcal{A})$

(ii) Пусть $T \in L_M(\mathcal{A})$ и $U \in \mathcal{A}_u$

Тогда $|UT| = |T|$ Поэтому $M(|UT|) = M(|T|) \in L_1(\mathcal{A})$

т.е. $UT \in L_M(\mathcal{A})$

Пусть $|T| = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$ спектральное разложение опе-

- 95 -

ратора $|T|$, тогда $M(|T|) = \int_0^\infty \mu dF(\mu)$
 где $F(\mu) = E[M^{-1}(\mu)]$

Так как $|U^*TU| = U^*|T|U$, то

$$|U^*TU| = \int_0^\infty \lambda d(U^*E(\lambda)U)$$

и поэтому

$$M(|U^*TU|) = \int_0^\infty \mu dG(\mu) \quad \text{где } G(\mu) = U^*F(\mu)U$$

т.к. $T \in L_M(\mathcal{A})$, то $M(|T|) \in L_1(\mathcal{A})$ и потому

$$\int_0^\infty \mu dm(F(\mu)) < \infty \quad (\text{см. § 0})$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \int_0^\infty \mu dm(G(\mu)) &= \int_0^\infty \mu dm(U^*F(\mu)U) = \\ &= \int_0^\infty \mu dm F(\mu). \end{aligned}$$

Поэтому $\int_0^\infty \mu dm(G(\mu)) < \infty$. Следовательно

$M(|U^*TU|) \in L_1(\mathcal{A})$ и значит $U^*TU \in L_M(\mathcal{A})$

(II) Пусть $T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$ и $U \in \mathcal{A}_u$

Тогда $m(M(|UT|)) = m(M(|T|)) \leq 1$

Значит, $UT \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$

Можно показать, что $M(|U^*TU|) = U^*M(|T|)U$

Отсюда $m(M(|U^*TU|)) = m(U^*M(|T|)U) =$

$$= m(M(|T|)) \leq 1$$

и, следовательно, $U^*TU \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$

(III) (i) $\iff$ (ii) Пусть $T \in L_M^*(\mathcal{A})$. Тогда $TS \in L_1(\mathcal{A})$

для каждого $S \in L_N(\mathcal{A})$. Пусть $T = V|T|$ полярное

разложение оператора T с $V \in \mathcal{A}_u$. Тогда $|T| = V^*T$.

т.к. $V^*TS \in L_1(\mathcal{O})$ для каждого $S \in L_N(\mathcal{O})$ то
 $|T| \in L_M^*(\mathcal{O})$. Обратное утверждение доказывается ана-
 логично.

(ii) $\iff$ (iii) Пусть $|T| \in L_M^*(\mathcal{O})$ Тогда $|T|S \in L_1(\mathcal{O})$
 для каждого $S \in L_N(\mathcal{O})$. Если $T = V|T|$, то $T^* = |T|V^*$
 и т.к. $V^*S \in L_N(\mathcal{O})$, то $T^*S = |T|V^*S \in L_1(\mathcal{O})$ для
 каждого $S \in L_N(\mathcal{O})$, т.е. $T^* \in L_M^*(\mathcal{O})$. Обратное ут-
 верждение доказывается аналогично.

Остальные импликации проверяются точно также.

Из предложения 2.3.8 непосредственно получается следую-
 щее следствие.

С л е д с т в и е 2.3.9 (I) следующие условия эквива-
 лентны:

- (i) $T \in L_M(\mathcal{O})$
- (ii) $|T| \in L_M(\mathcal{O})$
- (iii) $T^* \in L_M(\mathcal{O})$
- (iv) $UTV \in L_M(\mathcal{O})$ для любых $U, V \in \mathcal{O}_u$

(II) следующие условия эквивалентны:

- (i) $T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$
- (ii) $|T| \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$
- (iii) $T^* \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$
- (iv) $UTV \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$ для любых $U, V \in \mathcal{O}_u$

Обозначим через $\mathcal{O}_r$ шар радиуса r в $\mathcal{O}$.

П р е д л о ж е н и е 2.3.10. Пусть $M(1) = \alpha$.

Тогда

- (i) если $\alpha \leq 1$ то $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$
- (ii) если $\alpha > 1$ то $\mathcal{O}_{\frac{1}{\alpha}} \subset \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$

Доказательство. (i) Пусть $\alpha \leq 1$. Тогда $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathcal{O}_1$

Если $S \in \mathcal{O}_1$, то $\|S\|_\infty \leq 1$ и $|S| \leq 1$.
Функция $M(u)$ возрастающая. Поэтому $M(|S|) \leq M(1)$

откуда $m(M(|S|)) \leq m(M(1)) = \alpha m(1) = \alpha \leq 1$

Следовательно, $S \in \mathcal{P}_M(\alpha)$

(ii) Если $\alpha > 1$, и $S \in \mathcal{O}_{\frac{1}{\alpha}}$

то $|S| \leq \frac{1}{\alpha} 1$ и потому

$$m(M(|S|)) \leq m(M(\frac{1}{\alpha} 1)) \leq m(\frac{1}{\alpha} M(1)) = m(1) = 1$$

Поэтому $S \in \mathcal{P}_M(\alpha)$

Рассмотрим теперь свойства нормы Орлича

Предложение 2.3.II. Норма Орлича обладает всеми свойствами нормы:

(i) $\|T\|_M \geq 0$ для каждого $T \in L_M^*(\mathcal{O})$ и $\|T\|_M = 0$ лишь при $T = 0$

(ii) $\|\alpha T\|_M = |\alpha| \cdot \|T\|_M$, α — комплексное число,
 $T \in L_M^*(\mathcal{O})$

(iii) $\|T + R\|_M \leq \|T\|_M + \|R\|_M$, $T, R \in L_M^*(\mathcal{O})$

Кроме того

(iv) если $T \in L_M^*(\mathcal{O})$, то $\tau \|T\|_1 \leq \|T\|_M$

где $\tau = \begin{cases} 1 & , \text{ если } N(1) \leq 1 \\ \frac{1}{N(1)} & , \text{ если } N(1) > 1 \end{cases}$

(v) если $T \in L_M(\mathcal{O})$, то $\|T\|_M \leq m(M(|T|)) + 1$

(vi) Если $T \in L_M^*(\mathcal{A})$, то

$$\|T\|_M = \|T^*\|_M = \| |T| \|_M = \|UT\|_M$$

для каждого оператора $U \in \mathcal{A}_u$

Доказательство. Докажем сначала свойство (iv).

По предложению 2.3.10 $\mathcal{A}_u \subset \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$

Поэтому $\|T\|_M = \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \} \geq$

$$\geq \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{A}_u \} = u \|T\|_1$$

(i) Ясно, что $\|T\|_M \geq 0$ и что $\|0\|_M = 0$

если теперь $\|T\|_M = 0$, то по (iv) $\|T\|_1 = 0$

откуда $T = 0$

(ii) и (iii) очевидны.

(v) Пусть $T \in L_M(\mathcal{A})$. Тогда $M(|T|) \in L_1(\mathcal{A})$ и

$$\text{поэтому } \int_0^\infty [M(|T|)]^\sim(\alpha) d\alpha < +\infty \quad (\text{см. § 0}).$$

Пусть $S \in L_N(\mathcal{A})$ тогда $N(|S|) \in L_1(\mathcal{A})$ и

$$\int_0^\infty [N(|S|)]^\sim(\alpha) d\alpha < +\infty$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) d\alpha \leq \int_0^\infty [M(|T|)]^\sim(\alpha) d\alpha + \int_0^\infty [N(|S|)]^\sim(\alpha) d\alpha < \infty$$

$$\text{и тогда } \|TS\|_1 \leq \int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) d\alpha \quad (\text{см. § 0})$$

$$\begin{aligned}
 \|T\|_M &= \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} \leq \\
 &\leq \sup \{ m(|TS|), S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} = \sup \{ \|TS\|_1, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} \leq \\
 &\leq \sup \left\{ \int_0^\infty \tilde{T}(\alpha) \tilde{S}(\alpha) d\alpha, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \right\} \leq \\
 &\leq \sup \left\{ \int_0^\infty [M(|T|)] \tilde{\alpha} d\alpha + \int_0^\infty [N(|S|)] \tilde{\alpha} d\alpha, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \right\} = \\
 &= \int_0^\infty [M(|T|)] \tilde{\alpha} d\alpha + \sup \left\{ \int_0^\infty [N(|S|)] \tilde{\alpha} d\alpha, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \right\} = \\
 &= \|M(|T|)\|_1 + \sup \{ \|N(|S|)\|_1, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} = \\
 &= m(M(|T|)) + \sup \{ m(N(|S|)), S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} = \\
 &= m(M(|T|)) + 1
 \end{aligned}$$

(vi) Пусть $T \in L_M^*(\alpha)$ и $U, V \in \mathcal{O}_u$ Тогда .

$$\begin{aligned}
 \|UTV\|_M &= \sup \{ |m(UTVS)|, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} = \\
 &= \sup \{ |m(TVSU)|, S \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} = \\
 &= \sup \{ |m(TS_1)|, V^* S_1 U^* \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} \leq \\
 &\leq \sup \{ |m(TS_1)|, S_1 \in \mathcal{P}_N(\alpha) \} = \|T\|_M.
 \end{aligned}$$

и т.к. $T = U^*(UTV)V^*$, то $\|UTV\|_M = \|T\|_M$

откуда $\|T\|_M = \| |T| \|_M = \|T^*\|_M = \|UT\|_M$

Пусть теперь $\mathcal{B}$ подалгебра фон Неймана алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$. Известно, что

$$L_1(\mathcal{B}) = \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap L_1(\mathcal{A})$$

(См. [71] стр.96)

Аналогичный факт для пространств Орлича будет доказан ниже (теорема 2.3.15). В следующем предложении устанавливается, что этим свойством обладает класс Орлича.

Через $\mathcal{B}(T)$ будем обозначать коммутативную подалгебру фон Неймана в $\mathcal{A}$, порожденную спектральным семейством оператора $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})_h$.

Предложение 2.3.12 (i) Если $\mathcal{B}$ подалгебра фон Неймана в $\mathcal{A}$, то

$$L_M(\mathcal{B}) = \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap L_M(\mathcal{A})$$

(ii) Если $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и T эрмитов, то $T \in L_M^*(\mathcal{B}(T))$

Доказательство. (i) Пусть $T \in L_M(\mathcal{B})$. Тогда $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ и $M(|T|) \in L_1(\mathcal{B})$. Но тогда

$$M(|T|) \in L_1(\mathcal{A}) \quad \text{и потому} \quad T \in \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap L_M(\mathcal{A})$$

Обратно, если $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap L_M(\mathcal{A})$, то

$$M(|T|) \in L_1(\mathcal{A}) \cap \mathcal{Z}(\mathcal{B}) = L_1(\mathcal{B}) \quad \text{и потому} \quad T \in L_M(\mathcal{B})$$

(ii) Пусть $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и T эрмитов.

Тогда $TS \in L_1(\mathcal{A})$ для каждого оператора $S \in L_N(\mathcal{A})$

По (i) $L_N(\mathcal{B}(T)) \subset L_N(\mathcal{A})$, поэтому $TS \in L_1(\mathcal{A})$

для каждого $S \in L_N(\mathcal{B}(T))$. Но $T \in \mathcal{Z}(\mathcal{B}(T))$

и значит $TS \in \mathcal{Z}(\mathcal{B}(T))$ для каждого $S \in L_N(\mathcal{B}(T))$

Поэтому $TS \in \mathfrak{J}(\mathfrak{B}(T)) \cap L_1(\mathcal{A}) = L_1(\mathfrak{B}(T))$
 $T \in L_M^*(\mathfrak{B}(T))$

т.е.

В следующем предложении доказывается аналог неравенства Гёльдера для пространств Орлича измеримых операторов.

Предложение 2.3.13 (i) Если $T \in L_M^*(\mathcal{A})$
 и $\|T\|_M \leq 1$, то $T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$ и $m(M(|T|)) \leq \|T\|_M$
 (ii) Если $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и $S \in L_N^*(\mathcal{A})$, то
 $TS \in L_1(\mathcal{A})$ и $|m(TS)| \leq \|T\|_M \|S\|_N$

Доказательство. (i) Пусть $T \in L_M^*(\mathcal{A})$,
 $T \geq 0$ и $\|T\|_M \leq 1$. Тогда по предложению 2.3.12
 (ii) $T \in L_M^*(\mathfrak{B}(T))$.

Подалгебра фон Неймана $\mathfrak{B}(T)$ коммутативна, поэтому
 $(L_M^*(\mathfrak{B}(T)), \|\cdot\|_M^{\mathfrak{B}(T)})$ - функциональное пространство Орлича. По предложению 2.3.12 (i)

$L_N(\mathfrak{B}(T)) = \mathfrak{J}(\mathfrak{B}(T)) \cap L_N(\mathcal{A})$ Поэтому $\mathcal{P}_N(\mathfrak{B}(T)) \subset$

$\subset \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$ откуда $\|T\|_M^{\mathfrak{B}(T)} \leq \|T\|_M^{\mathcal{A}} \leq 1$ где

$\|\cdot\|_M^{\mathfrak{B}(T)}$ и $\|\cdot\|_M^{\mathcal{A}}$ - нормы Орлича в $L_M^*(\mathfrak{B}(T))$ и

$L_M^*(\mathcal{A})$ соответственно. Следовательно, по лемме 9.2 из

[20]

$T \in \mathcal{P}_M(\mathfrak{B}(T))$ и $m(M(T)) \leq \|T\|_M^{\mathfrak{B}(T)}$

откуда $T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$ и $m(M(T)) \leq \|T\|_M$

Пусть теперь T произвольный оператор из $L_M^*(\mathcal{A})$

$\|T\|_M \leq 1$ и $T = U|T|$ полярное разложение T с

$U \in \mathcal{O}$ и Тогда по предложению 2.3.II
(vi) $\| |T| \|_M = \|T\|_M \leq 1$

, поэтому

$$|T| \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O}) \quad \text{и} \quad m(M(|T|)) \leq \| |T| \|_M = \|T\|_M$$

откуда по предложению 2.3.9 (II) $T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$

(ii) Пусть $T \in L_M^*(\mathcal{O})$ и $S \in L_N^*(\mathcal{O})$

Если $S = 0$, то $TS = 0 \in L_1(\mathcal{O})$ и неравенство очевидно.

Пусть теперь $S \neq 0$. Рассмотрим оператор

$$S_1 = \frac{1}{\|S\|_N} S^x) \quad \text{Так как} \quad \|S_1\|_N = 1, \quad \text{то по (i)}$$

$S_1 \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \subset L_N(\mathcal{O})$ поэтому $TS_1 \in L_1(\mathcal{O})$ откуда $TS = TS_1 \cdot \|S\|_N \in L_1(\mathcal{O})$

Кроме того, $|m(T \frac{S}{\|S\|_N})| = |m(TS_1)| \leq$

$$\leq \sup \{ |m(TS')|, S' \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} = \|T\|_M, \quad \text{откуда}$$

$$|m(TS)| \leq \|T\|_M \|S\|_N$$

Теперь докажем теорему 2.3.5

Доказательство теоремы 2.3.5.

Докажем сначала идеальность $L_M^*(\mathcal{O})$. Пусть

$$T \in L_M^*(\mathcal{O}), \quad T_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$$

и $|T_1| \leq |T|$ Тогда

существует такой оператор $H \in \mathcal{O}$, что $\|H\|_\infty \leq 1$

$$\text{и} \quad |T_1| = H^* |T| H$$

. По предложению 2.3.8 (III)

x) Ниже (следствие 2.3.18) будет показано, что норма Орлича произвольного оператора $T \in L_M^*(\mathcal{O})$ конечна.

$UTV \in L_M^*(\mathcal{A})$ для любых $U, V \in \mathcal{A}$, и т.к. каждый оператор из $\mathcal{A}$ представим в виде конечной линейной комбинации унитарных (см. [42]), то $ATB \in L_M^*(\mathcal{A})$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$.
Поэтому $|T_1| \in L_M^*(\mathcal{A})$, откуда $T_1 \in L_M^*(\mathcal{A})$.

Кроме того, по предложениям 2.3.II (vi) и 2.I.9 (iii)

$$\begin{aligned} \|T_1\|_M &= \||T_1|\|_M = \|H^* |T| H\|_M \leq \\ &\leq \|H^*\|_\infty \||T|\|_M \|H\|_\infty \leq \||T|\|_M = \|T\|_M \end{aligned}$$

Следовательно, $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ нормированное идеальное подпространство в $\mathcal{J}(\mathcal{A})$.

Покажем теперь, что в $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ выполнены условия (B) и (C).

Пусть $T_n \in L_M^*(\mathcal{A})$, $n = 1, 2, \dots$ $0 \leq T_n \uparrow$ и $\sup_n \|T_n\|_M < \infty$ т.к. $L_M^*(\mathcal{A}) \subset L_1(\mathcal{A})$ (см. предложение 2.3.7) и $\gamma \|T_n\|_1 \leq \|T_n\|_M$, где

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{если } N(1) \leq 1 \\ \frac{1}{N(1)}, & \text{если } N(1) > 1 \end{cases}$$

(см. предложение 2.3.II (iv)), то $\sup_n \|T_n\|_1 < \infty$.

По предложению 2.I.I8 в $L_1(\mathcal{A})$ выполнено условие (B).

Поэтому найдется такой оператор $T \in L_1(\mathcal{A})$, что $T_n \uparrow T$.

Тогда $T_n \xrightarrow{\text{п.м.}} T$ и потому для каждого $S \in L_N(\mathcal{A})$

$T_n S \xrightarrow{\text{п.м.}} TS$ (см. предложение I.I.3 (v)). Так

как $T_n \in L_M^*(\mathcal{A})$, то $T_n S \in L_1(\mathcal{A})$ Кроме того,

по предложению 2.3.13 (ii)

$$\|T_n S\|_1 \leq \|T_n\|_M \|S\|_N$$

поэтому $\sup_n \|T_n S\|_1 \leq \|S\|_N \sup_n \|T_n\|_M < \infty$

Значит $TS \in L_1(\mathcal{O})$

(См. § 0, теорема 6 (ii)).

Ввиду произвольности $S \in L_N(\mathcal{O})$

$$T \in L_M^*(\mathcal{O})$$

т.е. в $(L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$

получаем, что

выполнено усло-

вие (B).

Кроме того, $\|TS\|_1 \leq \lim_n \|T_n S\|_1 \leq \sup_n \|T_n S\|_1$
(См. § 0). Следовательно

$$\begin{aligned} \|T\|_M &= \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} \leq \\ &\leq \sup \{ \sup_n \|T_n S\|_1, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} = \\ &= \sup_n \sup \{ \|T_n S\|_1, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} = \\ &= \sup_n \sup \{ m(|T_n S|), S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} = \\ &= \sup_n \sup \{ m(U_n^* T_n S), S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} = \\ &= \sup_n \sup \{ m(T_n S U_n^*), S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} \leq \\ &\leq \sup_n \sup \{ |m(T_n S')|, S' \in \mathcal{P}_N(\mathcal{O}) \} = \\ &= \sup_n \|T_n\|_M \end{aligned}$$

где $T_n S = U_n |T_n S|$

полярное разложение оператора $T_n S$ с $U_n \in \mathcal{O}_n$

Так как с другой стороны, $T_n \leq T$, то

$$\|T\|_M = \sup_n \|T_n\|_M \quad \text{т.е. в } (L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$$

выполнено условие (C).

Таким образом, ввиду предложения 2.1.16 (iv'),
 $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ банахово идеальное подпространство
 в $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$, в котором выполнены условия (B) и (C).
 Теорема доказана.

Отметим, что как и в коммутативном случае, пространство
 $L_p(\mathcal{A})$ при $p > 1$ является пространством Орлича, поро-
 денным N -функцией $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$, причем нормы
 $\|\cdot\|_{L_p}$ и $\|\cdot\|_M$ эквивалентны.
 Поэтому мы получаем следующее следствие:

С л е д с т в и е 2.3.14. В пространстве $L_p(\mathcal{A})$,
 $1 \leq p < \infty$ выполнены условия (B) и (C)^{x)}

Как уже отмечалось, если $\mathfrak{B}$ подалгебра фон Неймана
 в $\mathcal{A}$, то $L_1(\mathfrak{B}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}) \cap L_1(\mathcal{A})$

Это свойство имеет место и для произвольного пространства
 $L_p(\mathcal{A})$ $1 < p < \infty$

Покажем теперь, что этим свойством обладают и простран-
 ства Орлича.

Т е о р е м а 2.3.15 (I) Если $\mathfrak{B}$ подалгебра фон
 Неймана в $\mathcal{A}$, то

$$(i) \quad L_M^*(\mathfrak{B}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}) \cap L_M^*(\mathcal{A})$$

$$(ii) \quad \text{для каждого } T \in L_M^*(\mathfrak{B}) \quad \|T\|_M^{\mathfrak{B}} = \|T\|_M^{\mathcal{A}}$$

II Пусть L множество в $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ такое, что для любого
 $U \in \mathcal{A}_u$ и любого $T \in L$. Оператор UT также
 принадлежал L . Тогда

x) Ранее, в предложении 2.1.18 было проверено, что в прост-
 ранстве $L_p(\mathcal{A})$, $1 \leq p < \infty$ выполнено условие (A).

(i) Если для любой коммутативной подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ $L \cap \mathcal{J}(\mathcal{B}) = L_M(\mathcal{B})$, то $L = L_M(\mathcal{A})$

(ii) Если для любой коммутативной подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ $L \cap \mathcal{J}(\mathcal{B}) = L_M^*(\mathcal{B})$, то $L = L_M^*(\mathcal{A})$

Доказательство (I) (i) Пусть

$$T \in \mathcal{J}(\mathcal{B}) \cap L_M^*(\mathcal{A})$$

Тогда $TS \in L_1(\mathcal{A})$ для каждо-

го $S \in L_N(\mathcal{A})$, в частности, для каждого $S \in L_N(\mathcal{B})$

Поэтому $TS \in \mathcal{J}(\mathcal{B}) \cap L_1(\mathcal{A}) = L_1(\mathcal{B})$ для каждого

$$S \in L_N(\mathcal{B}) \quad \text{т.е.} \quad T \in L_M^*(\mathcal{B})$$

Обратно, пусть $T \in L_M^*(\mathcal{B})$ и $T \neq 0$

Рассмотрим оператор $T_1 = \frac{T}{\|T\|_M^{\mathcal{B}}}$ Тогда $T_1 \in L_M^*(\mathcal{B})$

и $\|T_1\|_M^{\mathcal{B}} = 1$ и поэтому, ввиду предложения 2.3.I3 (i),

$$\therefore T_1 \in \mathcal{P}_M(\mathcal{B}) \subset \mathcal{P}_M(\mathcal{A}) \subset L_M(\mathcal{A}) \subset L_M^*(\mathcal{A})$$

Следовательно, $T = \|T\|_M^{\mathcal{B}} \cdot T_1 \in L_M^*(\mathcal{A})$ и значит

$$T \in \mathcal{J}(\mathcal{B}) \cap L_M^*(\mathcal{A})$$

(ii) Предположим сначала, что $\mathcal{B}$ коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{A}$. Тогда, как уже отмечалось.

$(L_M^*(\mathcal{B}), \|\cdot\|_M^{\mathcal{B}})$ функциональное пространство Орлича.

Поэтому норма Орлича оператора $T \in L_M^*(\mathcal{B})$ имеет следующее представление:

$$\|T\|_M^{\mathcal{B}} = \inf_{\kappa > 0} \left\{ \frac{1}{\kappa} (1 + m(M(\kappa|T|))), \kappa T \in L_M(\mathcal{B}) \right\}$$

(см. [20], стр. 110)

С другой стороны, по предложению 2.3.II (v),

$$\|T\|_M^\alpha = \left\| \frac{kT}{k} \right\|_M^\alpha = \frac{1}{k} \|kT\|_M^\alpha \leq$$

$$\leq \frac{1}{k} [1 + m(M(|kT|))] \quad \text{где } kT \in L_M(\mathcal{B}) \subset L_M(\mathcal{A})$$

Поэтому

$$\|T\|_M^\alpha \leq \inf_{k>0} \left\{ \frac{1}{k} (1 + m(M(|kT|))) \right\}, kT \in L_M(\mathcal{B}) \} = \|T\|_M^\mathcal{B}$$

$$\text{откуда } \|T\|_M^\alpha = \|T\|_M^\mathcal{B}.$$

Пусть теперь $\mathcal{B}$ произвольная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{A}$, $T \in L_M^*(\mathcal{B})$ и $T \geq 0$.

Тогда $\mathcal{B}(T)$ — коммутативная подалгебра фон Неймана как в $\mathcal{B}$, так и в $\mathcal{A}$, и потому

$$\|T\|_M^\mathcal{B} = \|T\|_{\mathcal{B}(T)}^\mathcal{B} = \|T\|_M^\alpha$$

Для произвольного оператора $T \in L_M^*(\mathcal{B})$ имеем:

$$\|T\|_M^\alpha = \| |T| \|_M^\alpha = \| |T| \|_M^\mathcal{B} = \|T\|_M^\mathcal{B}$$

(II) Пусть $L \subset \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ такое, что $UL \subset L$ для любого $U \in \mathcal{A}_u$.

(i) Пусть для любой коммутативной подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ $L \cap \mathcal{Z}(\mathcal{B}) = L_M(\mathcal{B})$.

И пусть $T \in L$. Тогда $|T| \in L$ и потому

$$|T| \in L \cap \mathcal{Z}(\mathcal{B}(|T|)) = L_M(\mathcal{B}(|T|)) \subset L_M(\mathcal{A}) \quad (\text{см. пред-}$$

ложение 2.3.12) откуда $T \in L_M(\mathcal{A})$

Обратно, если $T \in L_M(\mathcal{A})$

то $|T| \in L_M(\mathcal{A})$

$$\text{и } |T| \in L_M(\mathcal{B}(|T|)) = L \cap \mathcal{Z}(\mathcal{B}(|T|)) \subset L$$

Поэтому $L = L_M(\mathcal{A})$

(ii) Доказывается аналогично, используя равенство

$$L_M^*(\mathcal{B}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}) \cap L_M^*(\mathcal{A})$$

З а м е ч а н и е 2.3.16 В пункте II теоремы 2.3.15 вместо класса всех коммутативных подалгебр фон Неймана $\mathcal{B}$ можно брать класс коммутативных подалгебр фон Неймана, порожденных одним элементом, или класс максимальных коммутативных подалгебр фон Неймана.

З а м е ч а н и е 2.3.17 Поскольку пространство

$L_p(\mathcal{A})$ является пространством Орлича при $p > 1$, то из теоремы 2.3.15 следует, что если $L \cap \mathcal{J}(\mathcal{B}) = L_p(\mathcal{B})$ для каждой коммутативной подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, то $L = L_p(\mathcal{A})$. Пространства $L_1(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}$ не являются пространствами Орлича, однако для них, как видно из доказательства, утверждения теоремы 2.3.15 сохраняются.

Так как в коммутативном случае норма любого элемента пространства Орлича конечна, то мы получаем следующее важное следствие:

С л е д с т в и е 2.3.18 Для каждого оператора

$$T \in L_M^*(\mathcal{A}) \quad \|T\|_M < \infty.$$

Перейдем к рассмотрению нормы Люксембурга на $L_M^*(\mathcal{A})$

О п р е д е л е н и е 2.3.19. Для каждого оператора

$$T \in L_M^*(\mathcal{A})$$

$$\|T\|_{(M)} = \sup \{ |m(TS)|, S \in L_N^*(\mathcal{A}), \|S\|_N \leq 1 \}$$

назовем нормой Люксембурга оператора T .

П р е д л о ж е н и е 2.3.20. Норма Люксембурга обладает всеми свойствами нормы:

(i) $\|T\|_{(M)} \geq 0$ для каждого $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и $\|T\|_{(M)} = 0$ лишь при $T = 0$

(ii) $\|\alpha T\|_{(M)} = |\alpha| \cdot \|T\|_{(M)}$ $T \in L_M^*(\mathcal{A})$, α - число

(iii) $\|T+R\|_{(M)} \leq \|T\|_{(M)} + \|R\|_{(M)}$, $T, R \in L_M^*(\mathcal{A})$

Кроме того

(iv) $\|T\|_{(M)} \leq \|T\|_M \leq 2 \|T\|_{(M)}$ для каждого $T \in L_M^*(\mathcal{A})$

(v) $\|T\|_{(M)} = \| |T| \|_{(M)} = \|T^*\|_{(M)} = \|UT\|_{(M)} = \|U^*TU\|_{(M)}$

где $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и $U \in \mathcal{A}_u$

(vi) Для каждого $T \in L_M^*(\mathcal{A})$, $T \neq 0$

$$m\left(M\left(\frac{|T|}{\|T\|_{(M)}}\right)\right) \leq 1$$

(vii) Если $T \in L_M^*(\mathcal{A})$, $\|T\|_{(M)} \leq 1$, то

$$T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad m(M(|T|)) \leq \|T\|_{(M)}$$

(viii) (Усиленные неравенства Гёльдера)

Если $T \in L_M^*(\mathcal{A})$, $S \in L_N^*(\mathcal{A})$, то

$$|m(TS)| \leq \|T\|_M \|S\|_{(N)}$$

и $|m(TS)| \leq \|T\|_{(M)} \|S\|_N$

Доказательство (iv) Пусть $S \in L_N^*(\mathcal{A})$ и $\|S\|_N \leq 1$. Тогда $S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$ и потому

$$\|T\|_{(M)} = \sup \{ |m(TS)|, S \in L_N^*(\mathcal{A}), \|S\|_N \leq 1 \} \leq$$

$$\leq \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \} = \|T\|_M.$$

с другой стороны, если $S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \subset L_N(\mathcal{A})$

по 2.3.II (v) $\|S\|_N \leq m(N(|S|)) + 1 \leq 2$

Поэтому $\|T\|_M = \sup\{|m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})\} \leq$
 $\leq \sup\{|m(TS)|, S \in L_N^*(\mathcal{A}), \|S\|_N \leq 2\} = 2\|T\|_{(M)}$

(i) если $\|T\|_{(M)} = 0$

и тогда $T = 0$

, то по (iv) $\|T\|_M = 0$

(ii) и (iii) Очевидны.

(v) Пусть $U, V \in \mathcal{A}_h$

и $T \in L_M^*(\mathcal{A})$

$$\|UTV\|_{(M)} = \sup\{|m(UTVS)|, S \in L_N^*(\mathcal{A}), \|S\|_N \leq 1\} =$$

$$= \sup\{|m(TVSU)|, S \in L_N^*(\mathcal{A}), \|S\|_N \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{|m(TS')|, S' \in L_N^*(\mathcal{A}), \|S'\|_N \leq 1\} = \|T\|_{(M)}$$

Отсюда $\|UTV\|_{(M)} = \|T\|_{(M)}$

Из этого равенст-

ва получаются все остальные.

(vi) Пусть $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и $T \neq 0$

Рассмотрим подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}(|T|)$

$|T| \in L_M^*(\mathcal{B}(|T|))$ и как легко видеть,

$$\| |T| \|_{(M)}^{\mathcal{B}(|T|)} \leq \| |T| \|_{(M)}^{\mathcal{A}}, \quad \text{поэтому}$$

$$\frac{\| |T| \|_{(M)}^{\mathcal{A}}}{\| |T| \|_{(M)}} \leq \frac{\| |T| \|_{(M)}^{\mathcal{B}(|T|)}}{\| |T| \|_{(M)}}$$

Пространство $(L_M^*(\mathcal{B}(|T|)), \|\cdot\|_{(M)}^{\mathcal{B}(|T|)})$

функциона-

льное, поэтому (см. [20] стр. 95)

$$m\left(M\left(\frac{|T|}{\|T\|_{(M)}^{p_{(M)}}}\right)\right) \leq 1$$

откуда получаем, что

$$m\left(M\left(\frac{|T|}{\|T\|_{(M)}}\right)\right) \leq 1$$

(vii). Пусть $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и $\|T\|_{(M)} \leq 1$

Тогда

$$m(M(|T|)) = m\left(M\left(\frac{\|T\|_{(M)}}{\|T\|_{(M)}} |T|\right)\right) \leq$$

$$\leq \|T\|_{(M)} m\left(M\left(\frac{|T|}{\|T\|_{(M)}}\right)\right) \leq \|T\|_{(M)}$$

(viii) Следует из (vii).

Отметим, что т.к. нормы Орлича и Люксембурга эквивалентна, то $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{(M)})$ также является банаховым идеальным подпространством в $\mathcal{I}(\mathcal{A})$.

Норма Люксембурга, как и в коммутативном случае, будет существенно использована в следующем параграфе при изучении сопряженного к пространству $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$

§ 2.4. Пространства Орлича с (Δ_2) -условием

В этом параграфе рассматриваются пространства Орлича измеримых операторов, порожденные N -функцией, удовлетворяющей условию (Δ_2) . Для пространств этого класса получено описание сопряженного пространства и выяснены необходимые и достаточные условия рефлексивности. Эти результаты являются обобщением соответствующих классических результатов о пространствах Орлича измеримых функций (см. [15], [18], [20], [58], [59]).

Напомним, что N -функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) -условию, если существуют постоянные $K > 0$ и $u_0 \geq 0$ такие, что $M(2u) \leq K M(u)$ при $u \geq u_0$ (см. [20], стр. 35).

Пусть $E_M(\mathcal{O})$ замыкание по норме Орлича алгебры фон Неймана $\mathcal{O}$ в $L_M^*(\mathcal{O})$.

Предложение 2.4.I (i) $(E_M(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ — БИП в $\mathcal{J}(\mathcal{O})$;

(ii) $E_M(\mathcal{O}) \subset L_M(\mathcal{O})$;

(iii) в $(E_M(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ выполнено условие (A).

Доказательство (i) Пусть $T \in E_M(\mathcal{O})$ и $T_n \in \mathcal{O}$, $n=1, 2, \dots$ такие, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} T$. Тогда $T_n^* \in \mathcal{O}$ и $T_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|_M} T^*$ откуда $T^* \in E_M(\mathcal{O})$.

Аналогично, если $T \in E_M(\mathcal{O})$ и $U, V \in \mathcal{O}$, то

$UTV \in E_M(\mathcal{O})$, следовательно, $ATB \in E_M(\mathcal{O})$ для любых $A, B \in \mathcal{O}$. Пусть теперь $T \in E_M(\mathcal{O})$, $T_1 \in \mathcal{J}(\mathcal{O})$ и $|T_1| \leq |T|$. Существует $H \in \mathcal{O}$ такой, что

$\|H\|_\infty \leq 1$ и $|T_1| = H^* |T| H$. Значит, $T_1 \in E_M(\mathcal{O})$.

Таким образом, $(E_M(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ замкнутое идеальное нормированное подпространство в $(L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ т.е. $(E_M(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ — БИП в $\mathcal{S}(\mathcal{O})$.

(ii) Покажем сначала, что если $0 \leq B \leq A$ и $A \in L_M(\mathcal{O})$, то $B \in L_M(\mathcal{O})$. Действительно, для любого $\alpha > 0$ имеем: $\tilde{B}(\alpha) \leq \tilde{A}(\alpha)$. Функция $M(u)$ возрастающая

при $u \geq 0$ поэтому $0 \leq M(\tilde{B})(\alpha) \leq M(\tilde{A})(\alpha)$ или, ввиду предложения 2.3.6 $0 \leq [M(B)]^{\sim}(\alpha) \leq [M(A)]^{\sim}(\alpha)$ для любого $\alpha > 0$. Так как $A \in L_M(\mathcal{O})$, то $M(A) \in L_1(\mathcal{O})$ откуда

$$\int_0^{\infty} [M(B)]^{\sim}(\alpha) d\alpha \leq \int_0^{\infty} [M(A)]^{\sim}(\alpha) d\alpha < \infty \quad (\text{см. § 0}).$$

Следовательно, $M(B) \in L_1(\mathcal{O})$, т.е. $B \in L_M(\mathcal{O})$.

Пусть теперь $T \in E_M(\mathcal{O})_+$. Найдется такая последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}_h$, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} T$,

следовательно, существует номер K такой, что для всех $n > K$ $\|T_n - T\|_M \leq \frac{1}{2}$ откуда по предложению

2.3.13 (i) $2(T_n - T) \in L_M(\mathcal{O})$ Так как $\mathcal{O} \subset L_M(\mathcal{O})$ (см. предложение 2.3.7), то $2T_n \in L_M(\mathcal{O})$ для всех n .

Для фиксированного $n > K$ рассмотрим неравенство:

$$0 \leq T = \frac{1}{2}(2T_n) + \frac{1}{2}(2T - 2T_n) \leq \frac{1}{2}\|2T_n\|_{\infty} \cdot 1 + \frac{1}{2}[2(T - T_n)]$$

Пусть $\mathcal{F}$ — максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{O}$, порожденная спектральным семейством оператора $2(T - T_n)$. Тогда операторы $\|2T_n\|_{\infty} \cdot 1$ и $2(T - T_n)$ принадлежат функциональному классу Орлича $L_M(\mathcal{F})$ (см.

предложение 2.3.12 (i), который является выпуклым множеством (см. [20], стр. 80). Поэтому $\frac{1}{2} \|2T_n\|_\infty \cdot 1 +$

$$+ \frac{1}{2} [2(T - T_n)] \in L_M(\mathbb{F}) \subset L_M(\mathcal{O}) \text{ откуда, как показано выше,}$$

(iii) Предположим, что в $(E_M(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ условие (A) не выполнено. Тогда существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset E_M(\mathcal{O})$ и положительное число δ такие, что $T_n \downarrow 0$ и $\|T_n\|_M > \delta$ для всех n .

Для каждого n рассмотрим коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(T_n)$.

По предложению 2.3.20 (iv) и теореме 2.3.15 (I) (ii) имеем:

$$\|T_n\|_{(M)}^{\mathcal{B}_n} \leq \|T_n\|_M^{\mathcal{B}_n} = \|T\|_M \leq 2 \|T_n\|_{(M)}^{\mathcal{B}_n} \quad \text{поэтому}$$

$$\|T_n\|_{(M)}^{\mathcal{B}_n} > \frac{\delta}{2}. \quad \text{Так как}$$

$$\|T_n\|_{(M)}^{\mathcal{B}_n} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} T_n \in \mathcal{P}_M(\mathcal{B}_n) \right\} \quad (\text{см. [20], стр. 95}),$$

$$\text{и } E_M(\mathcal{O}) \subset L_M(\mathcal{O}), \text{ то } m\left(M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right) > 1.$$

$$\text{С другой стороны, } \frac{2T_n}{\delta} \downarrow 0, \text{ поэтому } \frac{2T_n}{\delta} \xrightarrow{\text{п.м.}} 0$$

$$\text{т.е. } \left(\frac{2T_n}{\delta}\right)^\sim(\alpha) \rightarrow 0 \text{ для каждого } \alpha > 0 \quad (\text{см. § 0}),$$

$$\text{Функция } M(u) \text{ непрерывна, следовательно, } \left[M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right]^\sim(\alpha) \rightarrow 0$$

$$\text{Кроме того, } \left[M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right]^\sim(\alpha) \text{ интегрируемы на } (0, +\infty) \text{ и}$$

$$\left[M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right]^\sim(\alpha) \leq \left[M\left(\frac{2T_1}{\delta}\right)\right]^\sim(\alpha) \text{ для каждого } \alpha > 0.$$

$$\text{Поэтому, по теореме Лебега } \int_0^\infty \left[M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right]^\sim(\alpha) d\alpha \rightarrow 0$$

$$\text{откуда } \int_0^\infty \left[M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right]^\sim(\alpha) d\alpha = \|M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\|_1 = m\left(M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right) \rightarrow 0$$

$$\text{что противоречит неравенству } m\left(M\left(\frac{2T_n}{\delta}\right)\right) > 1.$$

Следовательно, в $(E_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$

В следующей теореме рассматривается ряд необходимых и достаточных условий, при которых пространство Орлича $L_M^*(\mathcal{O})$ порождается N - функцией, удовлетворяющей условию (Δ_2)

Т е о р е м а 2.4.2. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{O}$ содержит непрерывную коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$. Тогда следующие условия эквивалентны.

- (i) функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию;
- (ii) $L_M^*(\mathcal{O}) = L_M(\mathcal{O})$;
- (iii) $L_M(\mathcal{O})$ - линейное множество;
- (iv) в $(L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ выполнено условие (A);
- (v) $L_M^*(\mathcal{O}) = E_M(\mathcal{O})$
- (vi) в $(E_M(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ выполнено условие (B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию и $T \in L_M^*(\mathcal{O})_+$. Тогда $T \in L_M^*(\mathcal{B}(T))$ (см. предложение 2.3.12 (ii)), где $\mathcal{B}(T)$ - коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{O}$, порожденная спектральным семейством оператора

T . Рассмотрим функциональное пространство Орлича $(L_M^*(\mathcal{B}(T)), \|\cdot\|_M)$. По теореме 8.2 из [20]. $L_M^*(\mathcal{B}(T)) = L_M(\mathcal{B}(T))$. Поэтому $T \in L_M(\mathcal{O})^*$. В силу предложений 2.3.7 и 2.3.8. $L_M^*(\mathcal{O}) = L_M(\mathcal{O})$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $L_M(\mathcal{O})$ линейное множество и

$T \in L_M^*(\mathcal{O}), T \neq 0$. Рассмотрим $T' = \frac{1}{\|T\|_M} \cdot T$

Так как $\|T'\|_M = 1$, то по предложению 2.3.13 (i) $T' \in L_M(\mathcal{O})$ откуда $\|T\|_M \cdot T' = T \in L_M(\mathcal{O})$.

Следовательно, $L_M^*(\mathcal{A}) = L_M(\mathcal{A})$

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Доказывается так же, как предложение

2.4.1 (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (v)

следует из предложения 2.1.16 (i)

(v) $\Rightarrow$ (ii)

следует из предложений 2.3.7 и 2.4.1 (ii)

(v) $\Rightarrow$ (vi)

следует из теоремы 2.3.5.

(vi) $\Rightarrow$ (v)

Пусть в $(E_M(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$

выполнено ус-

ловие (B) и $T \in L_M^*(\mathcal{A})_+$. Существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}_+$ такая, что $T_n \uparrow T$

Тогда $T_n \in E_M(\mathcal{A})$ и $\sup_n \|T_n\|_M \leq \|T\|_M < \infty$

Поэтому найдется такой оператор $T' \in E_M(\mathcal{A})$, что $T_n \uparrow T'$

Следовательно, $T_n \xrightarrow{п.м.} T$ и $T_n \xrightarrow{п.м.} T'$ в $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ и

т.к. топология $\mathcal{T}$ сходимости по мере отделима, то

$T = T' \in E_M(\mathcal{A})$ откуда $L_M^*(\mathcal{A}) = E_M(\mathcal{A})$

(iii) $\Rightarrow$ (i) По предложению 2.3.12 (i) имеем:

$$L_M(\mathcal{B}) = \mathcal{S}(\mathcal{B}) \cap L_M(\mathcal{A})$$

Если $L_M(\mathcal{A})$ - линейное множество, то функциональный класс Орлича $L_M(\mathcal{B})$ тоже является линейным множеством.

Следовательно, по теореме 8.2 из [20], функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 - условию.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.4.3 Предположение, что алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ содержит непрерывную коммутативную подалгебру $\mathcal{B}$ используется только при доказательстве импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) теоремы 2.4.2.

С л е д с т в и е 2.4.4 Если функция $N(v)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, то для любого оператора $T \in L_M^*(\mathcal{A})$

$$(i) \quad \|T\|_M = \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \};$$

$$(ii) \quad \|T\|_{(M)} = \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{A}, \|S\|_N \leq 1 \}.$$

Доказательство (i) Пусть $N(v)$ удовлетворяет (Δ_2) условию и $S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$, $S \geq 0$. Рассмотрим коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}(S)$ в $\mathcal{A}$. Тогда

$E_N(\mathcal{B}(S)) = L_N^*(\mathcal{B}(S)) = L_N(\mathcal{B}(S))$ и потому существует последовательность $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(S)$ такая, что

$$0 \leq S_n \leq S \quad \text{и} \quad S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_N} S.$$

Функция $N(v)$ возрастающая при $v \geq 0$, поэтому

$$m(N(S_n)) \leq m(N(S)) \leq 1, \quad \text{т.к. } S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$$

Следовательно, $S_n \in \mathcal{P}_N(\mathcal{B}(S)) \subset \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$

Кроме того, $|m(TS) - m(TS_n)| = |m(T(S - S_n))| \leq$

$$\leq \|T\|_M \|S - S_n\|_N \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Отсюда $m(TS) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(TS_n)$

Пусть теперь $S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$ произвольный и $S = U|S|$ его полярное разложение с $U \in \mathcal{A}_u$.

Тогда $|S| \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})$ и найдется последовательность

$$S'_n \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \quad \text{такая, что } S'_n \xrightarrow{\|\cdot\|_N} |S|$$

Рассмотрим последовательность операторов $R_n = US'_n$

Ясно, что $R_n \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}$ и т.к.

$$|m(TS) - m(TR_n)| = |m(TU(|S| - S'_n))| \leq$$

$$\leq \|TU\|_M \| |S| - S'_n \|_N = \|T\|_M \| |S| - S'_n \|_N \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, то $m(TS) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(TR_n)$

Таким образом

$$\|T\|_M = \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \} =$$

$$= \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} |m(TS_n)|, S_n \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}, S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_N} S \right\} =$$

$$= \sup \{ |m(TS')|, S' \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} \}$$

(ii) Доказывается аналогично.

Перейдем к рассмотрению линейных непрерывных функционалов на пространстве Орлича $L_M^*(\Omega)$.

Предложение 2.4.5 (i) Для каждого $S \in L_N^*(\Omega)$ линейный функционал f_S , определенный равенством

$$(*) \quad f_S(T) = m(TS)$$

для всех $T \in L_M^*(\Omega)$ является непрерывным на $(L_M^*(\Omega), \|\cdot\|_M)$ и $\|f_S\| = \|S\|_N$

(ii) Если функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) -условию и f - непрерывный линейный функционал на $(L_M^*(\Omega), \|\cdot\|_M)$ то существует единственный оператор $S \in L_N^*(\Omega)$ такой, что $f = f_S$ т.е. $f(T) = m(TS)$ для всех $T \in L_M^*(\Omega)$

Доказательство (i) Пусть $S \in L_N^*(\Omega)$ и $f_S(T) = m(TS)$. По предложению 2.3.13 (ii)

$$|m(TS)| \leq \|T\|_M \|S\|_N$$

Поэтому f_S линейный непрерывный функционал на $(L_M^*(\Omega), \|\cdot\|_M)$. Кроме того

$$\begin{aligned} \|f_S\| &= \sup \{ |m(TS)|, \|T\|_M \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ |m(S^*T)|, \|T\|_M \leq 1 \} = \|S^*\|_{(N)} = \|S\|_{(N)} \end{aligned}$$

(ii) Пусть функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию. Следовательно, по теореме 2.4.2, $L_M^*(\Omega) = L_M(\Omega)$ и значит

$$\begin{aligned} [L_M^*(\Omega)]' &= \{ S : TS \in L_1(\Omega), T \in L_M^*(\Omega) \} = \\ &= \{ S : ST \in L_1(\Omega), T \in L_M(\Omega) \} = L_N^*(\Omega) \end{aligned}$$

(см. § 2.2)

Поэтому, по теоремам 2.2.8 и 2.4.2 получаем, что для любого непрерывного линейного функционала f на $L_M^*(\Omega)$ найдется оператор $S \in L_N^*(\Omega)$ такой, что $f(T) = m(TS)$ для всех $T \in L_M^*(\Omega)$. Так как след m точен, то оператор S выбирается однозначно.

Заметим, что если функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то $E_M(\mathcal{A})$ -собственное подмножество в $L_M^*(\mathcal{A})$. Это приводит нас к следующему предложению:

Предложение 2.4.6 Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ содержит непрерывную коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$. Если функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию, то (*) не является общим видом линейного непрерывного функционала на $L_M^*(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию. Рассмотрим оператор $T_0 \in L_M^*(\mathcal{A}) \setminus E_M(\mathcal{A})$ (См. теорему 2.4.2). Определим на $L_M^*(\mathcal{A})$ функционал f следующим образом:

$f(T_0) = 1$ и $f(T_1) = 0$ для каждого $T_1 \in E_M(\mathcal{A})$ и продолжим его по теореме Хана - Банаха на $L_M^*(\mathcal{A})$ с сохранением нормы.

Допустим, что существует оператор $S \in L_N^*(\mathcal{A})$ такой, что $f(T) = m(TS)$ для каждого $T \in L_M^*(\mathcal{A})$. Имеем

$$f(T) = m(TS) = m(TU|S|)$$

где $S = U|S|$ полярное разложение оператора S с унитарным $U \in \mathcal{A}_u$.

Рассмотрим функционал $f_1(T) = f(TU^*)$

Тогда $f_1(T) = f(TU^*) = m(TU^*U|S|) = m(T|S|)$

и $f_1(T_0U) = f(T_0UU^*) = f(T_0) = 1$

Обозначим через $P_n = \{ |S| \leq n \}$. Ясно, что

$P_n \in \mathcal{A} \subset E_M(\mathcal{A})$ и $m(P_n|S|) = f_1(P_n) = f(P_nU^*) = 0$

Но $P_n|S| \geq 0$. Следовательно $P_n|S| = 0$ для

любого n . Отсюда $|S| = 0$, т.е. $S = 0$.

Значит $f_1 \equiv 0$ вопреки построению.

Итак, функционал f нельзя представить в виде (*), несмотря на то, что он линеен и непрерывен на $L_M^*(\mathcal{A})$.

В случае, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ коммутативна, формула (*) дает общий вид линейного непрерывного функционала на $(E_M(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ (См. [20] теорема I4.2). Это утверждение остается верным и тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ некоммутативна.

Предложение 2.4.7. Если f непрерывный линейный функционал на $(E_M(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$, то существует единственный оператор $S \in L_N^*(\mathcal{A})$ такой, что $f(T) = m(TS)$ для каждого $T \in E_M(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть f непрерывный линейный функционал на $(E_M(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$. По предложению 2.4.1 (iii) и теореме 2.2.8 существует единственный оператор $S \in [E_M(\mathcal{A})]'$ такой, что $f(T) = m(TS)$ для каждого оператора $T \in E_M(\mathcal{A})$. Осталось показать, что $S \in L_N^*(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ и $T_n \in \mathcal{A}$ такие, что $T_n \uparrow T$. Тогда $T_n \xrightarrow{p.m.} T$ и значит $T_n S \xrightarrow{p.m.} TS$. Так как

$$\begin{aligned} \|T_n S - T_k S\| &= m|(T_n - T_k)S| = m(U^*(T_n - T_k)S) = \\ &= f(U^*(T_n - T_k)) \leq \|f\| \cdot \|U^*(T_n - T_k)\|_M = \|f\| \cdot \|T_n - T_k\|_M \end{aligned}$$

где $(T_n - T_k)S = U|(T_n - T_k)S|$ — полярное разложение оператора $(T_n - T_k)S$ с $U \in \mathcal{A}_n$, то $\{T_n S\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_1(\mathcal{A})$ и следовательно, существует оператор $T' \in L_1(\mathcal{A})$ такой, что $T_n S \xrightarrow{L_1} T'$.

Поэтому $TS = T' \in L_1(\mathcal{A})$ и значит $S \in L_N^*(\mathcal{A})$.

Перейдем к рассмотрению вопроса рефлексивности простран-

ства Орлича $(L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$.

Т е о р е м а 2.4.8 Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{O}$ содержит непрерывную коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$. Тогда

- (i) Сопряженное к пространству $(L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ изометрически изоморфно $(L_N^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_N)$ в том и только в том случае, когда функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию;
 (ii) Пространство Орлича $(L_M^*(\mathcal{O}), \|\cdot\|_M)$ рефлексивно в том и только в том случае, когда функции $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют Δ_2 - условию.

Д о к а з а т е л ь с т в о (i) Следует из предложений 2.4.5 и 2.4.6.

(ii) Пусть $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют (Δ_2) - условию. Прежде всего покажем, что если $\mathcal{B}_1$ - максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{O}$, то для каждого $T \in L_M^*(\mathcal{B}_1)$

$$\|T\|_{(M)}^{\mathcal{B}_1} = \|T\|_{(M)}^{\mathcal{O}}. \quad \text{Так как } L_N^*(\mathcal{B}_1) \subset L_N^*(\mathcal{O}) \quad \text{то}$$

$$\|T\|_{(M)}^{\mathcal{B}_1} = \sup \{ |m(TS)|, S \in L_N^*(\mathcal{B}_1), \|S\|_N \leq 1 \} \leq \\ \leq \sup \{ |m(TS)|, S \in L_N^*(\mathcal{O}), \|S\|_N \leq 1 \} = \|T\|_{(M)}^{\mathcal{O}}$$

Докажем обратное неравенство. Так как $N(v)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, то по следствию 2.4.4 (ii)

$$\|T\|_{(M)}^{\mathcal{O}} = \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{O}, \|S\|_N \leq 1 \}$$

Зафиксируем $S \in \mathcal{O}$, $\|S\|_N \leq 1$ и покажем, что найдется такой оператор $S' \in \mathcal{B}_1$ что $\|S'\|_N \leq 1$ и $m(TS) = m(TS')$.

Для этого рассмотрим слабо замкнутую выпуклую оболочку $\mathcal{K}_S'$ множества $\{U^* S U, U \in \mathcal{B}_1, \|U\|_N \leq 1\}$. По лемме I из § 9 работы

[42] существует оператор $S' \in \mathcal{K}_S \cap \mathcal{B}_1$. Так как $S' \in \mathcal{K}_S$ то найдется последовательность $\{S_n'\}_{n=1}^\infty$ из выпуклой

оболочки множества $\{U^* S U, U \in \mathcal{B}_{1n}\}$, такая, что $S'_n \rightarrow S'$ слабо. Тогда $S'_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i U_i^* S U_i$ где $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i = 1$ и $U_i \in \mathcal{B}_{1n}$.

Так как

$$\begin{aligned} \|S'_n\|_\infty &= \left\| \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i U_i^* S U_i \right\|_\infty \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i \|U_i^* S U_i\| \leq \|S\|_\infty \end{aligned}$$

то

$S'_n \rightarrow S'$ ультраслабо и значит для любого $R \in \mathcal{O}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(S'_n R) = m(S' R)$.

Так как $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то по следствию 2.4.4 (i)

$$\begin{aligned} \|S'\|_N &= \sup \{ |m(S' R)|, R \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O} \} = \\ &= \sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} |m(S'_n R)|, R \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O} \right\} \leq \\ &\leq \sup_n \left\{ \sup \{ |m(S'_n R)|, R \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O} \} \right\} = \\ &= \sup_n \|S'_n\|_N = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i U_i^* S U_i \right\|_N \leq \\ &\leq \sup_n \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i \|U_i^* S U_i\|_N = \|S\|_N \leq 1 \end{aligned}$$

Кроме того, $m(TS'_n) = m\left(T \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i U_i^* S U_i\right) =$
 $= \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i m(TU_i^* S U_i) = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i m(U_i T U_i^* S) =$
 $= \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i m(TU_i U_i^* S) = m(TS).$

Пусть теперь $T \in \mathcal{B}_1$. Так как $S'_n \rightarrow S'$ ультраслабо, то $\lim_{n \rightarrow \infty} m(TS'_n) = m(TS')$

Поэтому $m(TS) = m(TS')$

Если же $T \in L_M^*(\mathcal{B}_1)$, то по теореме 2.4.2 алгебра фон Неймана $\mathcal{B}_1$ плотна в $L_M^*(\mathcal{B}_1)$ по норме Орлича, и

Следовательно, существует последовательность $\{T_n\} \subset \mathcal{B}$, такая, что $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} T$

По доказанному, для каждого n $m(T_n S) = m(T_n S')$

$$\begin{aligned} \text{Далее } |m(TS) - m(TS')| &= |m(TS) - m(T_n S)| + \\ &+ |m(T_n S) - m(T_n S')| \leq |m((T - T_n)S)| + |m((T_n - T)S')| \leq \\ &\leq \|T - T_n\|_M \|S\|_N + \|T_n - T\|_M \|S'\|_N \leq 2 \|T_n - T\|_M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Поэтому $m(TS) = m(TS')$

Наконец, $\|T\|_{(M)}^\alpha = \sup \{ |m(TS)|, S \in \mathcal{A}, \|S\|_N \leq 1 \} \leq$

$$\leq \sup \{ |m(TS')|, S' \in \mathcal{B}_1, \|S'\|_N \leq 1 \} = \|T\|_{(M)}^{\mathcal{B}_1}$$

Теперь покажем, что $\mathcal{P}_M(\mathcal{A}) = \{T : \|T\|_{(M)} \leq 1\}$

Действительно, по предложению 2.3.20 (vii) имеем

$$\{T : \|T\|_{(M)} \leq 1\} \subseteq \mathcal{P}_M(\mathcal{A}). \quad \text{Обратно, пусть } T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$$

Рассмотрим коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}(|T|)$ в

$\mathcal{A}$. Тогда $|T| \in \mathcal{P}_M(\mathcal{B}(|T|))$ и значит

$$\| |T| \|_{(M)}^{\mathcal{B}(|T|)} \leq 1 \quad (\text{См. [20] теорема 9.5})$$

$$\text{Отсюда } \|T\|_{(M)} = \| |T| \|_{(M)}^\alpha = \| |T| \|_{(M)}^{\mathcal{B}(|T|)} \leq 1.$$

т.е. $\{T: \|T\|_{(M)} \leq 1\} = \mathcal{P}_M(\mathcal{A})$

Пусть теперь f — непрерывный линейный функционал на $(L_N^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{(N)})$. Так как нормы $\|\cdot\|_N$ и $\|\cdot\|_{(N)}$ эквивалентны, то однозначно определяется оператор T из $L_M^*(\mathcal{A})$ такой, что $f(S) = m(TS)$ для каждого $S \in L_N^*(\mathcal{A})$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } \|f\| &= \sup\{|m(TS)|, \|S\|_{(N)} \leq 1\} = \\ &= \sup\{|m(TS)|, S \in \mathcal{P}_N(\mathcal{A})\} = \|T\|_M \end{aligned}$$

Следовательно, $(L_N^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{(N)})^*$ и $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ изометрически изоморфны, откуда, ввиду (i), получаем, что пространство Орлича $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ рефлексивно.

Пусть теперь $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$ рефлексивно. Так как $(L_M^*(\mathcal{B}), \|\cdot\|_M)$ — замкнутое подпространство рефлексивного пространства $(L_M^*(\mathcal{A}), \|\cdot\|_M)$, то оно также рефлексивно. Поэтому функции $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют (Δ_2) — условию (См. например, [15] стр. 242 и 261).

В заключение рассмотрим в пространстве Орлича сходимость в среднем.

О п р е д е л е н и е 2.4.9 Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $L_M^*(\mathcal{A})$ сходится к оператору $T \in L_M^*(\mathcal{A})$ в среднем, если $\lim_{n \rightarrow \infty} m(M(|T_n - T|)) = 0$

Сходимость в среднем обладает следующими свойствами:

П р е д л о ж е н и е 2.4.10 (I) Алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ плотна в $L_M(\mathcal{A})$ в среднем.

(II) Если $T_n, T \in L_M^*(\mathcal{A})$, $n=1, 2, \dots$ и $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} T$, то $T_n \rightarrow T$ в среднем.

(III) Если функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию и $T_n \in \mathcal{O}_1, n=1,2,\dots$ то следующие условия эквивалентны:

$$(i) T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} 0$$

$$(ii) T_n \xrightarrow{п.м.} 0$$

$$(iii) T_n \longrightarrow 0 \quad \text{в среднем.}$$

Доказательство. (I) Пусть $T \in L_M(\mathcal{O})$. Рассмотрим коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}(|T|) = \mathcal{B}$ - фундаментальный класс Орлича. Тогда $|T| \in L_M(\mathcal{B})$. Следовательно, существует последовательность $\{T'_n\} \subset \mathcal{B}$ такая, что $T'_n \longrightarrow |T|$ в среднем, т.е.

$$m(M(|T'_n - |T||)) \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (\text{См. [20] стр. 94}).$$

Пусть $T = U|T|$ полярное разложение оператора T с $U \in \mathcal{O}_u$. Рассмотрим операторы $T_n = UT'_n$. Тогда

$$|T_n - T| = |UT'_n - U|T|| = |U(T'_n - |T||) = |T'_n - |T||$$

поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} m(M(|T_n - T|)) = 0$ т.е. $T_n \rightarrow T$ в среднем.

(II) Пусть $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} T$. Тогда существует номер n_0 такой, что для $n \geq n_0$ $\|T_n - T\|_M < 1$

Отсюда по предложению 2.3.13 (i) $T_n - T \in \mathcal{P}_M(\mathcal{O})$ и

$$m(M(|T_n - T|)) \leq \|T_n - T\|_M.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} m(M(|T_n - T|)) = 0$ т.е.

$$T_n \longrightarrow T \quad \text{в среднем.}$$

(III) (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из предложения 2.1.13.

(i) $\Rightarrow$ (iii) следует из (II)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Пусть $T_n \xrightarrow{п.м.} 0$, следовательно-

$$\text{но, } |T_n| \xrightarrow{п.м.} 0$$

и по I.1.7 (ii) существует подпоследо-

последовательность $\{n_k\}$ такая, что $|T_{n_k}| \xrightarrow{\Delta.п.в.} 0$. Так как $T_{n_k} \in \mathcal{O}$ то по теореме I.2.6 $|T_{n_k}| \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{O}$ т.е. существует последовательность $\{A_k\} \in \mathcal{O}$ такая, что $A_k \downarrow 0$ и $|T_{n_k}| \leq A_k$. Тогда $\| |T_{n_k}| \|_M \leq \| A_k \|_M$ и т.к. в $(L_M^*(\mathcal{O}), \| \cdot \|_M)$ выполнено условие (A), то

$\| A_k \|_M \rightarrow 0$ откуда $\| T_{n_k} \|_M \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$

Сходимость по норме звездная в себе, поэтому $T_n \xrightarrow{\| \cdot \|_M} 0$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Пусть $T_n \rightarrow 0$ в среднем, т.е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} m(M(|T_n|)) = 0$: Тогда $M(|T_n|) \xrightarrow{\| \cdot \|_1} 0$ в $L_1(\mathcal{O})$

откуда $M(|T_n|) \xrightarrow{п.м.} 0$, следовательно $[M(|T_n|)]^{\sim}(\alpha) \rightarrow 0$

для любого $\alpha > 0$ (см. § 0). Функция $M^{-1}(u)$ непрерывна, строго возрастает и $M^{-1}(0) = 0$. Поэтому

$M^{-1}([M(|T_n|)]^{\sim})(\alpha) \rightarrow 0$ для любого $\alpha > 0$

Легко видеть, что тогда $(M^{-1}[M(|T_n|)]^{\sim})(\alpha) \rightarrow 0$

Откуда $M^{-1}(M(|T_n|)) = |T_n| \xrightarrow{п.м.} 0$ (См. § 0).

Следовательно, $T_n \xrightarrow{п.м.} 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у р б а к и Н. Общая топология. Топологические группы, числа. Москва, 1969.
2. Б у х в а л о в А.В. О пространствах со смешанной нормой, Вестник ЛГУ, 19 (1973), 5-12.
3. В у л и х Б.З. Введение в теорию полупорядоченных пространств, Москва, 1961.
4. Г е л ь ф а н д И.М. Нормированные кольца, Матем. сб. 9 (1941), 3-24.
5. Г е л ь ф а н д И.М., Н а й м а р к М.А. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., 12 (1943) 197-213.
6. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д. Линейные операторы (общая теория), Москва, 1962.
7. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д. Линейные операторы (спектральная теория) Москва, 1966.
8. З а б р е й к о П.П. Нелинейные интегральные операторы, Труды семинара по функциональному анализу, Воронеж, 8, (1966), 1-143.
9. З а б р е й к о П.П. Идеальные пространства функций, Вестник Ярославского университета, 8 (1974), 12-52.
10. З а б р е й к о П.П., Е р а с н о с е л ь с к и й М.А., С т е ц е н к о В.Я. Об оценках спектрального радиуса линейных положительных операторов. Матем. заметки 1 : 4 (1967), 461-468.
- II. К а н т о р о в ч Л.В. О полупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций, ДАН СССР 4 (1935), 11-14.

12. Канторович Л.В. Линейные полупорядоченные пространства, Матем. сб. 2 (44) (1937), 121-168.
13. Канторович Л.В. О функциональных уравнениях, Уч. зап. ЛГУ 3 (17) (1937), 24-50.
14. Канторович Л.В. Линейные операции в полупорядоченных пространствах, Матем. сб. 7 (1940), 209-284.
15. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ, Москва, 1977.
16. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, Москва, 1950.
17. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича, ДАН СССР 85, I (1952), 33-36.
18. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. О линейных функционалах в пространствах Орлича. ДАН СССР 97, 4 (1954)
19. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Общая теория пространств Орлича, Труды семинара по функциональному анализу, Воронеж, 2 (1956).
20. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва, 1958.
21. Крейн М.Г. Основные свойства нормальных конических множеств в пространствах Банаха. ДАН СССР, 28 (1940), 13-17.
22. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, 3, I (1948), 3-95.
23. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов, Москва, 1978.

24. Л о з а н о в с к и й Г.Я. Об изоморфных банаховых структурах, Сиб. мат. ж. 10, 1 (1969), 93-98
25. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О некоторых банаховых структурах, Сиб. мат. ж. 10, 3 (1969), 93-98.
26. Л о з а н о в с к и й Г.Я. О нормированных структурах с полунепрерывной нормой, Сиб. мат. ж. 12, 1 (1971), 232-234.
27. Н а й м а р к М.А., Нормированные кольца, Москва, 1968.
28. Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, Москва, 1969.
29. О в ч и н н и к о в В.И. Симметричные пространства измеримых операторов, ДАН СССР, 191, 4 (1970), 769-771.
30. О в ч и н н и к о в В.И. Симметричные пространства измеримых операторов. Труды НИИ матем. ВГУ, 3 (1971) 88-107.
31. С а р ы м с а к о в Т.А. Некоммутативные вероятностные пространства на O^* -алгебрах, ДАН СССР, 241, 2 (1978), 297-300.
32. С а р ы м с а к о в Т.А., Г о л ь д ш т е й н М.Ш.
О частично упорядоченных инволютивных алгебрах.
ДАН СССР, 288, 2 (1976), 306-309.
33. С е м е н о в Е.М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций, ДАН СССР, 156, 6 (1964), 1292-1295.
34. С е м е н о в Е.М., Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах, ДАН СССР 164, 4 (1965) 764-749.
35. С е м е н о в Е.М., О некоторых числовых характеристиках симметричных пространств. Труды НИИ матем. ВГУ 1 (1970), 137-144.

36. С т е п е н к о В.Я. Об одном итерационном методе отыскания спектрального радиуса линейных положительных операторов, Матем. сб. 67 2 (1965).
37. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства, Москва, 1971.
38. A n d o Т. Positive linear operators in semi-ordered linear spaces, J. Fac. Sci. Hokaido Univ. ser. 1, 13 (1957), 214-228.
39. A n d o Т. Linear functionals on Orlicz spaces Nieuw. Arch, Wiskunde 8 (1960), 4-16.
40. Ё i r n b a u m З. O r l i c z W. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Stud. Math., 3 (1931), 1-67.
41. D i x m i e r J. Formes lineaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. Math. France 81 (1953), 9-39.
42. D i x m i e r J. Les algebres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algebres de von Neumann). Paris, 1969.
43. K a p l a n s k y I. Projections in Banach Algebras, Ann. Math. 53 (1951), 235-249.
44. K a p l a n s k y I. Algebras of Type I, Ann. Math. 56 (1952), 460-472.
45. L u x e m b u r g W.A.J. Banach function spaces. van Nostrand and C. Assen. 1955.
46. L u x e m b u r g W.A.J. Notes on Banach Function spaces. Proc. Acad. Sci Amsterdam. A 68 (1965), 229-248, 415-446, 646-667.
47. L u x e m b u r g W.A.J. Rearrangement - invariant Banach function spaces. Quens Papers Pure Appl. Math: 10 (1967), 83-144.

48. Luxemburg W.A.J., Zaanen A.C. Notes on Banach Function spaces. Proc. Acad. Sci Amsterdam. A 66 (1963), 135-153, 239-263, 496-504, 655-681.
49. Luxemburg W.A.J., Zaanen A.C. Notes on Banach Function spaces, Proc. Acad. Sci Amsterdam A 67 (1964), 104-119, 360-376, 493-543.
50. Murray F.J., von Neumann J. On rings of operators, I, Ann. Math. 37 (1936), 116-229.
51. Murray F.J., von Neumann J. On rings of operators, II, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 208-248.
52. Murray F.J., von Neumann J. On rings of operators, IV, Ann. Math. 44 (1943), 716-808.
53. Nakano H. Modulared semi - ordered linear spaces. Tokyo, Maruzen Co., LTD, 1950.
54. Nelson E., Notes on non commutative integration J.Funct. Anal. 15 (1974), 103-116.
55. von Neumann J., Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Functionaloperatoren, Math. Ann. 102, (1929-1930), 49-131.
56. von Neumann J. Zur Algebra der Functionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren. Math. Ann. 102 (1929-1930), 370-427.
57. von Neumann J. On rings of operators, III, Ann. Math. 41 (1940), 94-161.
58. Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Int. Acad. Polon. Sci., ser A. (1932), 207-220.
59. Orlicz W. Über Räume (L^M) . Bull. Int. Acad. Polon. Sci ser A, (1936). 93-107

60. Padmanabhan A.R. Convergence in measure and related results in finite rings of operators. Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), 359-388.
61. Pedersen G.K. Measure theory for C^* -algebras I, Math. Scand, 19 (1966), 131-145.
62. Pedersen G.K. Measure theory for C^* -algebras. II, Math. Scand. 22 (1968), 63-74.
63. Pedersen G.K. Measure theory for C^* -algebras. III, IV, Math. Scand. 25 (1969). 71- , 121-
64. Saito K. Non-commutative extension of Lusin's theorem, Tohoku Math. J. 19 (1967), 332-340.
65. Sakai S. The Theory of W^* -algebras, Lecture Notes, Yale Univ. 1962.
66. Sakai S. C^* -algebras and W^* -algebras. Berlin, 1971.
67. Sankaran S., The $*$ -algebra of unbounded operators J. London Math. Soc. 34 (1959), 337-344.
68. Sankaran S. Stochastic convergence for operators, Quart. J. Math. ser 2, 15 (1964), 97-102.
69. Schaefer H.H. Banach lattices and positive operators. Berlin. 1974.
70. Segal I.E. Irreducible representations of operator algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 53. (1947), 73-88.
71. Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration. Ann. Math. 57 (1953) 401-457. Русский перевод: Математика, 6:1 (1962), 65-131.
72. Stinespring W.E. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 15-56. Русский перевод: Математика, 6:2 (1962), 107-149.

73. Stone M.H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 15 (1932).
74. Tomiyama J. Applications of Fubini type theorems to the tensor product of C^* -algebras. Tohoku Math. J. 19 (1967), 213-226.
75. Umegaki H. Conditional expectation in an operator algebra. Tohoku Math. J. 6 (1954), 177-181.
76. Umegaki H. Conditional expectation in an operator algebra, II, Tohoku Math. J. 8 (1956), 86-100.
77. Umegaki H. Conditional expectation in an operator algebra, III, Kodai Math. sem. rep. 11 (1959). 51-64.
78. Yeadon F.J. Convergence of measurable operators, Proc. Camb. Phil. Soc., 74 (1973), 257-268.
79. Yeadon F.J. Non commutative L^p -spaces, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 77 (1975), 91-102.
80. Zaanen A.C. Linear Analysis. Amsterdam, 1960.
81. Zaanen A.C. Integration, Amsterdam, 1967.
82. Муратов М.А. Некоммутативные пространства, Орлица, ДАН УЗССР, 6 (1978), II-13.
83. Муратов М.А. Сходимости в кольце измеримых операторов. Функциональный анализ, сб. научных трудов № 573, Ташкент, (1978), 51-58.
84. Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов, Функциональный анализ, Сб. научных трудов № 573, Ташкент (1978), 58-60.
85. Муратов М.А. Норма Люксембурга в пространстве Орлича измеримых операторов. ДАН УЗССР, I (1979), 5-6.
86. Муратов М.А. Сходимости в кольце измеримых операторов, ДАН УЗССР, 2 (1979), 6-7.