I.5 Fale materii. Pakiety falowe

E-M+EF+EC: fale są cząstkami/ Cząstki są falami?

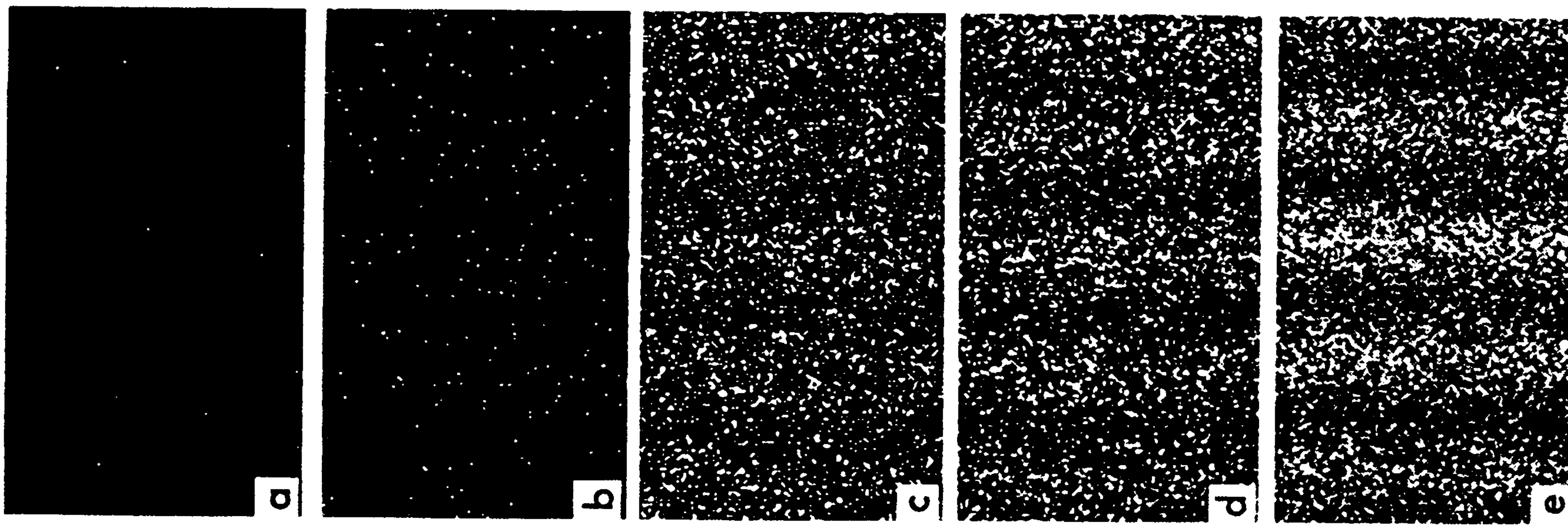
Fale e-m sa cząstkami:

- **EF, E. Comptona: fotony są zlokalizowane**

Elektrony czy neutrony (niewątpliwe cząstki) są falami:

- **Obserwujemy dyfrakcję e i n na kryształach (Davisson & Germer 1927)**

Interferencja elektronów



10 100 1000 10000 100000

liczba elektronów docierających do ekranu

E-M: fale są cząstkami/ Cząstki są falami

Związek między pędem i długością fali dla fotonu:

$$E_\gamma = h\nu \ , \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Louis de Broglie (1923): fale materii;

Cząstkom o pędzie p przyporządkowujemy falę materii. Długość fali przez analogię z fotonem:

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Pakiety falowe: lokalizacja fotonów

Fala elektromagnetyczna, ściślej nieskończony ciąg fal może być opisany w notacji zespolonej:

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{r}},\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{A}_0}{2}\,\mathbf{Re}\left[\exp\left(\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\left(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{r}} - \mathbf{Et}\right)\right) + \exp\left(-\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\left(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{r}} - \mathbf{Et}\right)\right)\right]$$

Efekt fotoelektryczny, efekt Comptona

→fotony są zlokalizowane w przestrzeni, nie mogą więc być opisywane przez nieskończony ciąg fal.

→Potrzebny opis zlokalizowanych paczek falowych.

Pakiety falowe: lokalizacja fotonów cd.

Pakiet falowy: superpozycja fal o zbliżonych energiach i pędach. Zjawisko dudnienia powoduje lokalizację przestrzenną takiej superpozycji.

Dla dwóch fal:

$$A = A_1 + A_2 = A_0\left(\cos\left(\vec{k}_1 \bullet \vec{r} - \omega_1 t\right) + \cos\left(\vec{k}_2 \bullet \vec{r} - \omega_2 t\right)\right) =$$

$$= 2A_0 \cos\left(\frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \cdot \vec{r} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} \cdot \vec{r} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) =$$

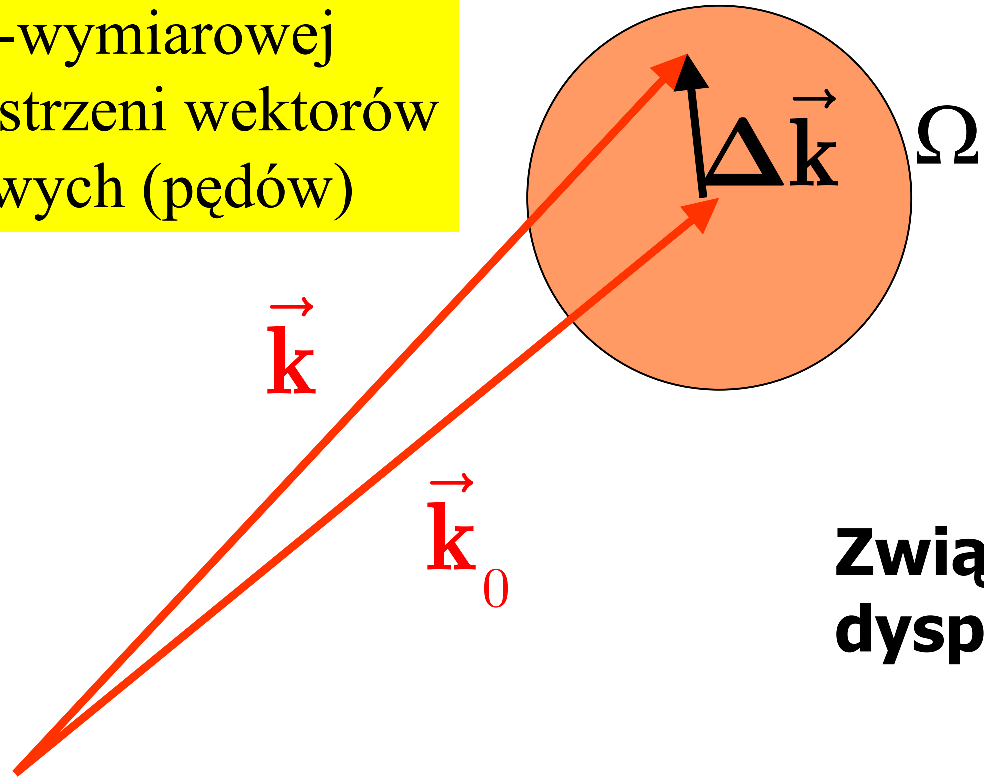
$$= 2A_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right) \cos\left(\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta\omega t\right)$$

gdzie:

$$\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}, \quad \Delta\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Pakiety falowe: lokalizacja fotonów cd

W 3-wymiarowej przestrzeni wektorów falowych (pędów)



Związek dyspersyjny:

$$\omega_0 = k_0 c$$

Pakiety falowe: lokalizacja fotonów cd

Uogólniając na superpozycję fal z pewnego przedziału $\Delta \vec{k},\ \Delta \omega$:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int_{\Omega} d_3k\ A_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t))$$, gdzie Ω-kula dookoła $\vec{k}_0$

wektory falowe wewnątrz kuli: $\vec{k} = \vec{k}_0 + \Delta\vec{k}$

Zamieniając zmienne:

$$\Psi = A_0 \exp\left[i\left(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega_0 t\right)\right] \int d_3\Delta k \cdot \exp\left[i\left(\Delta\vec{k} \cdot \vec{x} - \Delta\omega t\right)\right]$$

Pakiety falowe: lokalizacja fotonów cd

Dalej będziemy dyskutować jednowymiarowy pakiet falowy (uproszczenie rachunków):

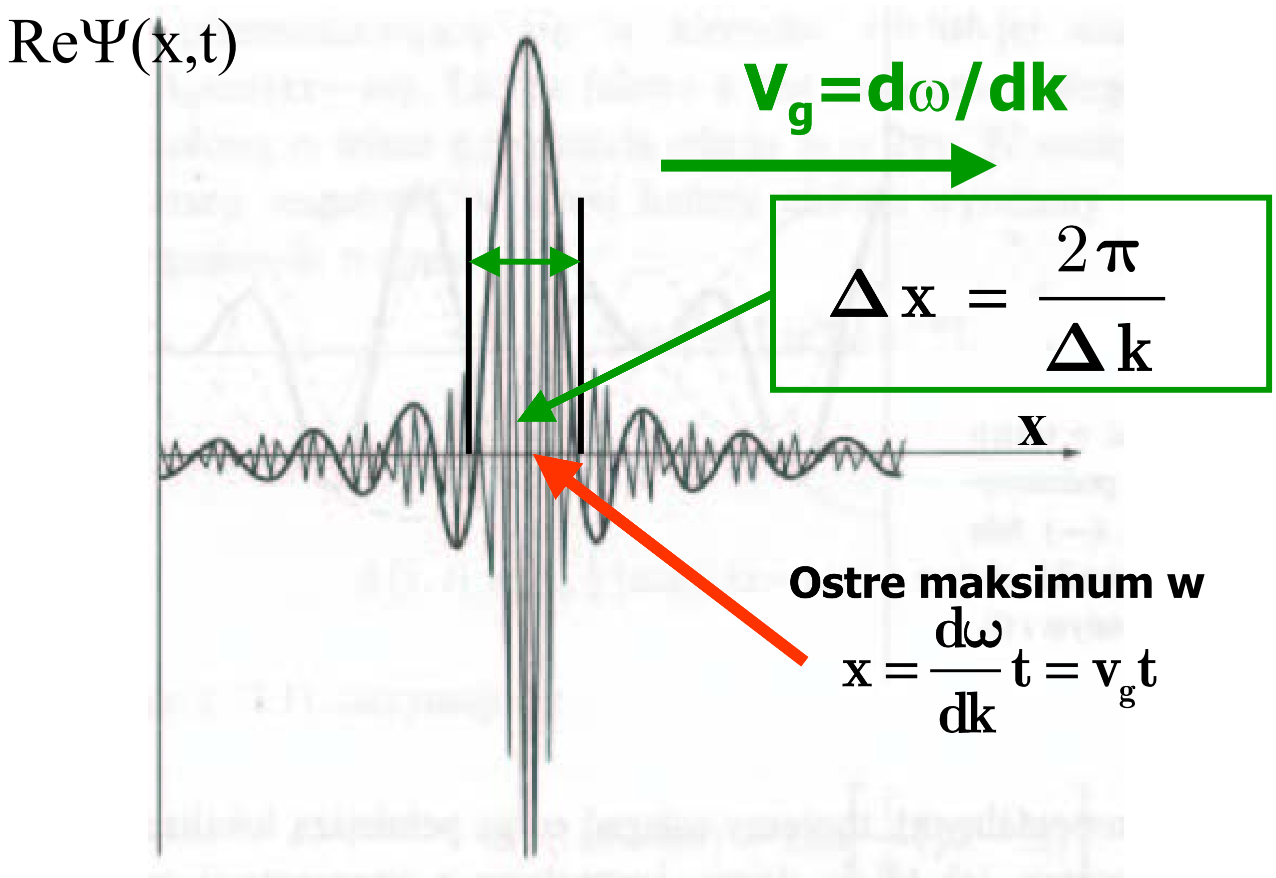
$$\Psi(x,t) = \mathrm{Re}\left(A_0 \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} dk \cdot \exp\left[i\left(kx - \omega t\right)\right] \right) =$$

$$= \left| \omega = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}\Delta k + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}(\Delta k)^2 \ldots \right| =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ A_0 \exp\left[i\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right] \cdot \int_{-\Delta k}^{\Delta k} d\xi \cdot \exp\left[-i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\xi\right]\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ A_0 \exp\left[i\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right] \frac{2\sin\left(\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\Delta k \right)}{\frac{d\omega}{dk}t - x} \right\}$$

Pakiety falowe: lokalizacja fotonów cd



Relatywistyczny i nierelatywistyczny związek dyspersyjny dla fal de Broglie'a

Dla fal de Broglia zachodzi:

$$E=\hbar\omega \qquad\qquad p=\hbar k=\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}=\frac{\hbar c}{\lambda}$$

Nierelatywistyczne wyrażenie na energię cząstki:

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

Pakiet falowy porusza się z prędkością grupową:

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{dE}{dp}=\frac{p}{m}=v$$

Relatywistyczne wyrażenie na energię:

$$E=\sqrt{\left(mc^2\right)^2+(\hbar k)^2}=\hbar\omega \text{ daje nam } v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{1}{2}\frac{2kc^2}{\omega}=\frac{pc^2}{E}=\frac{mv\gamma c^2}{m\gamma c^2}=v$$