II.4 Kwantowy moment pędu i kwantowy moment magnetyczny w modelu wektorowym

II.4.1 Ogólne własności wektora kwantowego momentu pędu

Podane poniżej własności kwantowych wektorów momentu pędu i związanych z nimi wektorów momentu magnetycznego zostały poznane dzięki żmudnym badaniom widm atomowych – przede wszystkim rozszczepień subtelnych linii, rozszczepień wiązek atomowych oraz rozszczepień Zeemana linii widmowych w zewnętrznych polach magnetycznych.

Na gruncie modelu Bohra-Sommerfelda wyniki te doprowadziły do fenomenologicznego MODELU WEKTOROWEGO dodawania kwantowych wektorów momentu pędu.

Matematyczne uzasadnienie modelu wektorowego poprzez własności komutacyjne operatorów momentu pędu zostało sformułowane w mechanice kwantowej.

Ogólne własności wektora kwantowego momentu pędu cd.

Kwantowy moment pędu:

Wielkość wektorowa, w mechanice kwantowej możemy jednocześnie zmierzyć tylko jego kwadrat długości i jedną z jego składowych (rzut momentu pędu na wyróżnioną oś); np. dla orbitalnego momentu pędu $\vec{L}$ możemy jednocześnie zmierzyć wartości oczekiwane <L^{2}> i <L$_z$>:

$$\left\langle \mathbf{L}^2 \right\rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2$$

$$\left\langle \mathbf{L}_z \right\rangle = \mathbf{m}\hbar$$

Wektor kwantowego momentu pędu opisywany więc jest przez podanie dwóch liczb kwantowych: *l* i *m* = -*l*,....,*l* (2l+1 wartości)

Ogólne własności wektora kwantowego momentu pędu cd.

Liczba kwantowa *l* może przybierać wartości

•całkowite dla orbitalnych momentów pędu,

•całkowite lub połówkowe dla spinów (wewnętrznych momentów pędu cząstek),

•całkowite lub połówkowe dla całkowitego momentu pędu - sumy wektorowej momentu orbitalnego i spinowego.

Magnetyczna liczba kwantowa *m* przebiega wartości od $-l$ do l co jeden. Liczba rzutów momentu pędu na wyróżnioną oś jest równa $(2l+1)$ i jest

•nieparzysta dla orbitalnych momentów pędu i całkowitych spinów

$m = -l,\ldots,0,\ldots l,$

• parzysta dla połówkowych spinów i połówkowych całkowitych momentów pędu.

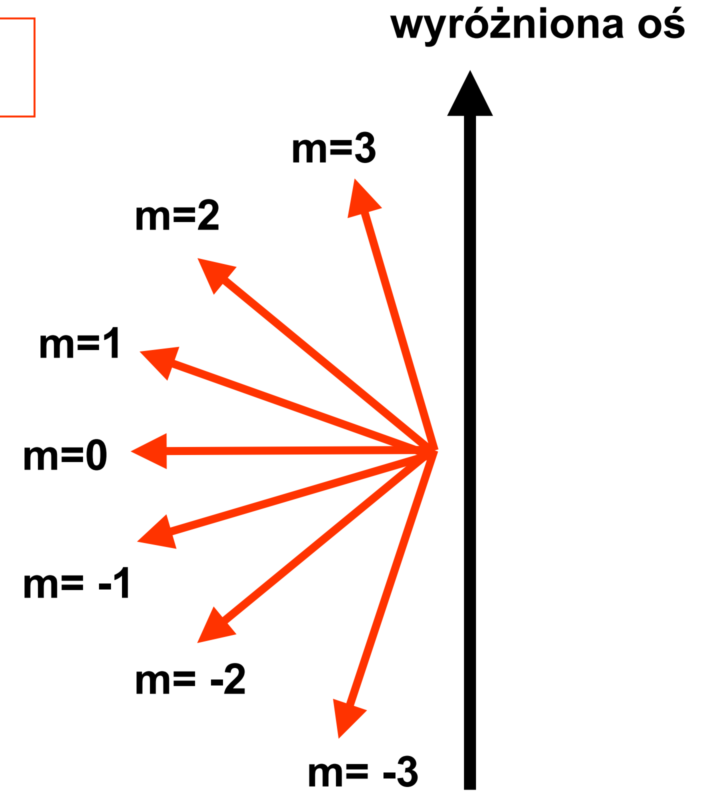
Ogólne własności wektora kwantowego momentu pędu cd.

Wyobrażenie kwantowego wektora orbitalnego mementu pędu o *l*=3

Dla *l*=3 m=-3,-2, -1,0, 1, 2, 3

$$\left|\vec{\mathbf{L}}\right| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \left|\ell = 3\right| = 2\sqrt{3}\hbar$$

$$\mathbf{L_z} = \mathbf{m}\hbar$$



Ogólne własności wektora kwantowego momentu pędu cd.

Dodawanie kwantowych wektorów momentów pędu

Skoro kwantowe wektory określone są przez podanie pary liczb kwantowych $|l_i,m_i\rangle$, $i=1,2$ suma wektorowa dwóch kwantowych wektorów też musi być jednoznacznie określona przez parę liczb $|L,M\rangle$.

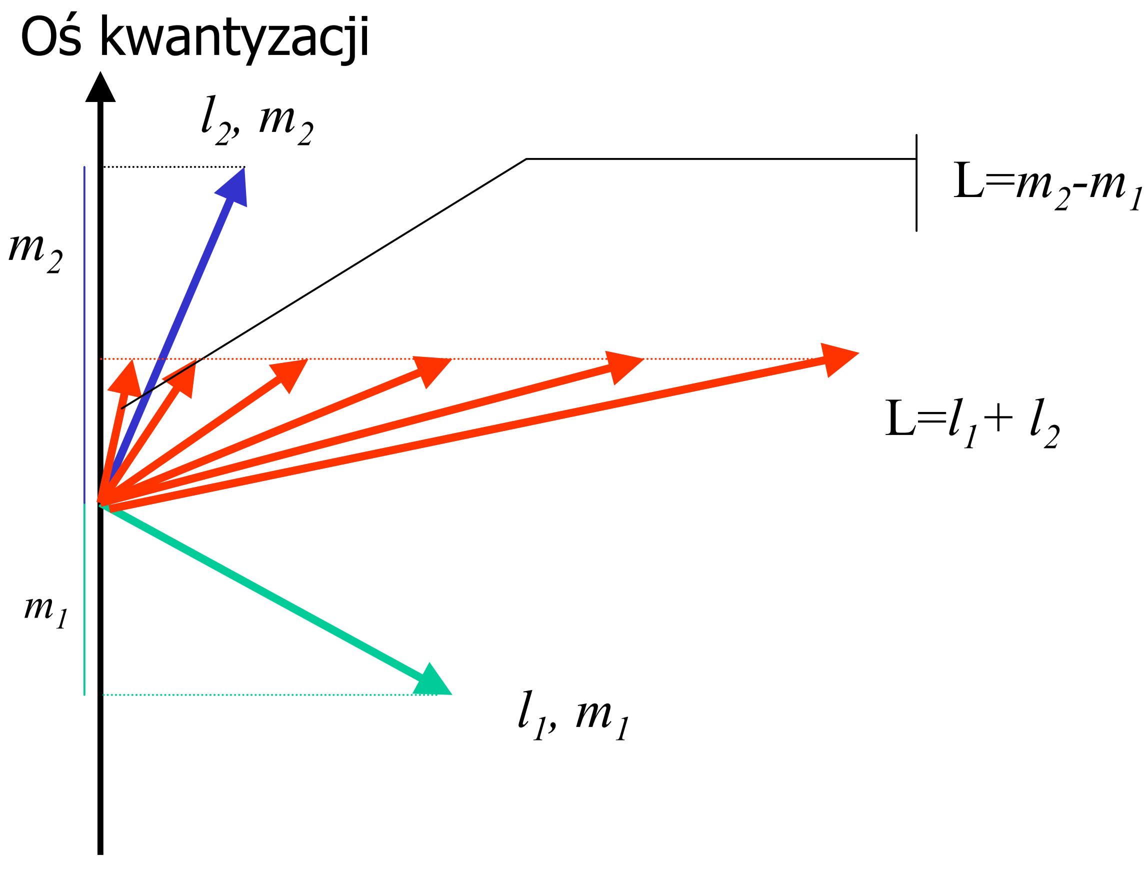
Zachodzą związki:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$$

L może przebiegać wartości od $\ell_1 + \ell_2$ **do max**$\left(\left|\ell_1 - \ell_2\right|, |\mathbf{M}|\right)$

Ogólne własności wektora kwantowego momentu pędu cd..

Dodawanie kwantowych momentów pędów cd.



II.4.2 Moment magnetyczny w ruchu orbitalnym

Klasycznie: pętla o powierzchni A przez którą płynie prąd I posiada moment magnetyczny μ=A**In** skierowany wzdłuż wersora normalnego do powierzchni pętli **n**.

W zewnętrznym polu magnetycznym **B** energia potencjalna pętli:

$$\boxed{V=-\mathbf{B}\bullet\boldsymbol{\mu}=-B\mu\cos\alpha=B\,\mu_B\,m}$$

Magneton Bohra

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e}=9.274\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am}^2$$

Moment magnetyczny elektronu na orbicie Bohra

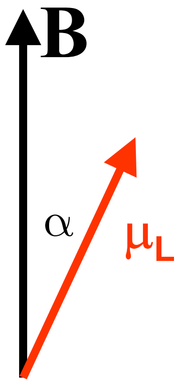
Skoro

$$I=\frac{q}{T}=-\frac{e\Omega}{2\pi} \quad \text{i} \quad \vec{L}=m_e\vec{r}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$$

oraz

$$\boxed{\vec{\mu}_L=I\pi r^2\vec{n}=-\frac{1}{2}e\Omega r^2\vec{n}=-g_\ell\frac{e}{2m_e}\vec{L}}$$

$g_L=1$



Magneton Bohra w różnych jednostkach

Magneton Bohra wynosi

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27\times 10^{-24}\,\mathrm{A\,m^2} =$$

$$= 9.27\times 10^{-24}\,\mathrm{A\,J/T} = 5.79\times 10^{-5}\,\mathrm{eV/T}$$

Moment magnetyczny w ruchu orbitalnym cd.

We wzorze powyżej wprowadziliśmy czynnik Landego g_L, który dla orbitalnego momentu magnetycznego wynosi jeden.

Wektor momentu magnetycznego związany z ruchem orbitalnym elektronu jest antyrównoległy do wektora orbitalnego momentu pędu.

Podobnie jest dla spinowego momentu magnetycznego, który jest antyrównoległy do wektora spinu elektronu. Występuje jednak zasadnicza różnica. W dalszej części wykładu okaże się, że momenty magnetyczne związane ze spinem mają spinowy czynnik Landego

$$g_S = 2$$

Momenty magnetyczne związane z całkowitym momentem pędu J, wektorową sumą spinowego i orbitalnego momentu pędu mają czynniki Landego zależne od orbitalnego momentu pędu L i spinowego momentu pędu S.

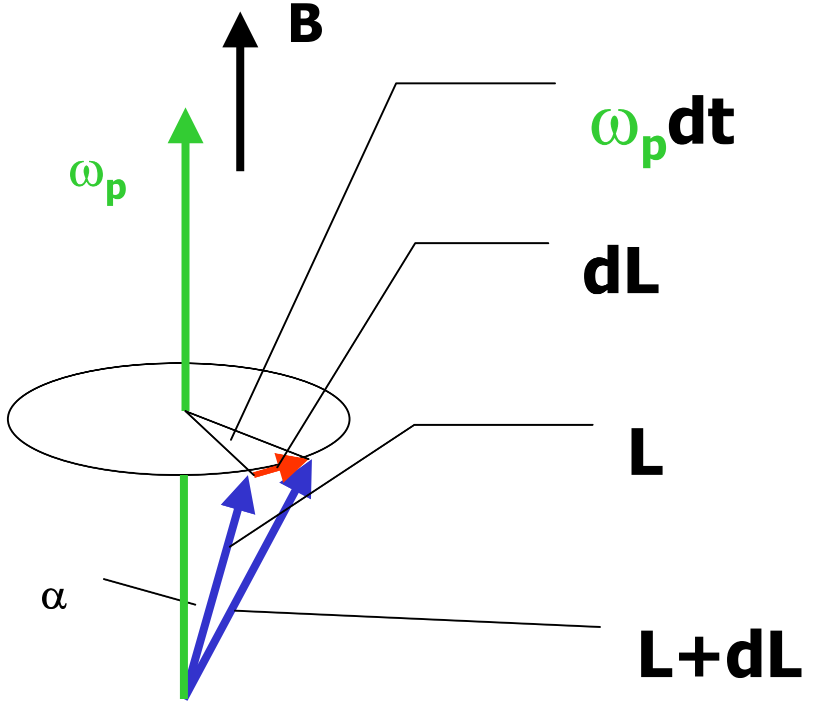
Wektor momentu magnetycznego związanego z całkowitym momentem pędu J nie jest antyrównoległy do wektora J.

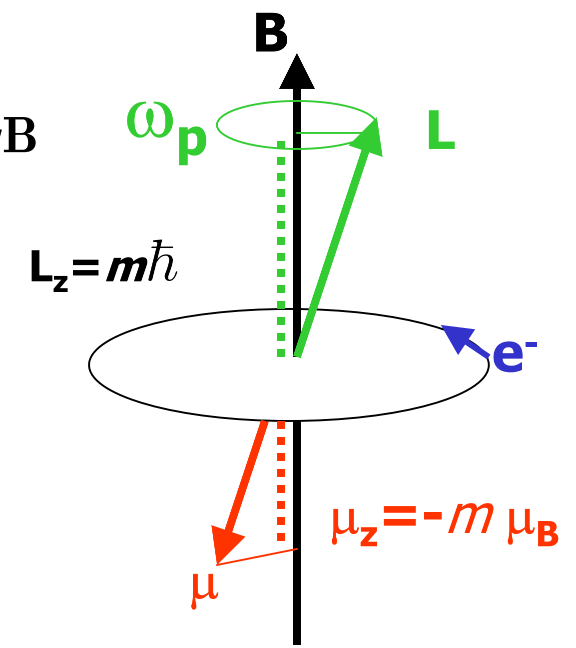
Moment magnetyczny w ruchu orbitalnym cd.

Precesja i orientacja orbitalnego momentu magnetycznego w polu magnetycznym

Częstość precesji

$$\omega_p = \omega_L = \frac{\mu_L B \sin\alpha}{|\mathbf{L}| \sin\alpha} = \frac{g_L \mu_B}{\hbar} B = \gamma B$$





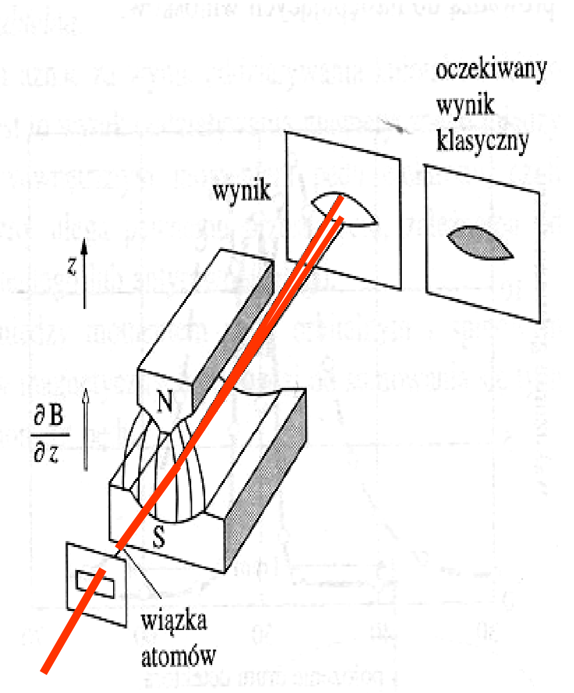
Kwantowanie przestrzenne: tylko rzuty **L** i μ na kierunek pola są bezpośrednio obserwowalne

II.4.3 Spin elektronu i spinowy moment magnetyczny

Bezpośredni pomiar momentów magnetycznych atomów oraz doświadczalne wykazanie kwantowania przestrzennego stało się możliwe po 1921, kiedy to zbadano po raz pierwszy odchylanie wiązek atomowych w niejednorodnym polu magnetycznym.

Doświadczenie Sterna-Gerlacha

Wiązka atomów srebra (stan $^2S_{1/2}$) odchyla się w niejednorodnym polu B. Zaobserwowano 2 linie. Klasycznie powinno się obserwować ciągły rozkład. Kwantowanie przestrzer całkowitego momentu orbitalnego dawałoby nieparzystą liczbę linii.



Spin elektronu i spinowy moment magnetyczny cd.

Odchylenie spowodowane jest przez składową siły w kierunku pionowym:

$$F_z = -\mathrm{grad}\left(-\vec{\mu}\vec{B}\right) = \mu \frac{\partial B}{\partial z}\cos\alpha = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

Pomiar odchyleń pozwalał stwierdzić, że:

$$\mu_z = \mp \mu_B$$

Dla wszystkich badanych atomów o jednym elektronie w stanie s na ostatniej powłoce otrzymujemy takie same wyniki. Prowadzi to wniosków:

- Orbitalne momenty magnetyczne znoszą się. Mierzymy wyłącznie magnetyzm spinowy elektronu w stanie s (*l=0*).
- $\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m_e}\vec{s}$ i spinowy czynnik Landego $g_s=2$ oraz możemy wprowadzić spinowe liczby kwantowe

s i m_s odpowiednio równe ½ i ±1/2.

Dokładną teorię spinu elektronu podał Dirac (1928), który obliczył **g_s=2** ze swojego relatywistycznego równania. Dokładniej **g_s=2.0023** (poprawki QED)