Algebra grupy Poincare składa się z 10-ciu generatorów: 3 generatorów pchnięć K^i, 3 generatorów obrotów J^i oraz 4 generatorów translacji $P^0 = H$ i P^i, gdzie $i = 1, 2, 3$. Generatory translacji reprezentować można przez pochodne,

$$P^0 = i\partial/\partial t, \quad P^i = -i\partial/\partial x^i \, . \tag{1}$$

Dowolną właściwą[1] transformację Poincare można zapisać w postaci

$$e^{i\theta^i J^i + i\eta^i K^i + iHt - ix^i P^i}, \tag{2}$$

gdzie generatory spełniają następujące relacje komutacyjne

$$\begin{gathered} [J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \, , \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k \, , \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k \, , \\ [H, J^i] = 0 \, , \qquad [H, K^i] = iP^i \, , \qquad [J^i, P^j] = i\epsilon^{ijk} P^k \, , \\ [P^i, K^j] = iH\delta^{ij} \, . \end{gathered} \tag{3}$$

Algebrę tę można zapisać w sposób kowariantny

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= (-i) \left(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho\right) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= (-i) \left(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho}\right) . \end{aligned} \tag{4}$$

Składowe antysymetrycznego tensora $M^{\mu\nu}$ związane są z J^i i K^i następująco[2]: $K^i = M^{0i}$, $J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm} M^{lm}$. Operatorami Casimira dla algebry Poincaré są:

1. $P_\mu P^\mu =: P^2$
2. $W_\mu W^\mu =: W^2$, gdzie W^μ jest wektorem Pauli–Lubanskiego (jest to relatywistyczne uogólnienie wektora spinu): $W^\mu := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$.

Gdy $m^2 = P^2 \neq 0$
to w układzie spoczynkowym masywnej cząstki

$$\begin{aligned} P_\mu &= (m, \vec{0}) \\ W^2 = -m^2 \vec{J}^2 \quad &, \quad \vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \\ &\quad\ \vec{J}^2 = s(s+1). \end{aligned} \tag{5}$$

[1] Tzn transformację deformowalną w sposób ciągły do transformacji tożsamościowej

[2] Pomijamy orbitalną składową tensora momentu pędu, która ma postać $M^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$, $P^\mu = i\partial^\mu$.

Dodatkowymi liczbami kwantowymi numerującymi stany wewnątrz reprezentacji o ustalonych m i j są składowe pędu p^i oraz wartości własne λ operatora skrętności $\hat{\lambda} = \vec{J}\vec{p}/|\vec{p}|$. Operator skrętności komutuje ze składowymi pędu.

Konstruowanie reprezentacji algebry Poincare' w przypadku masywnym staje się proste, jeżeli weźmie się pod uwagę izomorficzność algebry $SO(1,3)$ i algebry $SU(2) \oplus SU(2)$. Izomorficzność tę widać, gdy zdefiniuje się niehermitowskie kombinacje generatorów K^i i J^i

$$J^i_\pm = \frac{1}{2}\left(J^i \pm i\, K^i\right). \tag{6}$$

Operatory te spełniają związki

$$\begin{aligned} [J^i_\pm, J^j_\pm] &= i\epsilon^{ijk} J^k_\pm\,, \\ [J^i_-, J^j_+] &= 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Reprezentacje o określonych $j_\pm$ oznaczamy przez (j_+, j_-). Nietrywialnymi reprezentacjami o najniższym, równym 2, wymiarze są $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$. Pozostałe reprezentacje można znaleźć, tak jak dla algebry $SU(2)$, przez tensorowanie tych reprezentacji spinorowych. Na przykład, $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$, gdzie ta ostatnia reprezentacja jest reprezentacją zawierającą wektor i skalar względem obrotów, to znaczy wektor względem transformacji Lorentza.

Spinory $(1/2, 0)$ nazywamy spinorami lewymi, a spinory $(0, 1/2)$ – prawymi. Spinor Dirakowski jest sumą prostą reprezentacji $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$,
$\psi = (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$, ponieważ ta suma jest najmniejszą reprezentacją, która jest niezmiennicza względem parzystości przestrzennej, P. Łatwo sprawdzić, że P zamienia J^i_+ na J^i_- i odwrotnie. W reprezentacji Weyla dla spinorów Diraka, górna, wyrzutowywana przez $P_L = (1 - \gamma^5)/2$, połowa spinora transformuje się jak $(1/2, 0)$, zaś dolna połowa, wyrzutowywana przez $P_R = (1 + \gamma^5)/2$, transformuje się jak $(0, 1/2)$.

W reprezentacji Weyla dla macierzy Diraka generatory obrotów i pchnięć wyglądają następująco

$$J^i = \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & \sigma^i/2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$K^i = -i \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & -\sigma^i/2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

gdzie $\sigma^i,\ i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.
W tej reprezentacji $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

W reprezentacji Diraka $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Często przydatny okazuje się następujący związek: $e^{i\vec{r}\vec{\sigma}} = \cos(r) + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{r}\sin(r)$, gdzie $r = |\vec{r}|$, zaś σ^i to macierze Pauliego.

W przypadku reprezentacji bezmasowych, $m = 0$, sytuacja jest nieco bardziej złożona.

Dla cząstki bezmasowej możemy przejść do układu odniesienia, w którym czteropęd cząstki przyjmuje postać $p^\mu = (p, 0, 0, p)$, $p \geq 0$. W tym układzie składowe czterowektora spinu (czterowektora Pauliego-Lubanskiego) przyjmują postać

$$\begin{gathered} W^1 = (J_{02} - J_{23})p = -(K^2 + J^1)p \\ W^2 = (J_{13} - J_{01})p = (K^1 - J^2)p \\ W^0 = W^3 = -pJ_{12} = -pJ^3\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące relacje komutacyjne

$$\begin{gathered} [W^0, W^1] = -ipW^2 \\ [W^0, W^2] = ipW^1 \\ [W^1, W^2] = 0\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Aby upodobnić tę algebrę do algebry $SU(2)$ (algebry obrotów), której reprezentacje dobrze znamy, zdefinujemy operatory podnoszące i obniżające $\lambda_\pm$ oraz operator wagowy λ

$$\lambda_\pm = W^1 \pm iW^2,\ \lambda = -\frac{1}{p}W^0 = +J^3 = \frac{\vec{p}\vec{J}}{|\vec{p}|}, \tag{12}$$

które spełniają relacje komutacyjne

$$\begin{gathered} [\lambda_\pm, \lambda] = -(\pm\lambda_\pm) \\ [\lambda_+, \lambda_-] = 0\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Jak widać, operatorem wagowym, którego wartości własne są podwyższane i obniżane przez operatory $\lambda_\pm$, jest operator skrętności.

Algebra (13) jest algebrą ruchów w 2-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej, oznaczaną zazwyczaj przez E_2 (dwie translacje $\lambda_\pm$ i obrót λ). Operatorem Casimira dla algebry (13) jest operator $A = \lambda_+\lambda_-$. Ponieważ składowe czterowektora W^μ

są rzeczywiste, to operator A jest hermitowski i ma rzeczywiste wartości własne. Można wybrać jako bazę w przestrzeni Hilberta stany, które są stanami włsnymi A i λ (podalgebra Cartana algebry E_2 jest 1-wymiarowa). Niech $\lambda u(A,\mu) = \mu u(A,\mu)$. Wtedy $[\lambda_+,\lambda]u(A,\mu) = -\lambda_+ u(A,\mu)$, co oznacza, że

$$\lambda\left(\lambda_+ u(A,\mu)\right) = (\mu+1)\lambda_+ u(A,\mu), \tag{14}$$

co z kolei oznacza, że

$$\lambda_+ u(A,\mu) = a_+(\mu)u(A,\mu+1). \tag{15}$$

Podobnie

$$\lambda_- u(A,\mu) = a_-(\mu)u(A,\mu-1). \tag{16}$$

Ponieważ

$$\langle A,\mu'|\lambda_+|A,\mu\rangle^* = \langle A,\mu|\lambda_-|A,\mu'\rangle, \tag{17}$$

i powyższe elementy macierzowe nie znikają tylko dla $\mu' = \mu+1$, to zachodzi równość $a_+^*(\mu) = a_-(\mu+1)$. Z kolei

$$\lambda_+\lambda_- u(A,\mu) = \lambda_-\lambda_+ u(A,\mu), \tag{18}$$

skąd wynika równość $a_-(\mu)a_+(\mu-1) = a_+(\mu)a_-(\mu+1)$. Dlatego, dla każdego μ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |a_+(\mu-1)|^2 &= |a_+(\mu)|^2 \\ |a_-(\mu)|^2 &= |a_-(\mu+1)|^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Ponieważ wszystkie stany w danej reprezentacji otrzymujemy przez wielokrotne działanie operatorami $\lambda_\pm$ na pewien stan początkowy, to dla wszystkich stanów w reprezentacji nieprzywiedlnej $|a_+| = \nu_+$ i $|a_-| = \nu_-$ dla pewnyh ustalonych rzeczywistych ν_- i ν_+. Ponadto, $a_+^*(\mu) = a_-(\mu+1)$, zatem $\nu_- = \nu_+ = \nu$. Możliwe są dwa przypadki:

- $\nu \neq 0$ – w tym przypadku nie ma żadnych ograniczeń na dozwolone wartości ν i μ i otrzymujemy niskończenie wymiarowe reprezentacje. Nie znamy realizowanych w przyrodzie stanów fizycznych, którym te reprezentacje mogłyby odpowiadać.

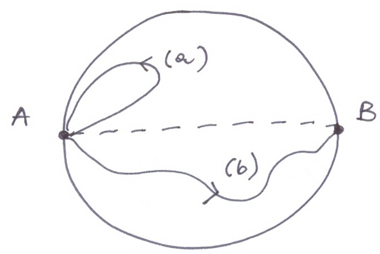
- $\nu = 0$ – reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe. Odpowiadają one na przykład stanom fotonów i grawitonów. W teoriach niezmienniczych względem $\mathcal{CPT}$ najmniejszą reprezentacją, która jest niezmiennicza względem $\mathcal{CPT}$, jest reprezentacja dwuwymiarowa, która jest sumą prostą reprezentacji o skrętnościach μ i $-\mu$ (pod działaniem $\mathcal{CPT}$ $\lambda \to -\lambda$). Fizyczne fotony, bezmasowe nautrina i grawitony utożsamiamy z takimi właśnie dwuwymiarowymi reprezentacjami.

Okazuje się, że skrętność μ jednowymiarowych reprezentacji bezmasowych jest skwantowana. Skrętność jest generatorem obrotów wokół kierunku $\vec{p}$. Zatem pod działaniem obrotu o kąt 2π stan skrętnościowy zmienia się o fazę

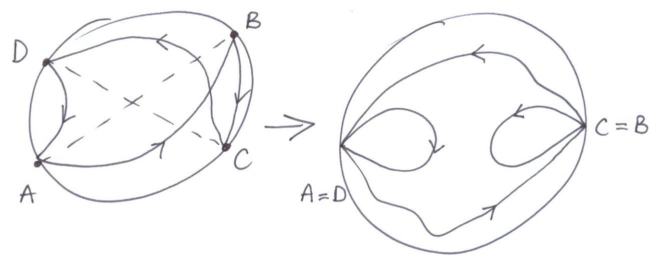
$$|\mu\rangle \to e^{i2\pi\mu}|\mu\rangle. \tag{20}$$

Analiza struktury grupy obrotów prowadzi do wniosku, że $2\pi\mu = k\pi\,,\ k \in \mathcal{Z}$, zatem $\mu = \frac{k}{2},\ k \in \mathcal{Z}$.

Argumentacja przebiega następująco. Obroty w trzech wymiarch można scharakteryzować przez podanie kierunku $\vec{n}$ i kąta $\phi \leq \pi$. Wszystkie obroty można zatem przedstawić jako trójwymiarową kulę o promieniu π – wielkość kąta obrotu odpowiada w tym obrazie odległości od środka kuli. Ale obroty o kąt π wokół kierunku $\vec{n}$ i $-\vec{n}$ prowadzą do tej samej konfiguracji przestrzennej, trzeba je zatem utożsamić. Zatem punkty A i B na rysunku 1 oznaczają to samo przkształcenie, ale cykle (a) i (b) nie dadzą się na siebie przekształcić w sposób ciągły. Wykonanie po kolei wszystkich przekształceń wzdłuż drogi (a) musi dać w wyniku przekształcenie tożsamościowe, I. Natomiast wykonanie po kolei przekształceń wzdłuż drogi typu (b) daje w wyniku przekształcenie P, które przekształceniem tożsamościowym być nie musi. Natomiast trzeba zauważyć, że złożenie dwu dróg typu (b), na przykład (b) i (b') z rysunku 2, daje się zdeformować do drogi typu (a). Zatem $P^2 = I$. Ponieważ w przestrzeni 1-wymiarowej P musi być liczbą zespoloną o module 1, to $P = e^{i\pi}$ lub $P = e^{i2\pi}$. Oba wybory są dopuszczalne. W szczególności, wybór pierwszej z tych możliwości oznacza, że dopuszczalnymi wartościami wielkości $2\pi\mu$ są oprócz całkowitych wielokrotności 2π również całkowite wielokrotności π. Stąd stanom fizycznym mogą odpowiadać połówkowe wartości skrętności. Stany o połówkowych skrętnościach opisują fermiony.



Rysunek 1: Obroty A i B są tymi samymi przekształceniami w przestrzeni konfiguracyjnej, lecz zamkniętych dróg (a) i (b) nie można w sposób ciągły przekształcić na siebie.



Rysunek 2: Złożenie dwu dróg typu (b) jest drogą typu (a) (cyklem ściągalnym do punktu).