Indukcja metematyczna

1.1Indukcja matematyczna

Indukcję matematyczną stosujemy w celu dowiedzenia , iż pewna własność W zachodzi dla wszystkich liczba naturalnych nie mniejszych niż pewna liczba $\boldsymbol{n_o}$ ϵ N. Metoda dowodzeia opiera się na tzw. zasadzie indukcji zupełnej.

1.2 Zasada indukcji zupełnej

Przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej *n* twierdznie *W(n)* .Wtedy:

Założenie indukcyjne : *W(k) k ϵ N*

Teza indukcyjna: *W(k+1) k ϵ N*

1) sprawdzamy czy $W(n_o)$ jest prawdziwe
2) jeżeli *W(k)* jest prawdziwe , to *W(k+1)* jest też prawdziwe dla kazdego

   k ϵ N takiego,że k ≥ $n_\circ$ wynika prawdziwość *W(n)* dla wszystkich $n = n_o$,

   $n_o + 1, n_o + 2, \ldots$

1.3 Własność indukcji matematycznej:

z indukcji możemy kożystać podczas formułowania pewnych definicji. Definicja taka nazywana jest definicją indukcyjną (rekurencyjną) , składa się z dwóch części:

- definicji dla *n = 1*
- definicji dla *n > 1* za pomocą symbolu *n - 1*

np. Wzór na sumę ciagu geometrycznego

1.$S_1 = a_1$ 2.$S_n = S_{n-1} + a_n$ dla każdego *n >1 .*

1.4 Przykład 1 udowodnić nierównośc Bernoulliego:

1+xn≥1+nx dla x≥-1

1. Sprawdzamy prawdziwość tezy T_n dla n=1. Mamy : 1+x≥1+x czyli ok.

2. Sprawdzamy prawdziwość implikacji T_n T_{n+1}..Zatem udowadniamy ,że :

1+xn+1≥1+(n+1)x,

ponieważ

1+xn+1=x+1x+1n≥1+nx1+x=

widać więc ,że zachodzi implikacja:

1+xn≥1+nx1+xn+1≥1+(n+1)x

Z zasady indukcji zupełnej otrzymaliśmy,że teza T_n jest prawdziwa dla ∀ ***n ϵ N.***

1.5 Przykład 2 wykazać, że:

dla dowolnego *n ϵ N , n ≥2* liczba w postaci $n^7 – n$ jest podzielna przez 7.

1. Sprawdzamy dla n=2 :

$$2^7-2 = 126=18 \times 7$$

czyli ok.

2. Udowadniamy ,że istniej takie *l ϵ N* ,że:

(Z) $n^7-n = 7l$,

następnie pokazujemy,że dla *n=n+1* istnieje takie *k ϵ N* ,że :

(T) $7k=(n+1)^7-(n+1)$

$7k=(n+1)^7- n - 1$

$7k=n^7+7n^6+21n^5+35n^4+35n^3+21n^2+7n+1-n-1$

$7k= (n^7+n)+7(n^6+3n^5+5n^4+5n^3+3n^2+n)$

$\mathbf{7}k= \mathbf{7}(l+n^6+3n^5+5n^4+5n^3+3n^2+n)$

Zatem implikacja ***Z T*** jest prawdziwa , gdyż z założenia wynika $n^7-n = 7l$.

Wniosek: dla ∀ ***n ϵ N*** liczba w postaci $n^7 – n$ jest podzielna przez 7 .

1.5 Przykład 3 wykazać, że:

dla ∀ *n ϵ N* cosx jest podzielny przez sin2nx.

1. Sprawdzamy dla: n=1 :

cosx| sin2x Ponieważ sin2x=2sinxcosx więc prawdą jest, że cosx| sin2x

czyli ok.

2. Udowadniamy ,że istniej takie *n=k, k ϵ N* ,że:

(Z) cosx| sin2kx

następnie pokazujemy,że dla *n=k+1 k ϵ N* prawdziwe jest ,że :

(T) cosx| sin2(k+1)x
Ponieważ:

sin2k+1x=sin2kx cos2x+cos2kxsin2x,

więc na podstawie założenia

cosx| sin2(k+1)x.

Zatem prawdziwa jest implikacja ***Z T***

Wniosek: dla ∀ ***n ϵ N*** cosx| sin2nx

Opracowanie Joanna Duda