Liczby wymierne.

Niezupełność zbioru liczb wymiernych:
dowód że pierwiastek z 2 jest liczbą niewymierną.

$$(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$$

Liczby wymierne ($\mathbb{Q}$) to liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0$.

$\underset{a,b \in \mathbb{Q}}{\forall} \; \underset{c \in \mathbb{Q}}{\exists} \; a < c < b \quad : \quad c = \frac{a+b}{2}$ ale nie wyczerpuje to zbioru liczb rzeczywistych.

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód:

Załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, a więc

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

1. Zakładamy, że q jest liczbą nieparzystą.

$2q^2$ jest liczbą parzystą, więc p^2 też musi być liczbą parzystą, a to jest możliwe, gdy p jest liczbą parzystą, wtedy możemy ją zapisać jako $2k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$),

$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$

$2k^2$ jest parzyste, czyli q^2 też jest parzyste - otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że q jest nieparzyste.

W przypadkach:

2. p nieparzyste, q parzyste,
3. p i q nieparzyste

otrzymujemy sprzeczność z $p^2 = 2q^2$.

$\sim(\sim D) \Leftrightarrow D$

Poprzez wykazanie sprzeczności 1. 2. 3. pokazujemy fałsz antytezy, a tym samym dowodzimy słuszności tezy:

$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.