Twierdzenia:
Rolle'a, Lagrange'a, Cauchy'ego

- **Twierdzenie Rolle'a**

✔ Niech funkcja f będzie ciągła na odcinku $[a,b]$ i różniczkowalna w $]a,b[$. Jeżeli $f(a)=f(b)$, to istnieje $c\in]a,b[$ takie, że $f'(c)=0$.

✔ Funkcja ciągła f osiąga na zbiorze zwartym $[a,b]$ swoje kresy (minimum i maksimum). Jeżeli f jest funkcją stałą, to w każdym punkcie pochodna jest zero. Załóżmy teraz, że f nie jest stała. Minimum (lub maksimum) jest więc osiągane wewnątrz odcinka, czyli f posiada wewnątrz odcinka ekstremum lokalne. Oznacza to, że w tym punkcie pochodna jest równa zero.

q.e.d.

Wtręt MN: A jak dowodzimy, że jeśli f ma w punkcie c maksimum to $f'(c)=0$?
Powyższy paragraf należy pominąć.

✔ Dowód z wykładu:
Ponieważ $f(a)=f(b)$ to funkcja przyjmuje jedną z wartości (najmniejszą lub największą w środku przedziału)

1° Jeśli przyjmuje wartość największą w punkcie $c\in]a,b[$ to mamy $\underset{x\in]a,b[}{\forall} f(c)\geqslant f(x)$.

Dla $c>x$ mamy:

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\geqslant 0\Rightarrow \lim_{x\to c^-}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=f'_-(c)\geqslant 0$$

Dla $c<x$ mamy:

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant 0\Rightarrow \lim_{x\to c^+}\frac{f(c)-f(x)}{c-x}=f'_+(c)\leqslant 0$$

Ponieważ funkcja f jest różniczkowalna w c :

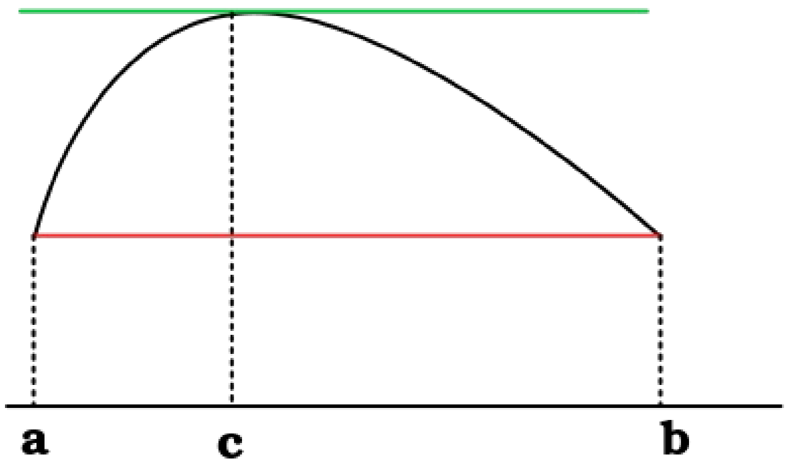
$$0\leqslant f'_-(c)=f'(c)=f'_+(c)\leqslant 0$$

Wnioski: $f'(c)=0$

2° Jeśli f przyjmuje w $]a,b[$ wartości najmniejszą postępujemy analogicznie zamieniając $\leqslant\to\geqslant$ $\geqslant\to\leqslant$

q.e.d.

- ✔ Geometrycznie twierdzenie Rolle'a oznacza, iż na łuku będącym wykresem funkcji od punktu $(a; f(a))$ do punktu $(b; f(b))$ istnieje wartość maksymalna lub minimalna:



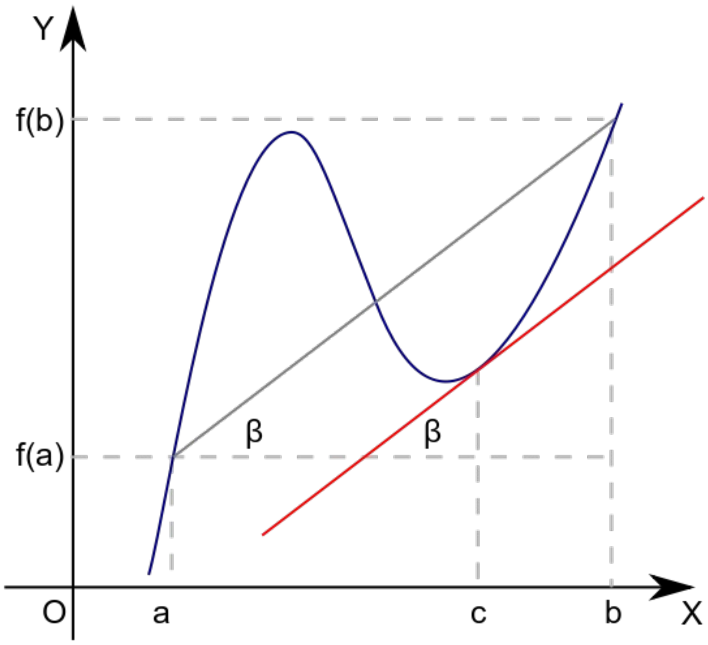
Wtręt MN: Ale do powyższego stwierdzenia różniczkowalność funkcji nie jest potrzebna. Lepiej powiedzieć: istnieje styczna do łuku wykresu funkcji między punktami $(a; f(a))$ i $(b; f(b))$, która jest równoległa do osi x-ów.

- **Twierdzenie Lagrange'a**

- ✔ Niech funkcja f będzie ciągła na odcinku $[a,b]$ i różniczkowalna w $]a,b[$. Istnieje $c \in]a,b[$ takie, że:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

- ✔ Geometrycznie twierdzenie Lagrange'a oznacza, że na łuku będącym wykresem funkcji od punktu $(a; f(a))$ do punktu $(b; f(b))$, istnieje taki punkt, w którym styczna jest równoległa do siecznej poprowadzonej między punktami $(a; f(a))$ i $(b; f(b))$.



Na rysunku współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(c; f(c))$ wynosi $f'(c)$. Na mocy twierdzenia Lagrange'a jest on równy:

$$tg(\beta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

✔ Dowód:
Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(a; f(a))$ i $(b; f(b))$

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$$

$$t=b \qquad y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a)=f(b)$$

$$t=a \qquad y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)+f(a)=f(a)$$

Rodzina prostych równoległych do prostej l

$$y+c=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$$

Punkty przecięcia wykresu funkcji z prostą l (ich argumenty) spełniają równanie

$$f(t)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$$

$$0=-f(t)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$$

$$c\rightarrow H(t)$$

$$H(t)=-f(t)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$$

Funkcja $H(t_1)=H(t_2)$ <=> punkty $(t_1; f(t_2))$, $(t_2; f(t_1))$ leżą na prostej równoległej do prostej l .
Funkcja $H(t)$ jest różniczkowalna na $]a,b[$ i ciągła na $[a,b]$.
Ponadto:

$$H(a)=-f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)+f(a)=0$$

$$H(b) = -f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) + f(a) = 0$$

To oznacza, że $H(t)$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, czyli istnieje takie $c \in]a, b[$, że

$$H'(c) = 0$$

$$H'(t) = -f'(t) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$0 = -f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Wtręt MN: Poniższe dwa wiersze są zbędne

$a \to x_0$, $b \to x$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

✔ Wniosek z Twierdzenia Lagrange'a:

Jeśli dla każdego $c \in]a; b[$
$f'(c) > 0$ to f jest rosnąca na $]a, b[$
$f'(c) < 0$ to f jest malejąca na $]a, b[$
$f' = 0$ to f jest stała na $]a, b[$
Zakładając dodatkowo ciągłość funkcji na przedziale domkniętym, f jest odpowiednio: rosnąca, malejąca, stała na $[a, b]$

Dowód wniosku z twierdzenia Lagrange'a:

Weźmy dowolne punkty $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_2 > x_1$. Istnieje wtedy taki punkt $c \in]a, b[$, że:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Jeżeli:
$f'(c) > 0$ to $f(x_2) > f(x_1)$
$f'(c) < 0$ to $f(x_2) < f(x_1)$
$f'(c) = 0$ to $f(x_2) = f(x_1)$

- **Twierdzenie Cauchy'ego**

✔ Niech f , g będą funkcjami ciągłymi na $[a,b]$ i różniczkowalnymi na $]a,b[$. Istnieje takie $c\in]a,b[$, że

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$g'(c)\neq 0$$

Wtręt MN: Brakuje założenia o tym, że g'(x) jest różne od zera dla dowolnego x należącego do $]a,b[$, dowód jest niepełny

✔ Dowód:

Niech

$$\phi(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a))$$

Funkcja ϕ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, więc dla pewnego $c\in]a,b[$

$$\phi(c)=0=f'(c)(g(b)-g(a))-g'(c)(f(b)-f(a))$$

Wtręt MN: W powyższej formule powinno być φ'(c)

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

q.e.d.

Barbara Handzlik