Matematyka I, zadania domowe, seria 14

1. Wyznaczyć granice następujących ciągów: $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$, $b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, $c_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$, $d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, $e_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, $f_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$, $g_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$, $h_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$, $i_n = \frac{\log\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\frac{1}{n+3}}$, $j_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$, $k_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$, $l_n = \frac{8^{\log_2 n}}{2^n}$, $m_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$, $n_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a, b > 0)$, $o_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$, $p_n = \frac{\log_n(n+1)}{\log_n(n+2)}$, $q_n = \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n$, $r_n = \frac{\log_2(n^4+1)}{\log_2(n^2+1)}$.

2. Dla jakich wartości parametru k granicą ciągu o wyrazie ogólnym
$$a_n = \frac{kn^2}{(k-1)n^2 + n},$$
przy $n \to \infty$, jest liczba dodatnia?

3. Niech x_n będzie ciągiem zbieżnym i niech y_n będzie określony wzorem
$$y_n = \frac{n^2 x_n + 4n - 1}{n^2 x_n - 5n + 2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
Wykazać, że
   - jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ to ciąg y_n jest zbieżny
   - jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ to ciąg y_n może być zbieżny lub nie a ponadto jego granica może być dowolną liczbą (w zależności od ciągu x_n).

4. Wyznaczyć dlugość krzywej łamanej $M_0M_1M_2\ldots$ wpisanej w spiralę logarytmiczną $r = e^{-\varphi}$, gdzie r, φ są współrzędnymi biegunowymi: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Wierzchołki M_n krzywej mają współrzędne $\varphi_n = \frac{n\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Odpowiedzi: 1. $a_n \to 1/e^3$, $b_n \to 1/e$, $c_n \to 1/e^2$, $d_n \to 1$, $e_n \to e^5$, $f_n \to e^4$, $g_n \to e^6$, $h_n \to 0$, $i_n \to 4$, $j_n \to 0$, $k_n \to \infty$, $l_n \to 0$, $m_n \to 0$, $n_n \to \sqrt{ab}$, $o_n \to \ln 3/\ln 2$, $p_n \to 1$, $q_n \to 1$, $r_n \to 2$.
2. $k \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$
4. $\frac{\sqrt{e^\pi+1}}{e^{\pi/2}-1}$

A.Szereszewski