Ćwiczenia z Fizyki I - Elektryczność i magnetyzm

seria II 21-25 kwietnia 2008, autor: J.C.

1. Wyprowadzić następujące często stosowane przybliżenia, gdzie $\epsilon \ll 1$:
   - $(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$
   - $(1+\epsilon)^{1/n} \approx 1 + \frac{1}{n}\epsilon$; w szczególności $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon$
   - $\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$
   - $\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$
   - $\exp \epsilon \approx 1 + \epsilon$
   - $\sin \epsilon \approx \epsilon$; $\cos \epsilon \approx 1$

2. Wyprowadzić wyrażenia na elementy powierzchni i objętości w różnych układach współrzędnych:

układ	dS	dV
kartezjański	$dxdy$	$dxdydz$
biegunowy dS/ walcowy dV	$\rho d\rho d\phi$	$\rho d\rho d\phi dz$
sferyczny	$R^2 \sin\theta d\theta d\phi$	$r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$

3. Dana jest kula o promieniu R, naładowana jednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej ρ. Wyznaczyć pole $\overline{E}$ wewnątrz i na zewnatrz kuli.

   Rozwiązanie: Z symetrii zagadnienia wynika, że pole $\overline{E}$ zależy tylko od odległości od środka kuli, r: $\overline{E} = \overline{E}(r)$. Korzystając z prawa Gaussa mamy dla $r < R$:

$$\oint \overline{E} d\overline{S} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \tag{1}$$

   gdzie $Q(r)$ jest ładunkiem zawartym w kuli o promieniu r. Jako że $\overline{E} \| \overline{r}$, całkę zamieniamy na iloczyn i wstawiając prawą stronę otrzymujemy:

$$E_1(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \tag{2}$$

   i stąd wynik dla $r < R$:

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \tag{3}$$

   Dla $r > R$ mamy sytuację jak w przypadku ładunku punktowego o wartości $Q_0 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$:

$$E_2(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}. \tag{4}$$

   Łatwo sprawdzić, że $E_1(R) = E_2(R)$.

4. Punktowy ładunek dodatni $+q$ otoczony jest ładunkiem ujemnym o rozkładzie sferycznie symetrycznym danym funkcją:

$$\rho_e(r) = -\frac{q}{\pi a^3} \exp(-2r/a), \tag{5}$$

   gdzie a jest stałą. Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego.

Rozwiązanie: Ponieważ rozkład ładunku jest sferycznie symetryczny to i pole $\overline{E}$ będzie sferycznie symetryczne. Korzystając z prawa Gaussa mamy:

$$\oint \overline{E} d\overline{S} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \tag{6}$$

gdzie $Q(r)$ jest ładunkiem zawartym w kuli o promieniu r. Jako że $\overline{E} \| \overline{r}$, całkę zamieniamy na iloczyn. Liczymy ładunek $Q(r)$:

$$Q(r) = q + \int_{[kulaoprom.r]} \rho_e(r') dV' = q + 4\pi \int_0^r r'^2 \rho_e(r') dr'. \tag{7}$$

Korzystamy z tablic całek (łatwo można policzyć samemu):

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right). \tag{8}$$

Po podstawieniu otrzymujemy pośredni wynik:

$$Q(r) = q \exp(-2r/a) \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \tag{9}$$

a wyrażenie na pole dane jest wzorem:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \exp(-2r/a) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar} + \frac{2}{a^2} \right) \tag{10}$$

5. Znaleźć pole $\overline{E}$ w całej przestrzeni, gdy dane są dwie nieskończone bardzo cienkie płaszczyzny naładowane ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ, skonfigurowane względem siebie oraz znaku ładunku jak niżej:

   - umieszczone są równolegle w odległości d i ładunki mają przeciwne znaki
   - umieszczone są równolegle w odległości d i oba ładunki są dodatnie
   - przecinają się pod kątem prostym i oba ładunki są dodatnie

   Rozwiązanie: Pole od pojedynczej płaszczyzny jest jednorodne, o natężeniu $E = \sigma/2\epsilon_0$ a wektor skierowany jest prostopadle do płaszczyzny. W pierwszym przypadku w przestrzeni między płaszczyznami natężenie pola wynosi $E = \sigma/\epsilon_0$ a na zewnatrz znika; w drugim przypadku jest odwrotnie czyli wewnątrz pole znika a na zewnatrz wynosi $E = \sigma/\epsilon_0$; w trzecim przypadku składamy stosownie w czterach ćwiartkach przestrzeni dwa prostopadłe wektory o długości $E = \sigma/2\epsilon_0$ i otrzymujemy pole jednorodne w kierunku równoległym do dwusiecznej kąta prostego i wartości $E = \sqrt{2}\sigma/2\epsilon_0$ o zwrotach w kolejnych ćwiartkach: NE, NW, SW, SE (jak cztery strony świata).

6. Dane są dwie skończone ale o dużej powierzchni, na przykład kwadratowe przewodzące płyty (czyli mają pewną grubość lecz dużo mniejszą od ich rozmiarów). W chwili poczatkowej płyty rozsunięte są do nieskończoności przy czym na jednej znajduje się ładunek Q a na drugiej $-Q$ - jest to konfiguracja (1). W tej konfiguracji ładunki z obu płyt nie oddziałują wzajemnie. Płyty przybliżamy do siebie na niewielką odległość, dużo mniejszą od rozmiarów płyt - jest to konfiguracja (2). Jak rozłożony jest ładunek na każdej płycie w obu konfiguracjach?

   Rozwiązanie: W konfiguracji (1) ładunek na każdej płycie rozłożony jest przy obu powierzchniach. W konfiguracji (2) - tylko przy powierzchniach najblizszych sobie.

7. Dany jest dipol elektryczny o ładunkach $\pm q$, rozsuniętych na odległość d, czyli jego moment dipolowy wynosi $p = qd$. Przyjmijmy, że ładunek ujemny umieszczony jest na osi x układu odniesienia w jego poczatku ($x = 0$) a ładunek dodatni znajduje się w punkcie $x = d$. W przestrzeni istnieje niejednorodne pole elektrostatyczne o natężeniu wyrażającym się wzorem:

$$E_x(x) = E_0 + E_1 \left(\frac{x}{x_0} \right), \tag{11}$$

gdzie E_0, E_1 i x_0 są stałymi. Jaka wypadkowa siła działa na ten dipol?

Rozwiązanie: Na ładunek ujemny działa siła $-qE_0$ a na dodatni $+q(E_0 + E_1 \frac{d}{x_0})$, suma tych sił wynosi $qE_1 \frac{d}{x_0} = p\frac{dE_x}{dx}$. Można wspomnieć, że w ogólnym przypadku w wyrażeniu na siłę wystepuje gradient (pochodne cząstkowe).

8. Dana jest metalowa kula o promieniu R_1, otoczona koncentryczną metalową powłoką o promieniu wewnętrznym R_2 i zewnętrznym R_3. Kula metalowa naładowana jest ładunkiem $+Q$. Wyznacz pole elektrostatyczne w całej przestrzeni i podaj gęstości powierzchniowe ładunków tam gdzie one występują.

Rozwiązanie: Problem ma symetrię sferyczną więc stosujemy prawo Gaussa we współrzędnych sferycznych. Wewnątrz metalowej kuli pole znika, ładunek $+Q$ rozłożony jest jednorodnie na jej powierzchni więc gęstość powierzchniowa łądunku wynosi $\sigma_1 = Q/4\pi R_1^2$. Między kula a wewnętrzna powierzchnią metalowej powłoki, czyli dla , mamy z prawa Gaussa:

$$E_{12}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \tag{12}$$

Na wewnętrznej powierzchni powłoki występuje indukowany ładunek powierzchniowy o całkowitej wartości $-Q$ a na zewnętrznej $+Q$. Ergo, odpowiednie gęstości powierzchniowe ładunków wynoszą: $\sigma_2 = -Q/4\pi R_2^2$ oraz $\sigma_3 = Q/4\pi R_3^2$. Pole elektrostatyczne wewnatrz metalowej powłoki musi znikać, co jest zapewnione przy tak indukowanych ładunkach jak wyżej, bowiem z prawa Gaussa dla obszaru $R_2 < r < R_3$ wynika:

$$E_{23}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - Q}{r^2} = 0. \tag{13}$$

W obszarze $R_3 < r$ mamy ponownie z prawa Gaussa:

$$E_{3\infty}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \tag{14}$$

9. W przestrzeni istnieje jednorodne pole elektrostatyczne $\overline{E_0}$. Wprowadzamy do rozważań metalową płytę wielkich rozmiarów (by ją traktować jako nieskończoną), dla ustalenia uwagi o niewielkiej grubości, i ustawiamy ją prostopadle do linii sił pola $\overline{E_0}$. Wyznaczyć pole elektrostatyczne w całej przestrzeni.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że pole $\overline{E_0}$ skierowane jest wzdłuż osi x układu odniesienia a lewa powierzchnia płyty niech znajduje się w położeniu $x = 0$ a prawa w jakimś położeniu $x > 0$. Na obu powierzchniach płyty wyindukowane zostaną ładunki powierzchniowe o takiej wartości aby wypadkowe pole wewnatrz płyty znikało: ładunek ujemny na lewej powierzchni, dodatni na prawej. Warunek znikania pola wewnatrz płyty prowadzi do nastepującego wyniku na gęstość powierzchniową ładunku, z dokładnością do znaku: $\sigma = \epsilon_0 E_0$.

10. Dipol elektryczny umieszczono wewnątrz kulistej powierzchni zamkniętej w taki sposób, że środek dipola pokrywa się ze środkiem sfery. Ile wynosi strumień pola $\overline{E}$ przez tę powierzchnię?

    Rozwiązanie: Oczywiście $\oint \overline{E} d\overline{S} = 0$ dla dowolnej powierzchni zakmnietej. Można skomentować, że pole nie ma symetrii sferycznej i całka w wyrażeniu na strumień nie zamieni się na iloczyn natężenia pola i powierzchni więc prawo Gaussa nie jest tu przydatne do wyznaczenia pola.

11. Dane jest jednorodne pole $\overline{E}$. Policzyć strumień Φ tego pola przez następujące powierzchnie:

    - kwadrat o boku a gdy kąt między normalną do płaszczyzny kwadratu i wektorem pola wynosi α
      Rozwiązanie: $\Phi = Ea^2 \cos\alpha$
    - półsferę o promieniu R gdy wektor pola jest prostopadły do powierzchni podstawy półsfery (wielkiego koła)
      Rozwiązanie: $\Phi = E\pi R^2$ ale należy dla przykładu wycałkować po sferze. W tym celu rozpiszmy podstawowe wielkości wchodzące do całki we współrzędnych sferycznych. Mamy $d\overline{S} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \frac{\overline{r}}{r}$, przyjmijmy też, że pole E skierowane jest wzdłuż osi z, wówczas wektor pola i wektor normalny do powierzchni sfery tworzą kąt θ więc całka wyrażająca strumień ma postać (już po scałkowaniu po kącie ϕ): $\oint \overline{E} d\overline{S} = 2\pi E R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta d(\cos\theta) = E\pi R^2$ czyli (co jest oczywiste) jest to powierzchnia wielkiego koła, które jest rzutem półsfery na płaszczyznę.
    - dowolnie ustawiony sześcian o boku a (powierzchnia zamknięta)
      Rozwiązanie: $\Phi = 0$ ponieważ wkłady do sumy w całce znoszą się dla par przeciwległych boków

12. Ładunek punktowy q umieszczono na wysokości z nad kołem o promieniu R, na osi koła. Policzyc strumień pola $\overline{E}$ przez powierzchnię koła.

    Rozwiązanie: Rachunki są bardzo podobne do zad. 9 z serii I. Prowadzą one do wyniku:

    $$\Phi(z) = \frac{q}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}\right) \tag{15}$$

    który w przypadku $z \gg R$ sprowadza sie do:

    $$\Phi(z) = \frac{qR^2}{4\epsilon_0 z^2} \tag{16}$$

    zgodnie z tym co daje iloczyn natężenia pola od ładunku punktowego w odległości z i pola powierzchni koła πR^2.