Warszawa 10.03.2009

Mechanika - Zadania na ćwiczenia - Część 4

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski

1 Zachowanie pędu

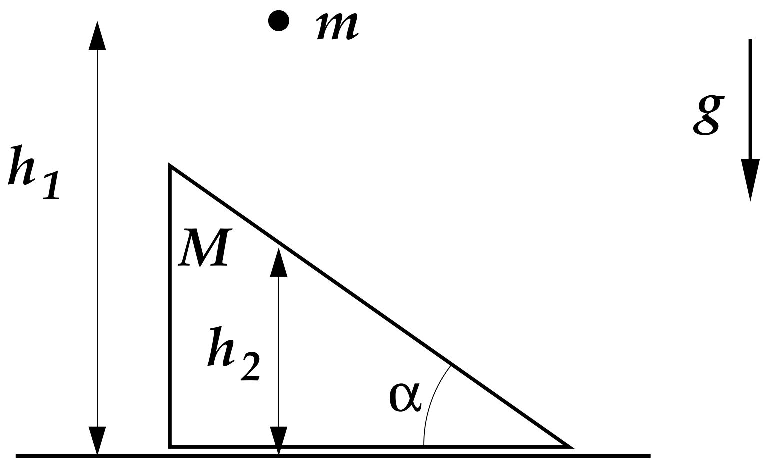
Układ wielu punktów materialnych jest izolowany. Oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki. Udowodnij, że całkowity pęd układu jest zachowany.

2 Rozstanie

Z dala od innych ciał spoczywa układ dwóch odważników o masach m_1 i m_2 ściskających nieważką sprężynę, której współczynnik sprężystości wynosi k, a długość swobodna równa jest L. Nieruchome odważniki znajdują się w odległości l od siebie. Oblicz prędkości odważników po chwili, gdy sprężyna przestanie na nie oddziaływać. Uzyskaj również wyniki liczbowe w przypadku, gdy $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $k = 500$ N/m, $L = 50$ cm, $l = 30$ cm. Zaniedbaj oddziaływanie grawitacyjne między odważnikami.

3 Zderzenie z ruchomą równią

Z wysokości h_1 nad poziomym lodowiskiem upuszczono kulkę o masie m. Na wysokości h_2 kulka odbiła się idealnie sprężyście od równi pochyłej, która początkowo spoczywała. Znajdź wektor prędkości kulki tuż po odbiciu się od równi. Kąt nachylenia równi wynosi α, a jej masa M. Równia może poruszać się po lodowisku bez tarcia. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Promień kulki oraz czas trwania zderzenia są pomijalnie małe. Uzyskaj również wynik liczbowy w przypadku, gdy $m = 2$ kg, $h_1 = 2.6$ m, $h_2 = 0.8$ m, $M = 4$ kg, $\alpha = 45°$ oraz $g = 10$ m/s^2.



4 Zjazd po ruchomej równi - odcinek II

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może przesuwać się bez tarcia po stole. Na równię położono ciężarek o masie m. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Ciężarek zaczął zsuwać się bez tarcia po równi i przebył drogę L' wzdłuż stoku.
Ile wynosi w tym momencie prędkość równi względem stołu? Zadanie rozwiąż, korzystając z zasad zachowania pędu i energii.
Jak należałoby zmodyfikować wyjściowe równania, jeśli między równią a ciężarkiem występowałoby tarcie, a praca sił tarcia nad ciężarkiem w układzie związanym z równią wyniosłaby W_T ($W_T < 0$).

5 Przenośnik taśmowy

Długi, poziomy przenośnik taśmowy porusza lepką taśmą cały czas z prędkością v względem ziemi. Na taśmę wysypuje się stałym strumieniem piasek. Prędkość piasku względem ziemi, tuż przed zetknięciem się z taśmą, jest pomijalnie mała. Po czasie T na taśmie jest porcja piasku o masie m. Opory ruchu podzespołów maszyny są zaniedbywalne. Oblicz pracę wykonaną w czasie T przez przenośnik. Oblicz energię kinetyczną piasku. Porównaj uzyskane wyniki.

6 Wagon i deszcz

Wagon o masie m_0 zaczął poruszać się bez tarcia po poziomych torach. Jego prędkość początkowa wynosiła v_0. Ze względu na pionowo padający, przymarzający deszcz masa wagonu zwiększa się w tempie w. Znajdź zależność prędkości wagonu od czasu. Po jakim czasie od startu wagonu jego prędkość zmniejszy się stokrotnie, jeśli $m_0 = 10^4$ kg, $w = 0.99$ kg/s?

7 Moment pędu punktu materialnego

Wychodząc z II zasady dynamiki $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, gdzie $\vec{p}$ jest pędem punktu materialnego, a $\vec{F}$ działającą na niego siłą, udowodnij, że obowiązuje równanie

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M} \ ,$$

gdzie $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ (moment pędu), $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (moment siły), a $\vec{r}$ jest wektorem położenia punktu materialnego.

8 Siła zachowawcza i niezachowawcza

Pewną siłę $\vec{F}$ można przedstawić w postaci

$$\vec{F} = -\nabla U \ ,$$

gdzie U jest funkcją położenia, a w układzie kartezjańskim operator gradientu ∇ działa na U w następujący sposób

$$\nabla U = \hat{e}_X \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{e}_Y \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{e}_Z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Udowodnij, że rotacja tej siły jest równa 0:

$$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times \nabla U = 0$$

Sprawdź, czy rotacja innej, hipotetycznej siły

$$\vec{H} = \begin{cases} a(-y\hat{e}_X + x\hat{e}_Y) & \text{dla } R \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 & \text{dla } R < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

jest równa 0 (a i R są stałymi). Zapisz wzór na $\vec{H}$, korzystając ze współrzędnych cylindrycznych. Czy warto byłoby posiadać trwałe źródło takiej siły?

9 Praca pola sił

Dla dwuwymiarowego pola sił sprężystych opisanych wzorem

$$\vec{F}(x,y) = -kx\hat{e}_X - ly\hat{e}_Y \ ,$$

gdzie k oraz l są stałymi, oblicz:

a) pracę pola sił na drodze będącej odcinkiem pomiędzy punktami $(x_0, 0)$ oraz $(0, y_0)$;

b) pracę pomiędzy tymi punktami po drodze łamanej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$;

c) energię potencjalną $E_p(x, y)$;

d) pracę pola sił pomiędzy ww. punktami, korzystając ze znajomości $E_p(x, y)$.