

24

Rozwiązanie zad. 4

$$\vec{r}(\alpha) = R \begin{pmatrix} \alpha + \sin \alpha \\ 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \quad -\pi < \alpha < \pi, \quad R > 0$$

Obliczamy pomocnicze wielkości

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\alpha} = R \begin{pmatrix} 1 + \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \vec{r}' = 2R \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} = R(1 + 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^{1/2} =$$

$$= R(2 + 2\cos \alpha)^{1/2} = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$$

a) Wecm styczn

$$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} / \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{\vec{r}' \frac{d\alpha}{dt}}{\frac{d\alpha}{dt} |\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 \end{pmatrix}$$

b) Długość łuku:

$$s(\alpha) = \int_0^\alpha d\alpha' |\vec{r}'(\alpha')| = 2R \int_0^\alpha d\alpha' \cos \frac{\alpha'}{2} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow \left| \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{4R} \right|$$

c) Równanie ruchu ($\vec{F}_R$ - siły reakcji cykloidy)

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F}_R \quad | \cdot \vec{e}_t \quad \text{rzut na kierunek styczny}$$

$$\underbrace{m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_t}_{m\ddot{s}} = m\vec{g} \cdot \vec{e}_t = \underbrace{-mg \sin \alpha/2}_{= -\frac{mg}{4R} s}$$

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$\left| \ddot{s} + \frac{g}{4R} s = 0 \right|$$

Równanie oscylatora harmonicznego z

$$\omega_0^2 = \frac{g}{4R}$$

$$\text{Okres} \quad \left| T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}} = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \right|$$