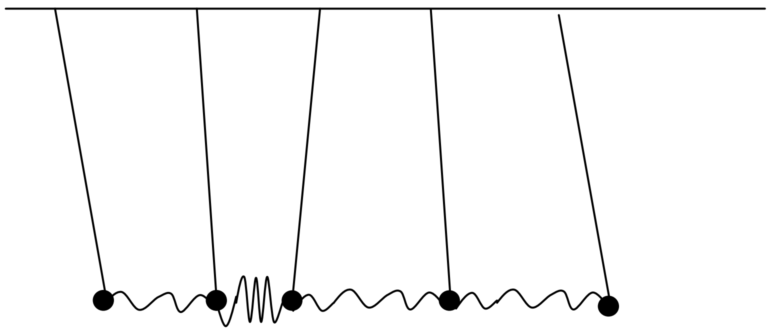
Wykład 5 (2+1)

Zajmiemy się dzisiaj drganiami układów o wielu, a w granicy nawet nieskończenie wielu stopni swobody.

Rozważmy przykład, sekwencji oscylatorów harmonicznych, sprzężonych „po sąsiedzku”, też siłami elastycznymi. Jedną z możliwych realizacji może być kolekcja wahadeł połączo-



nych sprężynami:

Sprężyny są nienapięte, gdy wahadła zwisają pionowo. Ich współczynnik sprężystości oznaczamy, jak zawsze, k.

Współrzędne oscylatorów oznaczymy x_i – mierzymy je od położeń równowagi. Dla małych drgań, energia potencjalna grawitacji, mierzona od położenia najniższego wynosi:

$$mgl(1-\cos\varphi) \approx \tfrac{1}{2}mgl\varphi^2 = \frac{mgx^2}{2l} = \frac{1}{2}m\omega_o^2x^2 \qquad (1)$$

Wydłużenie każdej ze sprężyn równe jest różnicy odchyleń 2 mas doczepionych do jej końców. Stąd energia potencjalna całości wynosi:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} m\omega_o^2 {x_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f-1} k(x_{i+1}-x_i)^2 \qquad (2)$$

Energia kinetyczna, to

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} m{\dot{x}_i}^2 \qquad (3)$$

Zauważmy, że współrzędne skrajnych oscylatorów wchodzą do energii sprężystości tylko raz, gdy pozostałe 2 razy. Dodanie po jednej sprężynie dodatkowej, przytwierdzonej do stałego punktu, da nam inne zadanie. W swoim czasie zbadamy wpływ takiej zmiany treści zadania, szczególnie w granicy nieskończenie wielu, nieskończenie małych oscylatorów.

Wyłączamy w energii potencjalnej $\frac{1}{2}k$ przed nawias i definiujemy parametr:

$$\mu = \frac{m\omega_o^2}{k} \qquad (4)$$

Do zdiagonalizowania mamy macierz:

$$\begin{matrix} 1+\mu & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2+\mu & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -1 & 2+\mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+\mu & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1+\mu \end{matrix} \qquad (5)$$

Granica μ=0 odpowiada sekwencji „koralików” połączonych sprężynkami. Po doczepieniu jednej lub dwóch sprężynek na końcach dostaniemy układ odpowiadający drganiom ośrodka ciągłego w jednym wymiarze z takim bądź innym warunkiem brzegowym. Takie „doczepienie” sprowadza się do zamiany jednej, lub obu jedynek w narożach macierzy na dwójki.

Jeżeli odejmiemy wartość własną λ, odejmie się ona wszędzie od μ.

Teraz, powyższa macierz, w której zamiast μ wpiszemy μ-λ działając na kolumnę macierzy ortogonalnej ma dać zero.

Dostajemy układ równań, w którym, oprócz pierwszego i ostatniego, wszystkie są bardzo do siebie podobne. Zawierają zawsze trzy kolejne wyrazy. Równania skrajne muszą być odmienne, nawet gdy dodamy sprężyny boczne.

Zostawiając warunek spełnienia równań skrajnych na potem, zajmijmy się wszystkimi $f-2$ równaniami naraz.

W równaniach niewiadomymi są kolumny macierzy U opisującej drgania normalne. W danym momencie zajmujemy się jedną kolumną. Po to by nie komplikować pisowni, pominę numer kolumny, nazywając wyznaczane niewiadome literami $U_1, U_2, \cdots U_f$.

Równanie o numerze n, będzie:

$$-U_{n-1} + (2+\mu-\lambda)U_n - U_{n+1} = 0 \qquad (6)$$

Jest to bardzo ciekawe równanie. Nazywa się je równaniem rekurencyjnym – w skrócie rekurencją. Ta jest rzędu drugiego. Wyraża ona wprost wartość kolejnego wyrazu jako kombinację liniową dwóch poprzednich wyrazów ciągu:

$$U_{n+1} = (2+\mu-\lambda)U_n - U_{n-1} \qquad (7)$$

Gdyby znać pierwsze dwa wyrazy ciągu, wszystkie pozostałe byłyby już niemal jawnie wyznaczone. „Niemal” czyni niejaką różnicę. Wolelibyśmy **jawne** wyrażenie ogólnego wyrazu przez dwa pierwsze i (niewyznaczoną jeszcze) wartość własną.

Gdyby to osiągnąć, to wstawiając te ogólne formuły do równań skrajnych, dostalibyśmy dwa równania (jednorodne) z dwiema niewiadomymi elementami, zawierające wartość własną. Dalej byłoby prosto.

Jest jasne, że dzięki liniowości rekurencji, jeśli jakiś ciąg jest jej rozwiązaniem, to pomnożenie go przez stałą daje nowe rozwiązanie. Jeśli jakiś **inny** ciąg spełnia tę samą rekurencję, to dodanie go (połączone z pomnożeniem przez stałą) do pierwszego ciągu daje znów ciąg spełniający rekurencję.

Jeśli uda się **odgadnąć** dwa szczególne, niezerowe, rozwiązania rekurencji, to rozwiązaniem najogólniejszym jest ich kombinacja liniowa. Wynika to z tego, że dobierając dwie stałe w kombinacji liniowej mogę zapewnić zadane, prawdziwe wartości U_1 i U_2. Tak dookreślony ciąg jest tylko jeden, bo spełnianie rekurencji i warunku początkowego wyznacza ciąg jednoznacznie.

Zamiast szukać rozwiązań odpowiadających nieznikaniu tylko wyrazu pierwszego, albo tylko drugiego, szukamy **byle jakiego** rozwiązania, nie troszcząc się o warunek początkowy, i jeśli tylko znajdziemy takie dwa, spełnimy warunek początkowy na końcu.

Nie trzeba wielkiej przenikliwości, by zauważyć, że wzorowym kandydatem na rozwiązanie rekurencji liniowej ze stałymi współczynnikami jest zależność **potęgowa**. Wstawiamy:

$$U_n = r^n \tag{8}$$

Z nieokreśloną, na razie, wartością r i patrzymy co będzie:

$$r^{n+1} = (2 + \mu - \lambda)r^n - r^{n-1} \tag{9}$$

Dzielimy równanie przez r^{n-1} i dostajemy równanie **kwadratowe.**

$$r^2 = (2 + \mu - \lambda)r - 1 \tag{10}$$

Gdyby rekurencja zawierała 3 (lub więcej) różnych kolejnych wyrazów, to otrzymane w ten sposób **równanie charakterystyczne** byłoby równaniem trzeciego (itd.) stopnia posiadającym **akurat** tyle pierwiastków, ile potrzeba rozwiązań szczególnych, by kombinacja liniowa z nich utworzona mogła przyjąć zadane wartości dla kilku początkowych wyrazów ciągu, tych które są konieczne i wystarczające, by jednoznacznie określić wszystkie dalsze. Sytuacja ta przypomina, wypisz wymaluj, sytuację w równaniach **różniczkowych** o stałych współczynnikach.

Po to, by pierwiastki „ładnie" się dały zapisać wprowadźmy oznaczenie:

$$2 + \mu - \lambda = 2\cos\psi \tag{11}$$

$$r^2 - 2\cos\psi r + 1 = 0 \tag{12}$$

$$r_{1,2} = \cos\psi \pm \sqrt{\cos\psi^2 - 1} = \mathrm{e}^{\pm i\psi} \tag{13}$$

W ten sposób znaleźliśmy ogólne rozwiązanie $f - 2$ „środkowych" równań na wektory własne:

$$U_n = A\, e^{in\psi} + B\, e^{-in\psi} \tag{14}$$

Do równania drugiego wchodzi nie tylko U_3, ale też U_2 i U_1, więc formuła powyższa obowiązuje wszystkie współrzędne kolumny, także dla n =1,2.

Moglibyśmy, rzecz jasna, równie dobrze napisać kombinacje liniowe sinusa i cosinusa, ale na razie nie ma takiej potrzeby.

Przenikliwy słuchacz dostrzeże tu wkradające się fale harmoniczne. Ale o tym, potem

Na razie nie rozwiązaliśmy wszystkich równań, ani nie wyznaczyliśmy wartości własnych. Musimy „pochylić się” nad równaniami skrajnymi:

$$(1+\mu-\lambda)U_1 = U_2,$$
$$(1+\mu-\lambda)U_f = U_{f-1} \tag{15}$$

Które wobec (11) i (14) przyjmują postać:

$$\left(e^{i\psi}+e^{-i\psi}-1\right)\left(Ae^{i\psi}+Be^{-i\psi}\right) = \left(Ae^{2i\psi}+Be^{-2i\psi}\right),$$
$$\left(e^{i\psi}+e^{-i\psi}-1\right)\left(Ae^{if\psi}+Be^{-if\psi}\right) = \left(Ae^{i(f-1)\psi}+Be^{-i(f-1)\psi}\right) \tag{16}$$

Po zupełnie elementarnym uporządkowaniu (bez konieczności pamiętania wzorów trygonometrycznych!) dostajemy układ dwóch równań:

$$A\left(1-e^{i\psi}\right)+B\left(1-e^{-i\psi}\right)=0,$$
$$Ae^{if\psi}\left(1-e^{i\psi}\right)+Be^{-if\psi}\left(1-e^{-i\psi}\right)=0 \tag{17}$$

Równania powyższe mają niezerowe rozwiązania wtedy, gdy znika wyznacznik.

$$\left(1-e^{i\psi}\right)\left(1-e^{-i\psi}\right)\left(e^{-if\psi}-e^{if\psi}\right)=0 \tag{18}$$
$$4i(1-\cos\psi)\sin f\psi = 0 \tag{19}$$

Kąty, dla których sinus znika, to $p\pi$. Zatem, powinno być:

$$f\psi = p\pi,$$
$$\psi = p\frac{\pi}{f} \quad p = 0,1,2 \ldots (f-1) \tag{20}$$

Wartości własne:

$$\lambda = 2+\mu-2\cos\psi = \mu + 4\sin^2\frac{\psi}{2} \tag{21}$$

A częstości własne

$$\omega_p^2 = \frac{k}{m}\lambda_p = \omega_0^2 + \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\psi}{2} = \omega_0^2 + \frac{4k}{m}\sin^2\frac{p\pi}{2f} \tag{22}$$

Wektory własne wyznaczymy kończąc rozwiązywanie równań (18) i (19). W rzeczywistości, tylko jedno z nich jest niezależne. Szybciej do celu prowadzi równanie (18):

$$B=-A\frac{1-e^{i\psi}}{1-e^{-i\psi}}=-A\frac{e^{\frac{i\psi}{2}}(e^{-\frac{i\psi}{2}}-e^{\frac{i\psi}{2}})}{e^{\frac{-i\psi}{2}}(e^{\frac{i\psi}{2}}-e^{\frac{-i\psi}{2}})}=Ae^{i\psi} \qquad (23)$$

Wektory własne:

$$U_{np}=A_pe^{in\psi_p}+B_pe^{-in\psi_p}=A_p\left(e^{in\psi_p}+e^{i\psi_p}e^{-in\psi_p}\right)=$$

$$=A_pe^{\frac{i\psi_p}{2}}\left(e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\psi_p}+e^{-i\left(n-\frac{1}{2}\right)\psi_p}\right)=\tilde{A}_p\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\psi_p=$$

$$=\tilde{A}_p\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{f} \qquad (24)$$

Dla $p = 0$, czyli dla najniższej częstości własnej, amplituda jest stała, co odpowiada synchronicznemu kołysaniu się wszystkich wahadeł z częstością ω_0 (pojedynczego wahadła). Im p większe, tym częściej zmienia się znak amplitudy. Dla $p=f$ wyrażenie na składowe wektora własnego znikają – rzeczywiście maksymalną możliwą wartością jest $p=f-1$. Częstość oscylacji osiąga maksimum:

$$\omega_{f-1}^2=\omega_0^2+\frac{4k}{m}\sin^2\frac{(f-1)\pi}{2f}=\omega_0^2+\frac{4k}{m}\cos^2\frac{\pi}{2f} \qquad (25)$$

Suma kwadratów $\cos^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{f}$ może być policzona po rozłożeniu cosinusa kwadrat na ½ i cosinus podwojonego kąta. Suma tych cosinusów może być obliczona jako suma postępu geometrycznego:

$$\sum_{n=1}^{f}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{2p\pi}{f}=\sum_{n=0}^{f-1}\cos\,(2n+1)\frac{p\pi}{f}=$$

$$=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{f-1}e^{i(2n+1)\frac{p\pi}{f}}=\mathrm{Re}e^{i\frac{p\pi}{f}}\sum_{n=0}^{f-1}e^{in\frac{p2\pi}{f}}=\mathrm{Re}e^{i\frac{p\pi}{f}}\frac{1-e^{i\frac{fp2\pi}{f}}}{1-e^{i\frac{p2\pi}{f}}}=0 \qquad (26)$$

Zostaje suma owych połówek. Ostatecznie:

$$U_{np}=\sqrt{\frac{2}{f}}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{f}$$ dla $p\neq 0$ i $\sqrt{\frac{1}{f}}$ dla modu „zerowego”. (27)

Ponieważ współrzędne normalne oscylują z wyliczonymi częstościami, przeto **rozwiązanie ogólne** problemu dane jest wyrażeniem:

$$x_n=\sqrt{\frac{1}{f}}\,Q^0\cos(\omega_0\,t+\delta_0)+\sqrt{\frac{2}{f}}\sum_{p=1}^{f-1}Q_p^0\cos(\omega_p\,t+\delta_{0p})\cos\frac{p\pi}{f}\left(n-\frac{1}{2}\right) \qquad (28)$$

Gdy f jest liczbą dużą, a p niewielką, zmiana numeru n o 1 czy 2 powoduje niewielką, quasi ciągłą, zmianą amplitudy oscylacji. Sytuacja ta odpowiada dokładnie fali stojącej.

Interesujące może być zbadanie drgań sprężyny (czy sprężystego pręta) zamocowanej z jednego (albo dwóch) końców. Na poszczególne elementy działają tylko siły od sąsiadów, usuwamy odrębne siły symbolizowane przez sznurki i grawitację. Oznacza to położenie wielkości $\omega_0 = 0$. Zamocowanie z obu końców realizujemy dodając po jeszcze jednej sprężynie, co dokłada do macierzy potencjału człony x_1^2 i x_f^2.

Szczęśliwie nie wpływa to na pierwszą część rachunku, tj. rozwiązanie równania rekurencyjnego. W parze równań (16) musimy pominąć jedynki:

$$\left(e^{i\psi} + e^{-i\psi}\right)\left(Ae^{i\psi} + Be^{-i\psi}\right) = \left(Ae^{2i\psi} + Be^{-2i\psi}\right),$$

$$\left(e^{i\psi} + e^{-i\psi}\right)\left(Ae^{if\psi} + Be^{-if\psi}\right) = \left(Ae^{i(f-1)\psi} + Be^{-i(f-1)\psi}\right) \tag{29}$$

Po redukcji wyrazów podobnych równania wychodzą dużo prostsze niż poprzednio:

$$A = -B \tag{30}$$

$$Ae^{i(f+1)\psi} = -Be^{-i(f+1)\psi} \tag{31}$$

Co sprowadza się do warunku:

$$\sin(f+1)\,\psi = 0 \tag{32}$$

Którego rozwiązaniem jest:

$$\psi_p = p\frac{\pi}{f+1} \qquad \text{dla } p = 1,2,\ldots.f \tag{33}$$

Wstawiając (30) do (nadal obowiązującego) równania (14) dostajemy:

$$U_{np} = \sqrt{\frac{2}{f}}\sin\frac{pn\pi}{f+1} \tag{34}$$

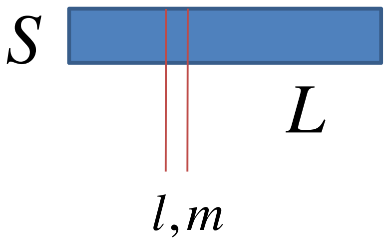
$$\omega_p^2 = \frac{k}{m}\lambda_p = +\frac{4k}{m}\sin^2\frac{p\pi}{2(f+1)} \tag{35}$$

Pełny opis ruchu:

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{f}}\sum_{p=1}^{f} Q_p^0 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{p\pi}{2(f+1)}\right)t + \delta_{0p}\right)\sin\frac{pn\pi}{f+1} \tag{36}$$

Jest to też fala stojąca, której amplituda zanika przy końcach.

Zbadane ostatnio układy punktów materialnych pozwalają, po przejściu do granicy, opisać drgania (podłużne) ośrodka ciągłego, np. pręta, czy słupa powietrza. Mały fragment pręta ma i masę i energię sprężystą.



$$F = Sp = SE\frac{\Delta l}{l} = k\Delta l \;\Rightarrow\; k = \frac{SE}{l} = \frac{SE}{L/f}$$

$$m = \rho Sl = \rho SL/f$$

Dla pręta zamocowanego na końcach skorzystamy z rozwiązania z „bocznymi sprężynkami”:

$$\omega_p^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{p\pi}{2(f+1)} \qquad U_{np} = \sqrt{\frac{2}{f}}\sin\frac{pn\pi}{f+1}$$

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{f}}\sum_p Q_p \cdot \sin\frac{pn\pi}{f+1}$$

Transformacja odwrotna

$$Q_p = \sqrt{\frac{2}{f}}\sum_n x_n \cdot \sin\frac{p\pi}{f+1}n$$

Pełna zależność położeń od czasu:

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{f}}\sum_p Q_p^0\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t\sin\left(\frac{p\pi}{2(f+1)}\right)+\delta_p^0\right)\cdot\sin\frac{pn\pi}{f+1}$$

Przejście od koralików do ośrodka ciągłego

$$\omega_p^{\;2} = \frac{4\dfrac{SE}{L/f}}{\rho SL/f}\sin^2\frac{p\pi}{2(f+1)} \quad \overset{f\to\infty}{\approx} \quad p^2\frac{\pi^2}{L^2}\frac{E}{\rho} = p^2\frac{\pi^2 c^2}{L^2}$$

Zamiast wskazywać miejsce drgające numerem *n,* musimy wymyśleć coś innego. Użyjemy współrzędnej „miejsca" na pręcie w położeniu równowagi. Oznaczmy ją *z.*

$$z = \frac{n}{f}L$$

$$x(z,t) = \sqrt{\frac{2}{f}}\sum_p Q_p(t)\cdot\sin\frac{p\pi}{L}z$$

$$Q_p = \sqrt{\frac{2}{f}}\sum_n x_n\cdot\sin\frac{p\pi}{f+1}n$$

4

W powyższych formułach przejście do granicy nie jest zrazu oczywiste. Ale też „normalizacja" zmiennych Q oznaczająca iż

$$T = \sum\frac{m}{2}\dot{Q}_i^{\;2}$$

Jest nienaturalna dla problemu ciągłego. Zdefiniujmy nowe zmienne $\tilde{Q}_i$ tak, by było:

$$T = \sum\frac{1}{2}\dot{\tilde{Q}}_i^{\;2},$$

czyli

$$\tilde{Q}_i = \sqrt{m}Q_i = \sqrt{M}\,\frac{Q_i}{\sqrt{f}},$$

gdzie M jest masą całego pręta.

5

Z nowymi współrzędnymi normalnymi, jest już lepiej!

$$x(z) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_p \tilde{Q}_p \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{L} z \right)$$

$$\tilde{Q}_p \sqrt{\frac{f}{M}} = \sqrt{\frac{2}{f}} \sum_n x_n \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{f+1} n \right)$$

$$\tilde{Q}_p = \sqrt{2M} \sum_n \frac{1}{f} x_n \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{L} z \right) =$$

$$= \sqrt{2M} \sum_n \frac{\mathrm{d}z}{L} x_n \cdot \sin\left(\frac{p\pi}{L} z \right) = \frac{\sqrt{2M}}{L} \int_0^L x(z) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z \right) \mathrm{d}z$$

6

$$x(z,t) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_p \tilde{Q}_p^0 \cos\left(2\pi \frac{c}{2L/p} t + \delta_p^0 \right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{z}{2L/p} \right)$$

$2L/p \equiv \lambda$ dlugosć fali $\qquad L = p\dfrac{\lambda}{2}$ p liczba połołów

$$\cos\left(2\pi \frac{c}{\lambda} t \right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} (ct + z) \right) - \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} (ct - z) \right)$$

dwie fale biegnace

Lagranżian struny

$$T=\frac{1}{2}\sum m\dot{x}^2=\frac{1}{2}\sum \rho S\mathrm{d}z\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\right)^2\rightarrow\frac{1}{2}\int S\rho\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}z$$

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}\qquad F=ES\frac{\Delta\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}=k\Delta\mathrm{d}z\Rightarrow k=\frac{ES}{\mathrm{d}z}$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}=\frac{1}{2}\frac{ES}{\mathrm{d}z}(\Delta\mathrm{d}z)^2=\frac{1}{2}\frac{ES}{\mathrm{d}z}\left(x(z+\mathrm{d}z)-x(z)\right)^2=\frac{ES}{2}\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}z$$

$$L=\int\frac{1}{2}\left(S\rho\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\right)^2-\frac{ES}{2}\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}z$$

8

$$0=\delta\int\int\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}t=$$

$$=\int\int\left(\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\delta x(z,t)}{\partial t}\right)-c^2\left(\frac{\partial x(z,t)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\delta x(z,t)}{\partial z}\right)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}t=$$

(po scalkowaniu przez czesci)

$$=-\int\int\left(\left(\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}\right)-c^2\left(\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}\right)\right)\delta x(z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

Dostajemy równanie falowe:
$$\left(\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}\right)-c^2\left(\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}\right)=0$$

Znamy jego rozwiązanie ogólne:
$$x(z,t)=f(z-ct)+g(z+ct)$$