Zadania z analizy i algebry.
(wykład prof.prof. J. Wojtkiewicza i K. Napiórkowskiego)

ALGEBRA, przestrzenie wektorowe

Zadanie 1

Zbadać czy wektor $\mathbf{v}$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, gdzie

$$i) \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} ,$$

oraz

$$ii) \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

Odp. $i)$ tak: $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $ii)$ nie.

Zadanie 2

Czy wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1+2i \\ i \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 7-i \\ 3+i \end{bmatrix} ,$$

są liniowo zależne? Zbadać sprawę nad ciałem R^1 i nad ciałem C^1.
Odp. Pytamy, czy równanie

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 = 0 ,$$

ma rozwiązanie dla $x_i \in R^1$, gdy nad R^1 oraz $x_i \in C^1$ gdy nad C^1. Rozwiążmy:

$$x_1(1+2i) + x_2(7-i) = 0 ,$$
$$x_1 i + x_2(3+i) = 0 ,$$

Z drugiego $x_1 = (-1+3i)x_2$ i to do pierwszego, co da: $[(1+2i)(-1+3i)+7-i]x_2 = 0$. To istotnie jest zero, niezależnie od wartości x_2. Rozwiązaniami są więc dowolne x_2 i $x_1 = (-1+3i)x_2$. Widać jednak, że jeśli $x_2 \in R^1$ to x_1 jest zespolone. Zatem nad R^1 wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, ale nad C^1 zależne.

Zadanie 3

Zbadać liniową niezależność nad ciałem R^1 i nad C^1 wektorów

$$i) \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

oraz

$$ii) \qquad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Odp.: W przypadku $i)$ widać gołym okiem, że są liniowo zależne nad R^1 bo równanie $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 + \lambda_4\mathbf{e}_4 = 0$ ma rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$ dla dowolnego λ, a skoro są liniowo zależne nad R^1 to i nad C^1 też, bo $R^1 \subset C^1$.
Uwaga: ustalona wyżej liniowa zależność $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$ oznacza, że np. $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_4$, tj., że $\mathbf{e}_3$ jest kombinacją liniową pozostałych. W zasadzie zamiast badać istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 + \lambda_4\mathbf{e}_4 = 0$ moglibyśmy postawić problem, czy wektor $\mathbf{e}_3$ jest liniowo zależny od pozostałych. To jest jednak mniej ogólne: mogłoby się np. okazać, że sam wektor $\mathbf{e}_3$ nie daje sie przedstawić jako kombinacja liniowa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_4$, ale te trzy wektory są liniowo zależne. Np. gdyby badać problem liniowej zależności wektorów

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

to okazałoby się (co w przypadku bardziej skomplikowanych wektorów nie musiałoby być od razu tak łatwo widoczne), że $\mathbf{v}_3$ nie jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$, niemniej te trzy wektory: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne i tym samym cztery wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne. Badając ich liniową zależność przez pytanie o istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 = 0$ dostalibyśmy, że niezerowym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_4 = \lambda$ i $\lambda_3 = 0$, czyli $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 = 0$. Jest jasne, że to nie pozwala wyrazić $\mathbf{v}_3$ przez pozostałe (bo $\lambda_3 = 0$).
W przypadku $ii)$ rozwiązujemy równanie $\xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \xi_3\mathbf{f}_3 = 0$, czyli układ

$$\begin{aligned} \xi_2 + i\xi_3 &= 0\,, \\ \xi_1 + i\xi_2 + \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 - i\xi_2 + \xi_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dodając pierwsze pomnożone przez i do trzeciego dostajemy $\xi_1 = 0$. Uwzględniając to, z drugiego dodanego do trzeciego znajdujemy $2\xi_3 = 0$ czyli $\xi_3 = 0$ i wtedy (z pierwszego) $\xi_2 = 0$ też. Zatem wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są linowo niezależne nad obydwoma ciałami R^1 i C^1.

Zadanie 4

Zbadać liniową zależność wektorów.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Odp.: Rozwiązujemy równanie $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = 0$, czyli układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2ix_2 + x_3 &= 0 \ , \\ ix_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \ , \\ -ix_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Dodanie drugiego do trzeciego daje $x_3 = 0$. Wtedy pierwsze sprowadza się do $x_1 + ix_2 = 0$, a drugie do $ix_1 - x_2 = 0$, czyli do pierwszego pomnożonego przez i. Zatem szukanym rozwiązaniem jest $x_2 = ix_1$, $x_3 = 0$ i x_1 dowolne. Ponieważ albo x_1 albo x_2 jest zespolone (albo nawet oba) to wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ są liniowo zależne nad C^1, ale nie nad R^1.

Zadanie 5
Dowieść, że jeśli wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne (nad R^1 lub C^1) to takimiż są wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ , \\ \mathbf{f}_3 &= \phantom{\mathbf{e}_1 +{}} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Odp.: Jak zwykle pytamy, czy z faktu, że $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = 0$ wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wiemy teraz także, iż równanie $\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 = 0$ ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Piszemy więc:

$$\begin{aligned} 0 = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 &= \lambda_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \lambda_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_3(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{e}_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Zatem na mocy założenia musimy mieć $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Drugie z pierwszym daje $\lambda_3 = 0$, wtedy trzecie daje $\lambda_1 = 0$ i na koniec z drugiego wynika wtedy że i $\lambda_2 = 0$.

Zadanie 6
Dowieść, że następujące zbiory wektorów-funkcji (tj. wektorów z przestrzeni $V = \mathrm{Map}(R^1, R^1)$) są liniowo niezależne

a)	$\sin x, \quad \cos x$,
b)	$1, \quad \sin x, \quad \cos x$,
c)	$\sin x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \sin nx$
d)	$1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \ldots, \quad \cos nx$
e)	$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \cos nx, \quad \sin nx$.

Odp.: W przypadku *a*) jest jasne, że $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ może *dla wszystkich* $x \in (a, b) \subset R^1$ zachodzić tylko dla $\lambda = \xi = 0$: jeśli $x = k\pi$ i $x = l\pi + \frac{1}{2}\pi$ należą do (a, b) to jest to trywialne, jesli nie, to można zróżniczkować i ma się $\lambda \cos x - \xi \sin x = 0$ oraz

$\lambda\sin x+\xi\cos x=0$ i znów jedynym rozwiązaniem obu dla wszystkich x-ów jest $\lambda=\xi=0$. To samo w przypadku *b*): $\eta\,1+\lambda\sin x+\xi\cos x=0$ dla wszystkich $x\in(a,b)\subset R^1$ też wymaga $\eta=\lambda=\xi=0$ (aby to zobaczyć, można znów zróżniczkować i dostaniemy ten sam problem, co w punkcie a). W przypadku *c*) możemy posłużyć się indukcją. Zakładamy, że wektory te są liniowo niezależne dla jakiegoś n (dla $n=1$ jest to oczywiste) i sprawdzamy, czy z tego wynika to samo dla $n+1$, to znaczy, że

$$f(x)\equiv\lambda_1\sin x+\lambda_2\sin 2x+\ldots+\lambda_n\sin nx+\lambda_{n+1}\sin(n+1)x\equiv 0\ ,$$

(symbol $\equiv$ przypomina, że ma to być 0 dla wszystkich x) tylko dla $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_n=\lambda_{n+1}=0$. Skoro ma to zachodzić dla wszystkich x to znaczy że i

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)\equiv-\lambda_1\sin x-2^2\lambda_2\sin 2x+\ldots-n^2\lambda_n\sin nx-(n+1)^2\lambda_{n+1}\sin(n+1)x\equiv 0\ .$$

Mnożymy $f(x)$ przez $(n+1)^2$ i dodajemy do tego tu wyżej, co da

$$[(n+1)^2-1]\lambda_1\sin x+[(n+1)^2-4]\lambda_2\sin 2x+\ldots+[(n+1)^2-n^2]\lambda_n\sin nx\equiv 0\ ,$$

To zaś na mocy indukcyjnego założenia o liniowej niezależności wektorów $\sin x$, ..., $\sin nx$ oznacza, ze $[(n+1)^2-1]\lambda_1=[(n+1)^2-4]\lambda_2=\ldots=[(n+1)^2-n^2]\lambda_n=0$. Stąd zeru muszą być wszystkie λ_i o $i=1,\ldots,n$ z wyjątkiem ewentualnie k-tej, o takim k, że $(n+1)^2-k^2=0$. Ale to się nie może zdarzyć, bo w indukcji rozpatrujemy tylko $n+1>k$. Zatem $\lambda_1=\lambda_2=\ldots\lambda_n=0$ i z tożsamościowego znikanie $f(x)$ wynika, iż także $\lambda_{n+1}=0$. W przypadku *d*) także posługujemy się indukcją. Zakładamy, że teza (liniowa niezależność) jest prawdziwa dla n mamy pokazać, że

$$g(x)\equiv\eta+\lambda_1\cos x+\lambda_2\cos 2x+\ldots+\lambda_n\cos nx+\lambda_{n+1}\cos(n+1)x\equiv 0\ ,$$

pociąga za sobą $\eta=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=\lambda_{n+1}=0$. Mnożymy $g(x)$ przez $(n+1)^2$ i odejmujemy od tego dwakroć zróżniczkowane $g(x)=0$. Jak wyżej wynika stąd, że $\lambda_1=\lambda_2=\ldots\lambda_n=0$ i zostaje nam w $g(x)=0$ tylko $\eta+\lambda_{n+1}\cos(n+1)x=0$, co znów wymaga by $\eta=\lambda_{n+1}=0$. Wreszcie w przypadku *e*) także zakładamy, że $\eta+\lambda_1\cos x+\xi_1\sin x+\lambda_n\cos nx+\xi_n\sin nx=0$ tylko dla $\eta=\lambda_1=\xi_1=\ldots=\lambda_n=\xi_n=0$ i robimy dla $n+1$ sztuczkę z drugą pochodną, co zostawia nam $\eta+\lambda_{n+1}\cos(n+1)x+\xi_{n+1}\sin(n+1)x=0$. To też wymaga, by $\eta=\lambda_{n+1}=\xi_{n+1}=0$ (choćby na mocy tego, że teza jest prawdziwa dla $n=1$, a czymże się różni x od $(n+1)x$? - tylko dziedziną...)

Zadanie 7
Dowieść, że wektory

$$\mathbf{f}_1=\sin x,\qquad \mathbf{f}_2=\sin^3 x,\qquad \mathbf{f}_3=\sin 3x\ ,$$

z przestrzeni wektorowej $V=\mathrm{Map}(R^1,R^1)$ są liniowo zależne.
Odp.: To proste (można dać do domu)

$$\begin{aligned}\sin 3x&=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x\\&=2\sin x\cos^2 x+\sin x(1-2\sin^2 x)=3\sin x-4\sin^3 x\ .\end{aligned}$$

Czyli $\mathbf{f}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$, co dowodzi, że $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są liniowo zależne.

Zadanie 8
Dowieść, że wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej R^3.
Uwaga: jeśli w wektorach, tj. w tych kwadratowych nawiasikach, mają być tylko liczby rzeczywiste - bo tak sobie *definiujemy* tę przestrzeń - to musi to być przestrzeń wektorowa nad ciałem R^1; gdybyśmy bowiem dopuścili mnożenie wektorów przez liczby zespolone, to w nawiasikach wystąpiłyby z konieczności także liczby zespolone wbrew naszemu określeniu tej przestrzeni. W drugą zaś stronę rzecz jest możliwa: możemy sobie arbitralnie określić przestrzeń wektorową w taki sposób, że w nawiasikach mogą wystąpić także liczby zespolone, ale dopuszczać tylko kombinacje liniowe o współczynnikach rzeczywistych. W takim przypadku stosują się uwagi o bazie i wymiarze takiej przestrzeni umieszczone na końcu tego zadania.
Odp.: Trzeba pokazać, że dowolny wektor $\mathbf{w}$ można przedstawić jako kombinację liniową tych trzech, tj. w postaci $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{w}$. Niech $\mathbf{w} = [a, b, c]$. Trzeba pokazać, że układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= a, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= c, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 &= -a + b + c \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad &= a - b + c \end{aligned}$$

ma rozwiązanie. Mnożąc pierwsze równanie przez -2 i dodając je do trzeciego

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c \\ 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c \\ 2x_1 - 8x_3 &= -a - 3b + 3c \end{aligned}$$

Teraz trzecie razy -2 i dodać do drugiego. Otrzymujemy $18x_3 = a + 7b - 5c$. Czyli mamy x_3. W podobny sposób można znaleźć $18x_1 = -5a + b + 7c$ oraz $18x_2 = 7a - 5b + c$ (symetria równań!). Łatwo sprawdzić, że to dobry wynik. Skoro jest (jednoznaczne) rozwiązanie dla dowolnego wektora $\mathbf{w}$ to ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) tworzą bazę.
Uwaga: Wyjaśnijmy sobie na najprostszym przykładzie jeszcze jedną sprawę: dwa wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

rozpinają całą przestrzeń wektorową V nad ciałem R^1 składającą się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} , \qquad \text{o} \quad x_1, x_2 \in R^1 ,$$

bo dowolny taki wektor można przedstawić jako $\mathbf{w} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2$, tj. jako kombinację liniową $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ z rzeczywistymi współczynnikami. Przestrzeń ta jest zatem dwuwymiarowa, bo jej baza składa się z dwu wektorów. Te same dwa wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ nie rozpinają jednak całej przestrzeni wektorowej W, też nad ciałem R^1, składającej się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} , \qquad \text{o} \quad z_1, z_2 \in C^1 \ ,$$

bo np. wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} ,$$

nie można dostać z kombinacji linowej $x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2$ o *rzeczywistych* współczynnikach x_1 i x_2. Do tego trzeba wziąć większą bazę, np.:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} .$$

Czyli taka przestrzeń wektorowa (nad ciałem R^1) jest czterowymiarowa. Oczywiście, jeśli przestrzeń wektorowa jest nad ciałem C^1 to te cztery powyższe wektory są parami do siebie proporcjonalne ($\mathbf{e}_2 = i\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_4 = i\mathbf{e}_3$), czyli liniowo zależne. Wtedy baza ma dwa wektory i ta przestrzeń wektorowa (nad ciałem C^1) jest tylko dwuwymiarowa.

Zadanie 9

Znaleźć wymiar i jakąś bazę podprzestrzeni wektorowej $E \subset R^4$ rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} ,$$

Odp.: Ponieważ R^4 ma wymiar 4, zatem przynajmniej jeden z tych wektorów musi być liniowo zależny od pozostałych. Odrzućmy ostatni (bo ma brzydkie liczby). Aby zobaczyć, czy pierwsze cztery są liniowo zależne spróbujmy (trochę na "chybił -trafił") zapisać czwarty jako kombinację liniową trzech pierwszych, tj. jako $\mathbf{v}_4 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$. To daje układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1 \ , \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \ , \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1 \ , \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Weźmy trzy pierwsze na razie. Odjąć od trzeciego pierwsze. To da $x_2 = 4x_3$. Wstawiamy to do dwu pierwszych i mamy układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 15x_3 &= -1 \ , \\ x_1 + 11x_3 &= 1 \ . \end{aligned}$$

To łatwo rozwiązać (drugie razy dwa i odjąć od pierwszego). Stąd mamy jako rozwiązanie układu trzech pierwszych równań

$$x_1 = -\frac{26}{7}\ , \qquad x_2 = \frac{12}{7}\ , \qquad x_3 = \frac{3}{7}\ .$$

Teraz możemy sprawdzić ostatnie

$$-\frac{26}{7} + 2 \cdot \frac{12}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = -1\ .$$

(Cztery równania na trzy zmienne - trzeba mieć szczęście żeby tak się udało!!) To dowodzi, że cztery pierwsze wektory są liniowo zależne bo

$$-\frac{26}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{12}{7}\mathbf{v}_2 + \frac{3}{7}\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = 0\ .$$

Zarazem z jednoznaczności tego rozwiązania wynika, że jak byśmy wzięli którekolwiek dwa wektory z $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ to się nie uda, tzn. $\mathbf{v}_4$ nie jest kombinacją liniową tylko dwu z nich. Zatem wymiar podprzestrzeni E jest równy conajmniej 3. Skoro jednak się okazało, że z czterech wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ tylko trzy są liniowo niezależne, to trzeba wrócić i zapytać, czy nie jest w takim razie możliwe dołączenie $\mathbf{v}_5$, tzn. trzeba sprawdzić czy układ wektorów $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$, nie jest przypadkiem liniowo niezależny. Jeśli jest, to $\mathbf{v}_5$ się powinnien dać zapisać jako $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_3 + x_3\,\mathbf{v}_4$. Sprawdźmy to:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 2\ , \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 3\ , \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &= 7\ , \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &= -2\ . \end{aligned}$$

Najpierw rozwiązujemy pierwsze trzy: od pierwszego trzecie da $4x_3 = -5$, czyli $x_3 = -\frac{5}{4}$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= \frac{7}{4}\ , \\ 2x_1 - x_4 &= \frac{23}{4}\ . \end{aligned}$$

Dodanie stronami da $x_1 = \frac{10}{4}$ i wtedy z pierwszego wyżej $x_4 = \frac{7}{2} - \frac{10}{4} = -\frac{3}{4}$. Łatwo sprawdzić, że to jest dobre rozwiązanie trzech pierwszych równań. Sprawdzamy teraz ostatnie, czwarte: $x_1 + 3x_3 + x_4 = \frac{10}{4} - 3 \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} = -2$. Czyli to czwarte też jest wtedy spełnione! Zatem ostatecznie $\mathbf{v}_5$ jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, i $\mathbf{v}_4$ czyli jest od nich liniowo zależny. Ponieważ już wiemy, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, i $\mathbf{v}_4$ też są liniowo niezależne, więc bazę podprzestrzeni E mogą tworzyć wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$.

Zadanie 10
Znaleźć sumę prostą i przecięcie dwu podprzestrzeni w R^3 rozpinanych przez dwa zbiory wektorów:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} ,$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} .$$

Odp.:. Najpierw znajdziemy ich sumę prostą. Jeśli 3 wektory V (lub W) są liniowo niezależne, to rozpinają całą R^3 i $V = R^3$ ($W = R^3$) i wtedy w oczywisty sposób $V \oplus W = R^3$. Sprawdźmy więc liniową niezależność wektorów z V. Układ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \ , \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \ , \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \ , \end{aligned}$$

ma jak łatwo sprawdzić tylko rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, zatem rzeczywiście $V = R^3$ i $V \oplus W = R^3$. Jeśli zaś chodzi o W to gołym okiem widać, że $\mathbf{w}_3 = -\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2$, więc podprzestrzeń W jest tylko dwuwymiarowa i jest rozpinana np. przez $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$. Ponieważ $V = R^3$ to przecięcie V z W, tj. poprzestrzeń utworzona przez wyktory takie,że należą one jednocześnie do V i do W jest samą podprzestrzenią W (bo $W \subset V = R^3$).

Zadanie 11
Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $E \subset R^4$ rozpiętej przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Znaleźć także ogólną postać wektora z E. Odp.: Znów zobaczmy, czy się da przedstawić $\mathbf{w}_4$ w postaci $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3$. Aby się dało musi być spełniony układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 1 \ , \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \ , \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \ , \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \ . \end{aligned}$$

Rozwiążmy trzy pierwsze, a potem sprawdzimy ostatnie. Drugie minus pierwsze daje $x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1$. To do trzeciego i mamy razem z pierwszym układ (kolejny!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \ , \\ \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 &= 2 \ . \end{aligned}$$

Stąd już łatwo i mamy jako rozwiązanie trzech pierwszych

$$x_1 = 2 \ , \qquad x_2 = -1 \ , \qquad x_3 = 0 \ .$$

(Łatwo sprawdzić, że to rozwiązuje trzy pierwsze równania). Teraz sprawdzamy czwarte:

$$2 \cdot (4) - 1 \cdot (1) + 0 \cdot (3) = 7 \ .$$

Hurra! Znów się udało! Czyli $\mathbf{w}_4$ jest liniowo zależny od $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$: $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$. Co więcej znów rozwiązanie jest jednoznaczne, więc wszystkie trzy, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, są już liniowo niezależne. Zatem wymiar $\dim E = 3$, a jej bazą mogą być te trzy wektory.

Oczywiście dowolny wektor należący do E ma postać

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \ .$$

Na użytek zadania 13 wygodnie będzie przedstawić ten wektor tak, że trzy jego pierwsze składowe będą dowolne, a czwarta będzie się wyrażała przez trzy pierwsze. W tym celu zastępujemy w drugim i trzecim wierszu $x_1 + x_2$ przez a, tak by znikło z nich x_1

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a - x_2 + 2x_3 \\ 3a + x_3 \\ 4a - 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \ .$$

W następnym kroku zastępujemy $3a + x_3$ przez c a w drugim i czwartym wierszu zastępujemy x_3 przez $c - 3a$. W ten sposób

$$\begin{bmatrix} a \\ -4a + 2c - x_2 \\ c \\ -5a + 3c - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \ .$$

Wreszcie, w drugim wierszu zastępujemy $-4a + 2c - x_2$ przez b, a w czwartym zamiast x_2 dajemy $-4a + 2c - b$. W ten sposób postaś wektora z E jest taka

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3b - 3c \end{bmatrix} \ .$$

Zadanie 12

Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $F \subset R^4$ rozpiętej przez wszystkie wektory postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \ , \qquad \begin{matrix} 2y - 2z - t = 0 \\ x - 4y + 4z + 2t = 0 \end{matrix} \ .$$

Odp.: dwa razy pierwszy warunek plus drugi da $x = 0$. Z pierwszego zaś mamy, że $t = 2y - 2z$. Wektory rozpinające E są więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y-2z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \equiv y\,\mathbf{e}_1 + z\,\mathbf{e}_2 \ .$$

Wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ są ewidentnie liniowo niezależne. Zatem $\dim F = 2$ i jej bazą mogą być $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

Zadanie 13

Znaleźć wymiar i bazę sumy oraz przecięcia podprzestrzeni E z zadania 11 i F z zadania 12.

Odp.: Jeden z pięciu wektorów

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

rozpinających $E \oplus F$ musi być liniowo zależny od pozostałych. Wyrzućmy pierwszy bo najbardziej skomplikowany. Zobaczmy następnie, czy $\mathbf{w}_2$ się da zapisać jako kombinacja liniowa $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$. Gołym okiem widać, że się nie da. Co więcej, łatwo sprawdzić, że równanie $x\,\mathbf{w}_3 + y\,\mathbf{w}_4 + z\,\mathbf{w}_5 = 0$ ma tylko rozwiązanie $x = y = z = 0$. Zatem $E \oplus F = R^4$ bo jest rozpinana przez cztery wektory $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$, które można przyjąć za jej bazę.

Teraz przecięcie E i F. Tworzą je wektory należące i do E i do F. Oznacza to, że wektory te muszą się dać jednocześnie przedstawić w dwu postaciach

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3(b-c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y-2z \end{bmatrix} .$$

Widać, że aby tak było musi być $a = 0$, $b = y$, $c = z$ i do tego jeszcze musi zachodzić równość $7a + 3(b-c) = 2(y-z)$. Ale skoro $a = 0$, $b = y$, $c = z$ to może tak być tylko dla $b = c$. Zatem ogólną postacia wektora należącego do przecięcia podprzestrzeni E i F jest

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Zatem przecięcie E i F jest podprzestrzenią jednowymiarową rozpinaną przez jakikolwiek wektor powyższej postaci (np. z $b = 1$).

Zadanie 14
Pokazać, że podprzestrzeń liniowa $E \subset R^4$ złożona z wektorów postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} 3z - 4t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{array},$$

jest rozpinana przez dwa wektory.
Odp.: Warunki są dwa na cztery składowe. Weźmy x i z jako niezależne. Wtedy $t = \frac{3}{4}z$ oraz (po wstawieniu tego do drugiego warunku) $x - y + \frac{7}{4}z = 0$, czyli $y = x + \frac{7}{4}z$. Zatem każdy wektor z E musi mieć postać

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 15
Pokazać, że podprzestrzeń E rozpięta przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ postaci

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zawiera wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix},$$

oraz, że wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ rozpinają tę samą podprzestrzeń E.
Odp.: Najpierw trzeba pokazać, że równania $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1$ oraz $y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + y_3\,\mathbf{v}_3 + y_4\,\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_2$ mają rozwiązania. Pierwsze daje układ równań

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \,, \\ ix_2 - ix_3 \qquad &= i \,, \\ 2x_1 \quad + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3 \,, \\ ix_1 + (1-i)x_2 \qquad + x_4 &= 1 \,. \end{aligned}$$

Z drugiego $x_2 - x_3 = 1$, czyli $x_2 = 1 + x_3$. To do pozostałych trzech, co da układ

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \,, \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \,, \\ ix_1 + (1-i)x_3 + x_4 &= i \,. \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $x_1 = 1 - x_4$. To do pierwszego i trzeciego

$$\begin{aligned} 2(x_3 + x_4) &= 0 \ , \\ (1-i)(x_3 + x_4) &= i \ . \end{aligned}$$

Czyli da się przedstawić $\mathbf{w}_1$, z tym, że nie w sposób jednoznaczny. To oznacza, że same wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne (czyli $\dim E < 4$). Istotnie, widać, że $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem by dowieść, że $\mathbf{w}_2 \in E$ wystarczy pokazać, że $\mathbf{w}_2 = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$. Widać, że $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ po prostu. Ogólniej, można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) \ , \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \xi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) \ , \end{aligned}$$

dla dowolnych λ i ξ ponieważ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = 0$. Stąd dla $\lambda = -1$ uzyskujemy związek

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3 \ .$$

Następnie kładąc $\lambda = 1$, $\xi = 2$ ($\lambda = 1$, $\xi = 1$) i odejmując od drugiego pierwsze (od pierwszego drugie) dostajemy dwa układy równań

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \ , \\ \mathbf{w}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4 \ , \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \ , \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \ . \end{aligned}$$

Z pierwszego układu, odejmując pierwsze od drugiego otrzymujemy

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3 \ ,$$

gdzie w drugim kroku wykorzystany został otrzymany już wyżej związek $\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3$. Z drugiego układu zaś, odejmując od pierwszego drugie, dostajemy

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \ .$$

Tak więc możemy wyrazić $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ przez $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3 \ , \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3 \ , \end{aligned}$$

(co łatwo sprawdzić). Zatem każdy wektor postaci $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \in E$ można napisać jako

$$\alpha(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3) + \gamma\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{w}_1 + (\beta - \alpha)\mathbf{w}_2 + (\alpha - \beta + \gamma)\mathbf{w}_3 \ .$$

Zatem wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{v}_3$ także rozpinają E.

Zadanie 16
W pewnej bazie w R^3 wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ mają współrzędne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pokazać, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ są także bazą tej przestrzeni i podać w tej nowej bazie współrzędne wektora $\mathbf{w}$, który w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 9, 14)$.
Odp.: Niech wyjściową bazą będą wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Odejmijmy pierwsze od drugiego:

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \ .$$

To do dwu pozostałych:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \ , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \ . \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \ , \\ \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 &= 3\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ . \end{aligned}$$

Od drugiego pierwsze oraz od dwa razy pierwszego drugie. Razem więc mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \ , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ , \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \ . \end{aligned}$$

Udało się jednoznacznie wyrazić trzy (z założenia) liniowo niezależne wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, co oznacza, że te drugie też są liniowo niezależne, czyli też mogą być bazą przestrzeni. Możemy teaz przerobić wektor $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= 6\,\mathbf{e}_1 + 9\,\mathbf{e}_2 + 14\,\mathbf{e}_3 \\ &= 6\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + 9\,(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 14\,(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3 \ , \end{aligned}$$

czyli współrzędne $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ to $(1, 2, 3)$. Zapiszmy to przez macierz zmiany bazy. Niech

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Mnożenia "paluchowe" podrazumywajetsia. Stojąca tu macierz R_v jest tzw. *macierzą zmiany bazy* lub *macierzą przejścia*; dokładniej, jest to macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$ do bazy $\mathbf{v}_i$, $i = 1,2,3$. Stosując konwencję sumacyjną wujka A.E. można powyższy wzór z macierzą zapisać jako $\mathbf{e}_k = \mathbf{v}_j (R_v)^j{}_k$. Konwencja polega na niepisaniu w prawej stronie sumy po wartościach wskaźnika j od 1 do 3. Jawnie wzór ten mówi, że np. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 (R_v)^1{}_1 + \mathbf{v}_2 (R_v)^2{}_1 + \mathbf{v}_3 (R_v)^3{}_1$, gdzie $(R_v)^1{}_1 = 1$, $(R_v)^2{}_1 = 1$, $(R_v)^3{}_1 = -1$, etc.

Jeśli teraz napiszemy wektor $\mathbf{w}$ w postaci $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w^i_{(e)}$ (indeksik e u $w^i_{(e)}$ ma przypominać że $w^i_{(e)} = (6,9,14)$ to są współrzędne w bazie $\mathbf{e}_i$) to będziemy mieć:

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w^i_{(e)} = \mathbf{v}_k (R_v)^k{}_i w^i_{(e)} \equiv \mathbf{v}_k w^i_{(v)} \ .$$

gdzie $(R_v)^k{}_i$ jest macierzą zmiany bazy, a $w^i_{(v)} = (R_v)^k{}_i w^i_{(e)}$ jawnie wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} w^1_{(v)} \\ w^2_{(v)} \\ w^3_{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Zadanie 17

Jak w zadaniu 16 tylko teraz

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{w}$ w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 2, -7)$.

Odp.: Znów piszemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\,\mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{v}_2 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - 5\,\mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Trzecie dodać do pierwszego, a potem dwa razy trzecie do drugiego

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 &= 5\,\mathbf{e}_1 - 3\,\mathbf{e}_3 \ , \end{aligned}$$

Teraz pierwsze razy 3, drugie razy 2 i odjąć, oraz pierwsze razy 5, a drugie razy 3 i odjąć:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ , \\ \mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ . \end{aligned}$$

Do tego jeszcze

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{e}_3 \\ &= (-3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_3 + (-5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\ &= -8\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ . \end{aligned}$$

Razem więc

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ , \\
\mathbf{e}_2 &= -8\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ , \\
\mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ .
\end{aligned}$$

Czyli macierz R_v zmiany bazy to

$$R_v = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

a współrzędne $w^i_{(v)}$ wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$ to

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Zadanie 18
Sprawdzić, że wielomiany

$$\mathbf{w}_1 = x + 1 \ , \qquad \mathbf{w}_2 = x - 1 \ , \qquad \mathbf{w}_3 = x^2 + x \ ,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia nie większego niż dwa i znaleźć współrzędne w tej bazie wielomianu $\mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1$.
Odp.: Trzeba sprawdzić, że $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ są liniowo niezależne, czyli, że równość

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_3 \mathbf{w}_3 = 0 \ ,$$

dla wszystkich wartości x zachodzi tylko gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. To widać: równość

$$\lambda_1(x + 1) + \lambda_2(x - 1) + \lambda_3(x^2 + x) = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3 x^2 = 0 \ ,$$

wymaga by $\lambda_3 = 0$, oraz $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A to rzeczywiście tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Czyli są liniowo niezależne, a zatem tworzą bazę. Chcemy teraz napisać

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1 &= \mathbf{w}_1 v^1 + \mathbf{w}_2 v^2 + \mathbf{w}_3 v^3 \\
&= (x + 1)v^1 + (x - 1)v^2 + (x^2 + x)v^3 \ .
\end{aligned}$$

Czyli $v^3 = 2$ oraz $v^1 + v^2 + v^3 = 3$ i $v^1 - v^2 = 1$. Stąd $v^1 = 1$, $v^2 = 0$. Istotnie

$$1 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x^2 + x) = 2x^2 + 3x + 1 \ .$$

Zadanie 19
W bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, mają składowe (współrzędne) $(1,2,1)$, $(2,3,3)$ oraz $(3,8,2)$, zaś wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ mają w tejże samej bazie składowe $(3,5,8)$, $(5,14,13)$ i $(1,9,2)$. Sprawdzić, że trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ lub trzy wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ także tworzą dwie inne bazy tej samej przestrzeni i znaleźć macierz przejścia z jednej z nich do drugiej.
Odp.: mamy

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ ,\\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \ ,\\ \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \ ,\end{aligned}$$

Drugie od 2×pierwszego: $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, czyli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. To do pierwszego i trzeciego:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \ ,\\ \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 2(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \ ,\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \ ,\\ 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 \ ,\end{aligned}$$

Teraz pierwsze $\times 3$ od drugiego i mamy $\mathbf{e}_2 = -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3(-5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \ ,\\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \ .\end{aligned}$$

Reasumując:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= 18\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 \ ,\\ \mathbf{e}_2 &= -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ ,\\ \mathbf{e}_3 &= -7\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ .\end{aligned}$$

W podobny sposób można wyrazić $\mathbf{e}_i$ także przez $\mathbf{w}_j$, ale już nie będziemy tu tego robić (w zasadzie trzeba by, aby dowieść, że $\mathbf{w}_j$ też są bazą). Mamy teraz (w konwencji sumacyjnej):

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_l \left(R_v\right)^l{}_j \ , \qquad \mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j \left(R_w^{-1}\right)^j{}_i \ ,$$

gdzie R_v jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{v}_l$, którą odczytujemy ze wzorów wyrażających wektory $\mathbf{e}_j$ przez wektory $\mathbf{v}_l$, a macierz R_w^{-1} jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{w}_i$ do bazy $\mathbf{e}_j$, odwrotną do macierzy R_w przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{w}_i$ (której tu nie wyliczyliśmy). Łącząc te wzory otrzymujemy

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_l \left(R_v\right)^l{}_j \left(R_w^{-1}\right)^j{}_i \ .$$

Zatem jeśli $\mathbf{V} = \mathbf{w}_i\, V^i_{(w)}$, to $\mathbf{V} = \mathbf{v}_l\, V^l_{(v)}$, gdzie $V^l_{(v)} = (R_v)^l{}_j\, (R_w^{-1})^j{}_i\, V^i_{(w)}$, przy czym

$$R_v R_w^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 14 & 9 \\ 8 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} .$$

Zadanie 20
Znaleźć współrzędne (składowe) wektora

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

w bazie

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Następnie znaleźć macierze przejścia z bazy $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ do bazy “kanonicznej”

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

i z powrotem. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v}$ w bazie kanonicznej.
Odp.: Trzeba rozwiązać układ $\mathbf{v} = x\,\mathbf{f}_1 + y\,\mathbf{f}_2 + z\,\mathbf{f}_3 + t\,\mathbf{f}_4$:

$$\begin{aligned} x + t &= 5 , \\ -x + y &= 1 , \\ -y + z &= 1 , \\ -z + t &= 1 . \end{aligned}$$

To się łatwo rozwiązuje bo z trzech ostatnich $t = 1 + z = 1 + 1 + y = 2 + 1 + x = 3 + x$. Czyli $2x + 3 = 5$ i $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$. Współrzędnymi $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ są liczby $(1, 2, 3, 4)$.

Teraz zmiana bazy. Mamy oczywisty związek $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j (R_f^{-1})^j{}_i$, czyli jawnie

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aby mieć to samo w drugą stronę trzeba albo odwrócić stojącą tu macierz (czego jeszcze nie umiemy), albo po prostu rozwiązać cztery równania (na szczęście są one proste). Pierwsze z nich, $\mathbf{e}_1 = x_1\,\mathbf{f}_1 + y_1\,\mathbf{f}_2 + z_1\,\mathbf{f}_3 + t_1\,\mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_1 + t_1 &= 1\ , \\ -x_1 + y_1 &= 0\ , \\ -y_1 + z_1 &= 0\ , \\ -z_1 + t_1 &= 0\ , \end{aligned}$$

którego jednoznacznym rozwiązaniem są $x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = \frac{1}{2}$ (widać gołym okiem, że to jest ok.). Drugie, $\mathbf{e}_2 = x_2\,\mathbf{f}_1 + y_2\,\mathbf{f}_2 + z_2\,\mathbf{f}_3 + t_2\,\mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_2 + t_2 &= 0\ , \\ -x_2 + y_2 &= 1\ , \\ -y_2 + z_2 &= 0\ , \\ -z_2 + t_2 &= 0\ , \end{aligned}$$

o rozwiązaniu $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = z_2 = t_2 = \frac{1}{2}$ (też widać, że to ok.). Trzecie $\mathbf{e}_3 = x_3\,\mathbf{f}_1 + y_3\,\mathbf{f}_2 + z_3\,\mathbf{f}_3 + t_3\,\mathbf{f}_4$, prowadzi do

$$\begin{aligned} x_3 + t_3 &= 0\ , \\ -x_3 + y_3 &= 0\ , \\ -y_3 + z_3 &= 1\ , \\ -z_3 + t_3 &= 0\ , \end{aligned}$$

i ma rozwiązanie $x_3 = y_3 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = t_3 = \frac{1}{2}$. Wreszcie, czwarte $\mathbf{e}_4 = x_4\,\mathbf{f}_1 + y_4\,\mathbf{f}_2 + z_4\,\mathbf{f}_3 + t_4\,\mathbf{f}_4$, czyli

$$\begin{aligned} x_4 + t_4 &= 0\ , \\ -x_4 + y_4 &= 0\ , \\ -y_4 + z_4 &= 0\ , \\ -z_4 + t_4 &= 1\ , \end{aligned}$$

daje $x_4 = y_4 = z_4 - \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{1}{2}$. Możemy więc napisać związek $\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_k (R_f)^k{}_j$ jawnie:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Sprawdźmy, że to jest istotnie macierz odwrotna

$$R_f \cdot R_f^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Czyli jest ok. Teraz współrzędne $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Mamy $\mathbf{v} = \mathbf{f}_i\, v^i_{(f)} = \mathbf{e}_j (R_f^{-1})^j{}_i v^i_{(f)}$ czyli $v^j_{(e)} = (R_f^{-1})^j{}_i\, v^i_{(f)}$. Jawnie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

co powinno było być od początku oczywiste.

Zadanie 21

Mamy przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 3. Definiujemy odwzorowanie F z tej przestrzeni w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 2 wzorem

$$F[W(x)] = W'(x) + x^2 W(0) + 12x \int_0^1 dt\, W(t) \; .$$

Sprawdzić, czy odwzorowanie F jest liniowe. Jeśli tak, to znaleźć jego macierz w bazach kanonicznych $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dla przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dla przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2, gdzie $\mathbf{e}_n \equiv x^n$.
Odp.: F jest liniowe bo jeśli mamy wielomian $W(x) = \alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)$ to

$$\begin{aligned} F[W(x)] = {} & \frac{d}{dx}[\alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)] + x^2[\alpha_1 W^{(1)}(0) + \alpha_2 W^{(2)}(0)] \\ & +12x \int_0^1 dt\, [\alpha_1 W^{(1)}(t) + \alpha_2 W^{(2)}(t)] \\ = {} & \alpha_1 \frac{d}{dx} W^{(1)}(x) + \alpha_1 x^2 W^{(1)}(0) + \alpha_1\, 12x \int_0^1 dt\, \alpha_1 W^{(1)}(t) \\ & +\alpha_2 \frac{d}{dx} W^{(2)}(x) + \alpha_2 x^2 W^{(2)}(0) + \alpha_2\, 12x \int_0^1 dt\, \alpha_2 W^{(2)}(t) \\ = {} & \alpha_1 F[W^{(1)}(x)] + \alpha_2 F[W^{(2)}(x)] \; . \end{aligned}$$

Teraz możemy znaleźć macierz odwzorowania F w bazach kanonicznych. Dowolny wielomian stopnia ≤ 3 jest postaci:

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_0 W^0_{(e)} + \mathbf{e}_1 W^1_{(e)} + \mathbf{e}_2 W^2_{(e)} + \mathbf{e}_3 W^3_{(e)} \equiv W^0_{(e)} + W^1_{(e)} x + W^2_{(e)} x^2 + W^3_{(e)} x^3 \; .$$

gdzie $W^i_{(e)} \in R^1$ są składowymi wielomianu $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Co F robi z wektorów bazowych?

$$\begin{aligned} F[\mathbf{e}_0] \equiv F[1] &= x^2 + 12x = 12\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \; , \\ F[\mathbf{e}_1] \equiv F[x] &= 1 + 6x = \mathbf{e}_0 + 6\mathbf{e}_1 \; , \\ F[\mathbf{e}_2] \equiv F[x^2] &= 6x = 6\mathbf{e}_1 \; , \\ F[\mathbf{e}_3] \equiv F[x^3] &= 3x^2 + 3x = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \; . \end{aligned}$$

Z liniowości F mamy więc (w konwencji sumacyjnej: powtarzające się wskaźniki są wysumowane):

$$F[\mathbf{W}] = F[\mathbf{e}_i]W^i_{(e)} = \mathbf{e}_k F^k{}_i W^i_{(e)} \ ,$$

gdzie $\mathbf{e}_k F^k{}_i = F[\mathbf{e}_i]$. Korzystając ze znalezionego wyżej działania F na wektory bazy $\mathbf{e}_i$ łatwo znajdujemy macierz $F^k{}_i$ (k numeruje wiersze, a i kolumny) odwzorowania F:

$$F^k{}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sprawdźmy jak to działa. Niech $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Działanie F na W możemy łatwo znaleźć bezpośrednio ze wzoru:

$$F[W] = 6x^2 - 6x + x^2 \cdot 7 + 12x \int_0^1 dt\,(2t^3 - 3t^2 + 7) = 72x + 13x^2 = 72\mathbf{e}_1 + 13\mathbf{e}_2 \ .$$

Współrzędnymi wielomianu-wektora $\mathbf{W}$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ są

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Działając na te współrzędne macierzą $F^k{}_i$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix} ,$$

czyli istotnie współrzędne $X^k_{(e)}$ wielomianu $X = F[W]$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Zadanie 22

Znaleźć jądro odwzorowania F z poprzedniego Zadania.

Odp.: Jądro jest to w tym przypadku podprzestrzeń liniowa przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 tworzona przez takie wielomiany W, że $F[W(x)] = 0$ (zero oczywiście rozumiane jako wielomian zerowy). Niech $W = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zobaczymy, jakie muszą byś współczynniki a_3, a_2, a_1, a_0, żeby W należał do jądra F. Zażądajmy by

$$F[W] = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0x^2 + 12x\left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0\right) = 0 \ .$$

Wymaga to, by $a_1 = 0$, $3a_3 + a_0 = 0$ oraz $3a_3 + 6a_2 + 6a_1 + 12a_0 = 0$, czyli by cztery współczynniki a_i spełniały 3 równania. Weźmy a_0 jako niezależną wielkość. Wtedy $a_3 =$

$-\frac{1}{3}a_0$ i $a_2 = -\frac{11}{6}a_0$. Zatem jądro odwzorowania F jest w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 podprzestrzenią jednowymiarową rozpiętą przez wektor o składowych

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} ,$$

w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, takiej jak w poprzednim Zadaniu. Możemy teraz skorzystać ze znalezionej tam macierzy $F^j{}_i$ odwzorowania F by sprawdzić, że istotnie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\frac{11}{6}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dla dowolnego λ.

Zadanie 23
Niech wektory $\mathbf{f}_0 = 1 + x$, $\mathbf{f}_1 = x + x^2$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + x^3$, $\mathbf{f}_3 = x^3$ będą inną bazą przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 (istotnie, można sprawdzić, że są one bazą). Znaleźć tej bazie macierz odwzorowania F
Uwaga: w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 trzymamy starą, "kanoniczną" bazę $\mathbf{e}_n = x^n$, tj. chcemy by nowa macierz odwzorowania F działając na składowe wielomianu stopnia ≤ 3 w bazie $\mathbf{f}_k$ dawała składowe odpowiedniego wielomianu stopnia ≤ 2 w bazie $\mathbf{e}_n$.
Odp.: Będziemy potrzebować macierzy przejścia R_f^{-1} z bazy $\mathbf{f}_k$ do bazy $\mathbf{e}_n$ odwrotnej do macierzy R_f przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{f}_k$. Tę pierwszą, R_f^{-1}, znajdziemy łatwo bo mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \ , \\ \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ , \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3 \ . \end{aligned}$$

Stąd

$$(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

czyli, w zapisie na wskaźniczkach, $\mathbf{f}_k = \mathbf{e}_j (R_f^{-1})^j{}_k$. Jeśli mamy teraz dany wektor (wielomian) $\mathbf{V}$ w postaci $\mathbf{V} = \mathbf{f}_j V^j_{(f)}$ (gdzie $V^j_{(f)}$ są składowymi $\mathbf{V}$ w bazie $\mathbf{f}_j$), to

$$\mathbf{V} = \mathbf{f}_k V^k_{(f)} = \mathbf{e}_j (R_f^{-1})^j{}_k V^k_{(f)} \equiv \mathbf{e}_j V^j_{(e)} \ ,$$

gdzie $V^j_{(e)} = (R_f^{-1})^j{}_k V^k_{(f)}$. Niech teraz $\mathbf{X} = F[\mathbf{V}]$. Macierz odwzorowania F zapisana w bazach kanonicznych $\mathbf{e}_n$ zarówno w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 jak i wielomianów stopnia ≤ 2 działa tak, że jeśli $\mathbf{X} = \mathbf{e}_i X^i_{(e)}$, to

$$\mathbf{e}_i X^i_{(e)} = F[\mathbf{V}] = F[\mathbf{e}_k] V^k_{(e)} = \mathbf{e}_i F^i{}_k V^k_{(e)} \ .$$

Wyrażając tu $V^k_{(e)}$ przez $V^j_{(f)}$ za pośrednictwem macierzy $(R_f^{-1})^k{}_j$ dostajemy

$$\mathbf{e}_i X^i_{(e)} = \mathbf{e}_i F^i{}_k (R_f^{-1})^k{}_j V^j_{(f)} \ .$$

Tak więc współrzędne w bazie $\mathbf{e}_i$ wielomianu $\mathbf{X}$ (otrzymywanego jako obraz wielomianu $\mathbf{V}$ przy odwzorowania liniowym F) ze współrzędnych $\mathbf{V}$ w bazie $\mathbf{f}_j$ daje nam macierz

$$F^i{}_k (R_f^{-1})^k{}_j \ .$$

Morał: Tak jak współrzędne (składowe) wektora $\mathbf{V}$ piszemy jako $V^i_{(e)}$ lub $V^i_{(f)}$, aby pamiętać, w jakiej bazie są to współrzędne, tak też i macierz odwzorowania liniowego powinniśmy opatrywać symbolami mówiącymi w jakich bazach jest ona dana. Tak więc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv F_{(e)(e)} \ ,$$

i

$$[F_{(e)(e)}]^i{}_k (R_f^{-1})^k{}_j = [F_{(e)(f)}]^i{}_j \ .$$

Jawnie macierzowo

$$F_{(e)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Sprawdźmy to na wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Zapiszmy go najpierw w bazie $\mathbf{f}_i$. W tym celu wyrażamy najpierw wektory $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{f}_j$. Idąc "od dołu" mamy: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$, etc. Łatwo więc znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 \ , \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \ , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 \ , \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 \ . \end{aligned}$$

Znaleźliśmy zatem macierz R_f

$$R_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

odwrotną do R_f^{-1}. Istotnie,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Możemy teraz rozłożyć wektor $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{f}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = 2\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_0 &= 2\mathbf{f}_3 - 3(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) + 7(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \\ &= 7\mathbf{f}_0 - 7\mathbf{f}_1 + 4\mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3 \ . \end{aligned}$$

W bazie $\mathbf{f}_i$ wielomian W ma więc składowe

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Jeśli na te składowe podziałamy macierzą $F_{(e)(f)}$ to dostaniemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix} ,$$

czyli to samo, co poprzednio (bo to co wychodzi to mają być składowe $F[\mathbf{W}]$ w tej samej bazie, co poprzednio, czyli w bazie $\mathbf{e}_i$).

Zadanie 24

Zapisać macierz odwzorowania F z poprzednich dwu zadań w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3$ dla wielomianów stopnia ≤ 3 i w bazie $\mathbf{g}_j$, $j = 0, 1, 2$ danej wzorami

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \ , \\ \mathbf{g}_1 &= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \ , \\ \mathbf{g}_2 &= 2\mathbf{e}_2 \ , \end{aligned}$$

(tj. w bazie tworzonej przez wielomiany $\mathbf{g}_0 = 1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_1 = 3x + 4x^2$ i $\mathbf{g}_2 = 2x^2$) dla wielomianów stopnia ≤ 2.

Odp.: Znów musimy znaleźć macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{g}_j$. Z trzeciego związku mamy $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{g}_2$. Z drugiego wtedy $3\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2$. W końcu

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}(\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) - \frac{3}{2}\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{g}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{g}_2 \ .$$

Ostatecznie więc mamy

$$(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

czyli $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i (R_g^{-1})^i{}_j$ oraz

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ,$$

czyli $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j (R_g)^j{}_k$. Powinno oczywiście być $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j (R_g)^j{}_k = \mathbf{e}_i (R_g^{-1})^i{}_j (R_g)^j{}_k$, czyli $(R_g^{-1})^i{}_j (R_g)^j{}_k = \delta^i{}_k$. Można to jawnie sprawdzić:

$$R_g^{-1} \cdot R_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} , = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

Podobnie powinno być $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i (R_g^{-1})^i{}_j = \mathbf{g}_k (R_g)^k{}_i (R_g^{-1})^i{}_j$, tj. $(R_g)^k{}_i (R_g^{-1})^i{}_j = \delta^k{}_j$:

$$R_g \cdot R_g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Możemy teraz zapisywać sobie związek $\mathbf{X} = F[\mathbf{V}]$ w dowolnych bazach:

$$\mathbf{e}_i X^i_{(e)} = \mathbf{e}_i [F_{(e)(e)}]^i{}_j V^j_{(e)} , \qquad \text{czyli} \qquad X^i_{(e)} = [F_{(e)(e)}]^i{}_j V^j_{(e)} ,$$

lub, wyrażając $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{g}_j$,

$$\mathbf{g}_j (R_g)^j{}_i [F_{(e)(e)}]^i{}_j V^j_{(e)} \equiv \mathbf{g}_j [F_{(g)(e)}]^j{}_j V^j_{(e)} \qquad \text{czyli} \qquad X^i_{(g)} = [F_{(g)(e)}]^i{}_j V^j_{(e)} ,$$

gdzie $[F_{(g)(e)}]^i{}_j = (R_g)^i{}_k [F_{(e)(e)}]^k{}_j$. Jawnie ($F_{(e)(e)}$ jest podana w poprzednim zadaniu):

$$F_{(g)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Można też mieć macierz odwzorowania F w bazie $\mathbf{f}_k$ dla wielomianów stopnia ≤ 3 i bazie $\mathbf{g}_j$ dla wielomianów stopnia ≤ 2. W tym celu trzeba $V^j_{(e)}$ zapisać jako $V^j_{(e)} = (R_f^{-1})^j{}_k V^k_{(f)}$, co da $[F_{(g)(f)}]^j{}_k = [F_{(g)(e)}]^j{}_l (R_f^{-1})^l{}_k$, czyli jawnie (biorąc macierz $(R_f^{-1})^l{}_k$ z poprzedniego zadania)

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Tę samą macierz $F_{(g)(f)}$ można także otrzymać z macierzy $F_{(e)(f)}$ znalezionej w poprzednim zadaniu: $[F_{(g)(f)}]^j{}_k = (R_g)^j{}_l [F_{(e)(f)}]^l{}_k$ czyli

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Sprawdźmy to wszystko na naszym wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$, który w bazie $\mathbf{e}_j$ miał składowe $(7, 0, -3, 2)$. Działając na te składowe macierzą $F_{(g)(e)}$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix} ,$$

to jest składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$. Zatem

$$F[\mathbf{W}] = 0 \cdot \mathbf{g}_0 + 24 \cdot \mathbf{g}_1 - \frac{83}{2} \cdot \mathbf{g}_2 = 24 \cdot (3x + 4x^2) - \frac{83}{2} \cdot (2x^2) = 72x + 13x^2 ,$$

tak, jak być powinno ($F[\mathbf{W}]$ jest wektorem i nie może zależeć od wyboru baz, które są czymś pomocniczym jedynie). Podobnie, działając macierzą $F_{(g)(f)}$ na znalezione w poprzednim zadaniu składowe $(7, -7, 4, -2)$ naszego wielomianu W w bazie $\mathbf{f}_j$ otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{2} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix} ,$$

czyli te same składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$.

Zadanie 25

Pewne odwzorowanie liniowe G z R^3 w R^3 jest takie, że

$$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \qquad G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} , \qquad G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

Znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazie kanonicznej

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Znaleźć także wynik działania

$$G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) .$$

Odp.: Dla porządku trzeba najpierw sprawdzić, czy wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

na których zadane jest działanie G są liniowo niezależne. Jeśli są, to rozpinają całą przestrzeń R^3 i mogą być jej bazą. W takim przypadku zadanie działania odwzorowania G na tych trzech wektorach wyznacza już działanie G na każdy wektor z przestrzeni będącej dziedziną G, bo każdy wektor z tej dziedziny można zapisać jako kombinację liniową trzech wektorów, na których działanie G jest zadane. Gdyby się okazało (ale się nie okaże), że trzy wektory $\mathbf{f}_i$, na których działanie G jest zadane są liniowo zależne, to trzeba by sprawdzić, czy takie zdefiniowanie G jest niesprzeczne, tzn. czy spełniona jest liniowość; nie dałoby się jednak wtedy znaleźć całej macierzy odwzorowania G w żadnej bazie. (Niemniej, nawet jeśli trzy wektory $\mathbf{f}_i$ nie rozpinały by całej dziedziny G, nie przekreślałoby to z góry możliwości znalezienia wartości G na podanym w zadaniu wektorze, mogłoby się bowiem okazać, że akurat ten wektor jest liniową kombinacją tych, na których G jest zadane. Dopiero, gdyby ten wektor nie był liniowo zależny od tych, na których działanie G jest zadane, druga część zadania nie mogłaby być rozwiązana). Równanie $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = 0$ daje układ równań

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \ , \\
\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \ , \\
\lambda_1 - \lambda_2 \qquad &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Z trzeciego $\lambda_2 = \lambda_1$ do pierwszego i drugiego, co da układ dwu równań $2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ oraz $3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, czyli $5\lambda_1 = 0$ etc. Widać, że jedynym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, czyli wektory $\mathbf{f}_i$ są liniowo niezależne. To samo możemy sprawdzić gdy chodzi o wektory

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

Równanie $\xi_1\mathbf{g}_1 + \xi_2\mathbf{g}_2 + \xi_3\mathbf{g}_3 = 0$ daje układ równań

$$\begin{aligned}
3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0 \ , \\
2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0 \ , \\
2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3 &= 0 \ ,
\end{aligned}$$

też ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, czyli - jak się tego kiedyś dowiemy - odwzorowanie G jest *nieosobliwe* bo przeprowadza R^3 w cała R^3 (ma więc trywialne jądro do którego należy tylko wektor zerowy). Zatem w bazach: $\mathbf{f}_i$ dla wektorów odwzorowywanych i $\mathbf{g}_j$ dla wektorów będących wynikiem odwzorowania macierz G ma postać trywialną

$$G_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Oznacza to, że jeśli $G[\mathbf{V}] = \mathbf{X}$ i $\mathbf{V} = \mathbf{f}_i V^i_{(f)}$, a $\mathbf{X} = \mathbf{g}_j X^j_{(g)}$, to macierz $G_{(g)(f)}$ daje $X^i_{(g)}$ z $V^i_{(f)}$: $X^j_{(g)} = [G_{(g)(f)}]^j{}_i V^i_{(f)}$.

Jeśli teraz $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k(R_f^{-1})^k{}_i$ to $V^k_{(e)} = (R_f^{-1})^k{}_i V^i_{(f)}$ i odwrotnie, $V^i_{(f)} = (R_f)^i{}_k V^k_{(e)}$. W podobny sposób jeśli $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_k(R_g^{-1})^k{}_i$ to $X^k_{(e)} = (R_g^{-1})^k{}_i X^i_{(g)}$ i odwrotnie, $X^i_{(g)} = (R_g)^i{}_k X^k_{(e)}$. Jeśli więc znajdziemy macierze R_g^{-1} i R_f to będziemy mogli napisać

$$X^k_{(e)} = (R_g^{-1})^k{}_i X^i_{(g)} = (R_g^{-1})^k{}_i [G_{(g)(f)}]^i{}_j V^j_{(f)} = (R_g^{-1})^k{}_i [G_{(g)(f)}]^i{}_j (R_f)^j{}_l V^l_{(e)} \equiv [G_{(e)(e)}]^k{}_l V^l_{(e)} \ .$$

Zatem $[G_{(e)(e)}]^k{}_l = (R_g^{-1})^k{}_i [G_{(g)(f)}]^i{}_j (R_f)^j{}_l$. Aby więc znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej trzeba znaleźć macierze R_g^{-1} oraz R_f. Pierwsza jest banalna, bo mamy dane wektorki $\mathbf{g}_i = F[\mathbf{f}_i]$: np. $\mathbf{g}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, etc. Stąd

$$R_g^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

Podobnie banalnie jest dana macierz R_f^{-1}:

$$R_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

ale my potrzebujemy R_f. Musimy więc rozwiązać układ równań wektorowych

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{f}_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ . \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$. Do drugiego dodać trzecie: $3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$. Dalej już łatwo:

$$3\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_1 \ , \qquad \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 \ ,$$
$$3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \ , \qquad 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3 \ .$$

Stąd: $5\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ oraz $5\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$ i teraz $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(5\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3 - 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{5}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3) \ , \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{5}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3) \ , \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{5}(3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) \ , \end{aligned}$$

czyli macierz R_f ma postać

$$R_f = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Aby sprawdzić, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach i przećwiczyć mnożenie macierzy sprawdzamy

$$R_f^{-1} \cdot R_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

W drugą stronę też można sprawdzić:

$$R_f \cdot R_f^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

No to świetnie. Zatem możemy już znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_i$: $[G_{(e)(e)}]^k{}_l = (R_g^{-1})^k{}_i [G_{(g)(f)}]^i{}_j (R_f)^j{}_l = (R_g^{-1})^k{}_i (R_f)^i{}_l$ ponieważ $[G_{(g)(f)}]^i{}_j = \delta^i{}_j$. Czyli macierzowo

$$G_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Jeśli mamy już $[G_{(e)(e)}]$ w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_1$, $i = 1, 2, 3$, to możemy łatwo znaleźć działanie G na wektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

W bazie kanonicznej ma on oczywiste składowe $(2, 0, -1)$ a zatem współrzędne (składowe) wektora $G(\mathbf{w})$ w bazie kanonicznej są dane przez

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Wspomniana wyżej nieosobliwość odwzorowania G odbija się w tym, że wyznacznik

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 ,$$

który jest różny od zera. W konsekwencji (jak się tego dowiemy) $\mathrm{Ker}(G) = \{\mathbf{0}\}$ (jądro odwzorowania jest trywialne).

Innym sposobem znalezienia $G(\mathbf{w})$ jest rozłożenie $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, na których działanie G zostało zadane, tzn. znalezienie współczynników y_i, $i = 1, 2, 3$ we wzorze

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Łatwy rachunek daje $y_1 = -\frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$, $y_3 = -\frac{7}{5}$. Zatem korzystając z liniowości odwzorowania G możemy napisać:

$$
\begin{aligned}
G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= -\frac{1}{5}G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{4}{5}G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) - \frac{7}{5}G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{7}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} ,
\end{aligned}
$$

tak jak poprzednio.

Zadanie 26
Dane są dwie macierze

$$
F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \text{i} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .
$$

Znaleźć iloczyny $F \cdot G$ i $G \cdot F$.
Odp.: Macierz F jest macierzą odwzorowania $F : R^3 \to R^1$, macierz zaś G - macierzą odwzorowania $G : R^1 \to R^3$; obie one są dane w jakichś bazach. Aby mnożenia miały sens trzeba przyjąć, że odpowiednie bazy są zgodne. W notacji wprowadzonej w poprzednich zadaniach powinno być tak

$$
\begin{aligned}
F \cdot G \equiv F_{(g')(f)} \cdot G_{(f)(g)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14) , \\
G \cdot F \equiv G_{(f')(g)} \cdot G_{(g)(f)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Macierz $F \cdot G$ jest macierzą odwzorowania z R^1 w R^1 i wtedy bazami $\mathbf{g}_i$, gdzie $i = 1$ i $\mathbf{g}'_i$ z $i = 1$ mogą np. być bazy kanoniczne R^1 [1] (ale nie muszą), a baza $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ przestrzeni R^3 w której dana jest macierz $G_{(f)(g)}$ musi być (żeby mnożenie macierzy miało sens) tą samą bazą w przestrzeni R^3, w której jest dana macierz F. Z kolei macierz $G \cdot F$ jest macierzą odwzorowania z R^3 w R^3 i żeby mnożenie miało sens nie musimy zakładać, że bazy $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ i $\mathbf{f}'_i$ z $i = 1, 2, 3$ są tą samą bazą, ale musimy założyć, że baza w przestrzeni R^1 w której dane są macierze F i G jest ta sama.
Uwaga: Odwzorowanie liniowe takie jak F z przestrzeni wektorowej (np. R^3) w przestrzeń wektorową, którą można utożsamić z ciałem (np. R^1, jak tutaj lub C^1) nazywa się *kowektorem* lub *jednoformą* (oczywiście, skoro istnieją jednoformy, to należy domniemywać, że są też i dwu- i więcej-formy; istotnie, są, i to prowadzi do teorii form różniczkowych i innych cudów matematyki z nimi związanych).

Zadanie 27
Jeśli jest to możliwe, znaleźć iloczyny $A \cdot B$ i $B \cdot A$ macierzy:

$$i) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$ii) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Odp. $i)$ Ponieważ obie macierze są kwadratowe oba mnożenia są wykonalne

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tu akurat $A \cdot B = B \cdot A$, choć naogół tak nie jest.
Odp. $ii)$ Można tylko obliczyć $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 28
Obliczyć kwadraty macierzy (tj. $A \cdot A$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odp.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Przypomnienie.
Wyznacznikiem macierzy kwadratowej (dla macierzy niekwadratowych wyznacznika nie można określić!)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

nazywamy liczbę (z ciała, z którego są elementy a_{ij} macierzy A) daną wzorem

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} \ .$$

Jest to suma $n!$ składników, z których każdy jest iloczynem n czynników będących pewnymi elementami macierzy A. $\operatorname{sgn}(\pi)$ jest znakiem permutacji π czyli $(-1)^k$, gdzie k jest równe liczbie pierestanowok potrzebnych do ustawienia ciągu liczb $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \dots, \pi(n)$ w porządku $1, 2, 3, \dots, n$.
Ważne by zauważyć, iż w każdym składniku $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(1)} \dots a_{n\pi(1)}$ sumy definiującej wyznacznik występuje po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza macierzy A.

Wygodnie jest też traktować czasem wyznacznik jak funkcję kolumn $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, n$ macierzy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \dots \mathbf{C}_n) \ ,$$

a z kolei kolumny $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, n$ traktować jak wektory z R^n

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix} , \qquad \dots \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix} .$$

Właściwości wyznacznika

- det$A$ =detA^T, gdzie macierz transponowaną A^T tworzy się z A przez odbicie elementów A symetrycznie względem diagonali wyznaczonej przez elementy a_{kk}:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

  Z tego wynika również, że wyznacznik można traktować jak funkcję wierszy $\mathbf{R}_1, \ldots,$ $\mathbf{R}_n$ macierzy A, które to wiersze też można uważać za wektory z R^n

- jeśli choć jeden wiersz lub choć jednak kolumna macierzy A składa się z samych zer to det$A = 0$

- zamiana miejscami dwu kolumn lub dwu wierszy macierzy A zmienia znak wyznacznika (wyznacznik jest całkowicie antysymetryczną funkcją kolumn i wierszy macierzy A)

$$\det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_l\ \ldots \mathbf{C}_n\right) = -\det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_l\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n\right) ,$$

  dla dowolnych $1 \le k, l \le n$

- jeśli wszystkie elementy jednej z kolumn A lub wszystkie elementy jednego z wierszy A pomnożyć przez λ to wyznacznik też ulegnie pomnożeniu przez λ

$$\det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \lambda\mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n\right) = \lambda \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n\right) ,$$

- wyznacznik jest liniową funkcją każdej z kolumn (każdego z wierszy):

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \lambda_1\mathbf{C}_k^{(1)} + \lambda_2\mathbf{C}_k^{(2)}\ \ldots \mathbf{C}_n\right) &= \lambda_1 \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k^{(1)}\ \ldots \mathbf{C}_n\right) \\ &+ \lambda_2 \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k^{(2)}\ \ldots \mathbf{C}_n\right) \end{aligned}$$

- wyznacznik nie zmienia się jeśli jedną z jego kolumn (lub wiersz) zastąpić sumą tejże kolumy (wiersza) i dowolnej innej kolumny (wiersza) pomnożonej przez dowolną liczbę

$$\det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \tilde{\mathbf{C}}_k\ \ldots \mathbf{C}_n\right) = \det\left(\mathbf{C}_1\ \ldots \mathbf{C}_k\ \ldots \mathbf{C}_n\right) ,$$

  gdzie $\tilde{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k + \sum_{j \ne k} \lambda_j \mathbf{C}_j$

W istocie rzeczy, wyznacznik znika (tj. równa się zeru) zawsze gdy wektory $\mathbf{C}_i$, $i = 1, n$ tworzące kolumny (lub wiersze) macierzy A są *liniowo zależne*.

Przykłady

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \ ,$$

co wynika z tego, że w składnikach sumy występuje tylko po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza macierzy A. Stąd wyznacznik macierzy jednostkowej jest równy zawsze 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ ,$$

bo trzeba zamienić miejscami kolumny drugą i czwartą.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

bo odejmując od czwartej kolumy dwa razy trzecię dostajemy zerową czwartą kolumnę.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 \ ,$$

gdzie w pierwszym kroku od kolumn drugiej, trzeciej i czwartej odjęliśmy pierwszą, potem wyprowadziliśmy czynnik 2 przed wyznacznik, potem od kolumn trzeciej i czwartej odjęliśmy kolumnę drugą, potem wyprowadziliśmy czynnik 3 przed etc.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \ .$$

Najpierw od kolumn drugiej, trzeciej i czwartej odjęliśmy pierwszą, a potem zauważyliśmy, że wynik wynika już z tego, iż w składnikach sumy dającej wyznacznik występuje tylko po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza. Wniosek: wyznacznik macierzy "gorno-" lub "dolno-trójkątnej"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych, bo przez dozwolone operacje na kolumnach lub wieszch (tj. operacje nie zmieniające wartości wyznacznika) można ją zawsze sprowadzić do macierzy diagonalnej.

Wzory jawne. Wyznacznik macierzy 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \ .$$

Wyznacznik macierzy 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12} \ .$$

Np.

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 \cdot 0 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 8 \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot 7 \cdot 0 = 0 \ .$$

Zerowanie się wyznacznika zawsze sygnalizuje liniową zależność jego kolumn. I istotnie: w powyższej macierzy $\mathbf{C}_3 = -\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_2$.

Przypomnienie

Minorem stopnia r macierzy A o wymiarach $n \times m$ (ważne: minory można określać także dla macierzy niekwadratowych o $m \neq n$) nazywamy wyznacznik podmacierzy $r \times r$ utworzonej z macierzy A przez skreślenie jej $n - r$ wierszy i $m - r$ kolumn.

Dopełnieniem algebraicznym A_{jk} elementu a_{jk} macierzy *kwadratowej* A o wymiarach $n \times n$ nazywamy liczbę

$$A_{jk} \equiv (-1)^{j+k} M_{jk} \ ,$$

gdzie M_{jk} jest minorem macierzy A utworzonym przez skreślenie jej j-tego wiersza i k-tej kolumny. Np. w przypadku macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

dopełnieniem algebraicznym elementu a_{13} jest

$$A_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 117 \ .$$

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy A wymiaru $n \times n$ względem j-tego wiersza

$$\det A = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + a_{j3}A_{j3} + \ldots + a_{jn}A_{jn} \ ,$$

i względem k-tej kolumny

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \ .$$

Wiersz j lub kolumna k mogą być wybrane dowolnie.

Przykład
Zastosujmy Laplace'a do macierzy górnotrójkątnej (wiemy co powinno wyjść). Rozwijamy jej wyznacznik względem ostatniego wiersza

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}M_{nn} = a_{nn}(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n-1} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} .$$

Ponieważ w ostatnim wierszu tylko element a_{nn} jest niezerowy, suma $a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + a_{n3}A_{n3} + \ldots + a_{nn}A_{nn}$ składa się tylko z ostatniego wyrazu. Następnie rozwijamy ponownie pozostały wyznacznik, względem ostatniego, $(n-1)$-ego, wiersza itd. Widać, że w rezultatcie dostaje się znany wynik, że wyznacznik macierzy górno-trójkątnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych. Można było uzyskać to samo rozwijając wyznacznik względem pierwszej kolumny (tylko żeby to przyzwoicie zapisywać, trzeba by było w każdym kolejnym kroku przenumerowywać elementy macierzy...)

Zadanie
Udowodnić, że $\det C = \det A \cdot \det B$ jeśli

$$C = \begin{pmatrix} A_{p\times p} & [0]_{p\times l} \\ [0]_{l\times p} & B_{l\times l} \end{pmatrix} \ .$$

A i B są tu macierzami wymiarów odpowiednio $p \times p$ i $l \times l$, a $[0]_{p\times l}$ i $[0]_{l\times p}$ są macierzami zerowymi wymiarów $p \times l$ i $l \times p$.
Odp.: Można posłużyć się indukcją matematyczną względem l. Dla $l = 1$, tzn. gdy macierz B składa się tylko z jednego elementu, wzór jest prawdziwy na mocy rozwinięcia Laplace'a (zastosowanego do ostatniej kolumny bądź ostatniego wiersza). Zakładamy więc, że wzór jest prawdziwy dla macierzy B wymiaru $(l-1)\times(l-1)$ i badamy przypadek

macierzy B wymiaru $l \times l$. Rozwijamy wyznacznik całej macierzy C względem ostatniego wiersza, w którym niezerowe są elementy $c_{p+1\ p+l} \equiv b_{1l}$, $c_{p+2\ p+l} \equiv b_{2l}$, $\dots$ $c_{p+l\ p+l} \equiv b_{ll}$:

$$\begin{vmatrix} A_{p\times p} & [0]_{p\times l} \\ [0]_{l\times p} & B_{l\times l} \end{vmatrix} = c_{p+1l+l}\, M^C_{p+1\ p+l} + c_{p+2l+l}\, M^C_{p+2\ p+l} + \dots + c_{p+ll+l}\, M^C_{p+l\ p+l}$$
$$= b_{1l}\, M^C_{p+1\ p+l} + b_{2l}\, M^C_{p+2\ p+l} + \dots + b_{ll}\, M^C_{p+l\ p+l} \ .$$

Każdy z minorów $M^C_{p+k\ p+l}$ $(k = 1, \dots, l)$ macierzy C jest teraz wyznacznikiem (z odpowiednim znakiem) podmacierzy o wymiarach $(p+l-1) \times (p+l-1)$, do którego stosuje się założenie indukcyjne. Na mocy tego założenia odpowiednie minory $M^C_{p+k\ p+l}$ $(k = 1, \dots l)$ macierzy C są równe odpowiednim minorom macierzy B razy wyznacznik macierzy A:

$$M^C_{p+kp+l} = \det A \cdot M^B_{kl}, \qquad k = 1, \dots l \ .$$

(łatwo zobaczyć, że czynniki znakowe w definicji minorów się zgadzają). Zatem

$$\det C = \det A \cdot \left(b_{1l}\, M^B_{1l} + b_{2l}\, M^B_{2l} + \dots + b_{ll}\, M^B_{ll}\right) = \det A \cdot \det B \ ,$$

bo wyrażenie w nawiasie jest niczym innym jak rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy B względem ostatniego jej wiersza.

Przypomnienie
Uogólnieniem rozwinięcia Laplace'a są wzory

$$a_{l1}A_{j1} + a_{l2}A_{j2} + a_{l3}A_{j3} + \dots + a_{ln}A_{jn} = \delta_{lj} \cdot \det A \ ,$$

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + a_{2k}A_{2l} + \dots + a_{nk}A_{nl} = \delta_{kl} \cdot \det A \ ,$$

w których $\delta_{lj} = 1$, gdy $l = j$ i $\delta_{lj} = 0$, gdy $l \neq j$.

Przypomnienie
Rząd $r(A)$ *macierzy* A wymiaru $m \times n$ (niekoniecznie kwadratowej), która ma n kolumn $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$: tworzących n wektorów o długości m (i elementach z ciała $K = R^1$ lub C^1) jest to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów-kolumn $\mathbf{C}_i$. Rząd macierzy jest więc to wymiar podprzestrzeni liniowej K^n rozpinanej przez kolumny $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ macierzy A.

Przykład. Rząd macierzy A (nad ciałem C^1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & i & 2+i \end{pmatrix} ,$$

jest równy 2 bo $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$.

Właściwości rzędu macierzy. Rząd macierzy A i rząd macierzy transponowanej A^T są sobie równe.

$$r(A) = r(A^T) \ .$$

(Inaczej: rząd "kolumnowy" macierzy i jej rząd wierszowy są takie same). Wynika stąd natychmiast, że

$$r\left(A_{m\times n}\right) \leq \min(m, n) \ .$$

Rząd macierzy nie zmieni się jeśli

- którąś z kolumn (lub wierszy) pomnożyć przez jakąś liczbę (z ciała) $\neq 0$
- przestawić kolumny (wiersze)
- do jednej z kolumn (wiersza) dodać kombinację liniową pozostałych kolumn (wierszy)

Zadanie. Znaleźć rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} .$$

Odp.: Dokonajmy operacji: $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2)$, $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - 2(\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2)$. Daje to

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

i natychmiast widać, że $r(A) = 2$.

Przypomnienie
Ogólny układ m równań liniowych z n niewiadomymi postaci

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &..& \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &=& b_m \ , \end{array}$$

lub, równoważnie,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} ,$$

lub, jeszcze inaczej, ale wciaż równoważnie,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} ,$$

ma rozwiązanie, czyli jest *niesprzeczny* gdy rząd macierzy rozszerzonej B układu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} ,$$

jest nie większy (mniejszy być nie może) niż rząd macierzy A układu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} ,$$

Jest to oczywiste jeśli zapisać ostatnią z podanych postaci układu równań jako równość

$$x_1\mathbf{C}_1 + x_2\mathbf{C}_2 + \ldots + x_n\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_B \ ,$$

która oznacza, że wektor-kolumna $\mathbf{C}_B$ musi się dać przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów-kolumn $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$ macierzy A. Oznacza to bowiem, że kolumna $\mathbf{C}_B$ musi być liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_i$, czyli jej dostawienie do macierzy A w celu stworzenia macierzy rozszerzonej B nie może podwyższyć rzędu macierzy.

Ogólna postać rozwiązania. Jeśli $r(B) = r(A) = r$, gdzie z konieczności $r \leq$min(n, m), tj. jeśli układ jest niesprzeczny, to w macierzy A musi się dać wybrać niezerowy minor stopnia r, tj. musi w niej istnieć podmacierz wymiaru $r \times r$ o niezerowym wyznaczniku (trzeba ją znaleźć). Załóżmy, że podmacierz ta składa się z r przecięcia r pierwszych kolumn i r pierwszych wierszy macierzy A (zawsze mozna tak przenumerować równania i zniewiadome x_i, żeby tak było). Możemy wtedy odrzucić równania, których współczynniki a_{jk} nie wchodzą do znalezionej podmacierzy $r \times r$ o niezerowym wyznaczniku (czyli przy powy:zszym założeniu, $m-r$ ostatnich równań), a zmienne, x_l, których współczynniki a_{kl} nie wchodzą do owej podmacierzy (czyli tu zmienne x_{r+1}, ..., x_n) należy uznać za dowolne (żeby to podkreślić nadajemy im nowe nazwy $x_{r+1} = \alpha_1$, ..., $x_n = \alpha_{n-r}$) i przenieść na drugą stronę równań. Następnie rozwiązujemy układ zredukowany

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}\alpha_1 + \ldots - a_{1n}\alpha_{n-r} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2r+1}\alpha_1 + \ldots - a_{2n}\alpha_{n-r} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & .. & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}\alpha_1 + \ldots - a_{rn}\alpha_{n-r} \ ,
\end{array}$$

Ten układ równań ma już rozwiązanie jednoznaczne (przy ustalonych wartościach α_1, ..., α_{n-r}) bo odpowiadająca mu macierz problemu ma rząd równy r. Co więcej, zagwarantowane jest, że odrzucone równania są również spełnione.

Wynika z tego wszystkiego, że układ m równań na n niewiadomych ma tylko jedno (jednoznaczne) rozwiązanie tylko gdy $r(A) = n$ (bo wtedy po prawej stronie powyższego układu niema żadnych dowolnych α_i. Jeśli $r(A) = r < n$, to rozwiązanie jest niejednoznaczne bo zależy od $n-r$ dowolnych stałych α_1, ..., α_{n-r}. Można to rozwiązanie wtedy zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(\mathrm{s})} \\ x_2^{(\mathrm{s})} \\ \cdot \\ x_r^{(\mathrm{s})} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(1)} \\ \tilde{x}_2^{(1)} \\ \cdot \\ \tilde{x}_r^{(1)} \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(n-r)} \\ \tilde{x}_2^{(n-r)} \\ \cdot \\ \tilde{x}_r^{(n-r)} \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

w której pierwsza kolumna jest szczególnym rozwiązaniem wyjściowego układu *niejednorodnego*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(\mathrm{s})} \\ x_2^{(\mathrm{s})} \\ \cdot \\ x_r^{(\mathrm{s})} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} ,$$

a kolejne kolumny są $n-r$ liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania *jednorodnego*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(k)} \\ \tilde{x}_2^{(k)} \\ \cdot \\ \tilde{x}_r^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad k = 1, \dots, n-r \ .$$

(w wektorze po lewej jedynka jest na $r+k$-tym miejscu). Dlatego mówimy, że przestrzeń rozwiązań wyjściowego układu równań jest $n-r$ wymiarowa.

Zadanie

Traktując p jak parametr rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2p \\ 1 \\ p \end{pmatrix} .$$

Odp.: Najpierw znajdujemy rząd macierzy A układu. W tym celu robimy najpierw $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4$ i obliczamy wyznacznik powstałej macierzy:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \ .$$

Ponieważ wyznacznik macierzy A znika, jej rząd jest mniejszy niż 4. Łatwo sprawdzić, że ma ona podmacierz 3×3 o niezerowym wyznaczniku w prawym górnym rogu:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Zatem rząd A wynosi 3. Niezerowy wyznacznik wskazanej podmacierzy oznacza także, iż kolumny $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ macierzy A są liniowo niezależne. Kolumnę $\mathbf{C}_1$ można zaś przedstawić w postaci

$$\mathbf{C}_1 = a\,\mathbf{C}_2 + b\,\mathbf{C}_3 + c\,\mathbf{C}_4 \ ,$$

gdyż jest ona od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ liniowo zależna.

Żądając teraz by rząd macierzy rozszerzonej nie był większy niż 3 moglibyśmy znaleźć wartość parametru p, dla której układ jest niesprzeczny. W tym celu trzeba by badać rząd macierzy zbudowanej z kolumn $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4\ \mathbf{C}_B)$ ale ponieważ $\mathbf{C}_1$ jest liniowo zależna od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ to wystarczyłoby badać rz ąd macierzy składającej się z kolumn $(\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4\mathbf{C}_B)$; żadanie by jej rząd był mniejszy niż 4 sprowadza się do zażądania by jej wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2p \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & p \end{vmatrix} ,$$

był równy zeru. Stąd otrzymalibyśmy wartość parametru p, dla której układ równań jest niesprzeczny. Wstawiając tę wartość p moglibyśmy następnie odrzucić czwarte równanie (jako że jego współczynniki nie wchodzą w tę podmacierz wymiaru 3×3 macierzy A, której niezerowy wyznacznik pokazał nam, że $r(A) = 3$) i przenieść $x_1 = \alpha$ na prawą stronę, tak jak to opisane jest w Przypomnieniu ogólnej metody. Zamiast jednak obliczać ten wyznacznik, po prostu zaczniemy rozwiązywać układ równań i wyjdzie nam "w praniu" dla jakiego p się to da zrobić. Ponieważ kolumna $\mathbf{C}_1$ jest liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ to jej dołączenie nie może pomóc w wyrażaniu $\mathbf{C}_B$ przez kolumny macierzy A. Dlatego możemy na razie położyć $x_1 = 0$ (albo jakąkolwiek inną wartość) i szukać rozwiązania układu

$$x_2\mathbf{C}_2 + x_3\mathbf{C}_3 + x_4\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_B\ ,$$

czyli

$$\begin{aligned} 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 &= -3 \\ 3x_3 - 2x_4 &= 2p \\ x_2 \qquad + 3x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 \qquad &= p\ . \end{aligned}$$

Rozwiążmy najpierw układ trzech ostatnich równań. Po prostych fiku-miku znajdujemy

$$x_2 = -\frac{1}{7}(2-3p)\ , \qquad x_3 = \frac{1}{7}(2+4p)\ , \qquad x_4 = \frac{1}{7}(3-p)\ .$$

Wstawiamy to teraz do pierwszego (na razie nie uwzględnionego) równania i mamy mieć

$$3\left(-\frac{2}{7}+\frac{3}{7}p\right) - 2\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{7}p\right) - 6\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{7}p\right) = -3\ ,$$

co zachodzi tylko dla $p = 1$.

Dla $p = 1$ mamy zatem jedno szczególne rozwiązanie wyjściowego układu równań

$$\begin{pmatrix} x_1^{(\mathrm{s})} \\ x_2^{(\mathrm{s})} \\ x_3^{(\mathrm{s})} \\ x_4^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} .$$

Nie jest to jednak jeszcze najogólniejsze rozwiązanie bo niewiadomych było $n = 4$, a rząd macierzy A był równy 3. Musimy do powyższego rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego dodać z dowolnym współczynnikiem jedno (bo $n - r = 1$) rozwiązanie układu jednorodnego

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Musi takowe istnieć bo $\det A = 0$. Łatwo je znajdujemy

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} .$$

Najogólniejszym zatem rozwiązaniem wyjściowego układu równań (oczywiście tylko dla $p = 1$) jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} ,$$

gdzie λ jest dowolną stałą.

Zadanie
Rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 \qquad + 7x_3 - 4x_4 &= 4 \,. \end{aligned}$$

Odp.: Najpierw badamy rząd macierzy A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} .$$

Oczywiście rząd A jest ≤ 3. Widać też, że $\mathbf{C}_4 = -4\mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_2$, ale działajmy systematycznie. Dokonajmy operacji: $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} .$$

Następnie $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} ,$$

i wreszcie $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - 3\mathbf{R}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} ,$$

Czyli rząd macierzy A jest równy 2. Rząd macierzy rozszerzonej B można zbadać podobnie, ale widać, że nie będzie on większy niż rząd A ponieważ dodana kolumna $\mathbf{C}_B$ jest proporcjonalna do $\mathbf{C}_4$ macierzy A: $\mathbf{C}_B = -\mathbf{C}_4$.
Zgodnie z ogólną teorią znajdujemy w macierzy A niezerowy minor stopnia 2 (musi taki istnieć, bo $r(A) = 2$). Jest nim np. minor powstały z macierzy 2×2 mieszczącej się w lewym górnym rogu macierzy A;

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Skreślamy zatem trzecie równanie i w zredukowanym układzie

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= -1 , \end{aligned}$$

kładziemy $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, gdzie α i β są dowolnymi stałymi. Przenosimy wyrazy z α i β na prawą stronę i rozwiązujemy układ

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 - 2\alpha + \beta \\ 2x_1 - 3x_2 &= -1 + \alpha - \beta , \end{aligned}$$

np. metodą macierzy odwrotnej

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha + \beta \\ -1 + \alpha - \beta \end{pmatrix} ,$$

skąd dostajemy

$$x_1 = 4 - 7\alpha + 4\beta$$
$$x_2 = 3 - 5\alpha + 3\beta .$$

Sprawdzamy, że ostatnie (odrzucone) równanie też jest spełnione (musi być; jest więc to sprawdzenie, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach)

$$4 - 7\alpha + 4\beta + 7\alpha - 4\beta = 4 .$$

Ostatecznie rozwiązanie można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Zapis ten czyni jawną standardową strukturę rozwiązania: jest ono sumą jakiegoś jednego szczególnego rozwiązania (pierwszy wektor po prawej stronie) pełnego niejednorodnego układu równań oraz najogólniejszego rozwiązania układu jednorodnego reprezentowanego po prawej stronie przez dowolną (z dowolnymi współczynnikami α i β)) kombinację liniową wszystkich wektorów, na których macierz A daje zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zadanie
Rozwiązać (jeśli to możliwe) układ:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \, . \end{aligned}$$

Odp.: Badamy najpierw rząd macierzy układu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Po operacjach: $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_1$ przyjmuje ona postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

gdzie w przedostatnik kroku zrobiono operację $\mathbf{C}_4 \to \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_3$, a w ostatnim $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$. Ponieważ teraz kolumny pierwsza i trzecia są wzajemnie do siebie proporcjonalne, więc rząd macierzy układu jest równy 2. Następnie sprawdzamy rząd macierzy rozszerzonej

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Po wykonaniu tych samych operacji, co poprzednio na macierzy A dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Widać, że minor stopnia 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 3 = 1 \neq 0 ,$$

z czego wniosek, że macierz rozszerzona ma rząd równy 3. Zatem układ równań jest sprzeczny, mimo iż zmiennych jest więcej (cztery) niż równań do spełnienia (trzy).

Zadanie
Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie układu równań liniowych

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 4x + 5y - 13z &= 1 . \end{aligned}$$

Odp.: Macierz tego problemu i macierz rozszerzona mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 5 & -13 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{pmatrix} .$$

Po dokonaniu operacji (tych samych na obu macierzach) $\mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3 + 3\mathbf{C}_2$, a następnie $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_2 \to \mathbf{C}_2 - 2\mathbf{C}_3$ otrzymujemy z A i B odpowiednio macierze

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Widać że pierwsza kolumna obu macierzy jest proporcjonalna do drugiej, więc rząd macierzy A jest równy 2. Obliczając zaś wyznacznik podmacierzy tworzonej przez ostatnie trzy kolumny znajdujemy $-1 - 7 + 8 = 0$, skąd płynie wniosek, że rząd macierzy rozszerzonej też jest równy 2. Zatem układ jest niesprzeczny. Aby wypisać najogólniejsze jego rozwiązanie znajdziemy najpierw najogólniejsze rozwiązanie rówananie jednorodnego

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 13\lambda_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Z pierwszego $\lambda_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_3$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} 7\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 14\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Widać, że $\lambda_3 = -7\lambda_1$, $\lambda_2 = -19\lambda_1$ spełnia te równania dla dowolnego λ_1.

Następnie szukamy jakiegoś szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego. Możemy w tym celu spróbować położyć $z = 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ 3x + 2y &= 4 \\ 4x + 5y &= 1 \ . \end{aligned}$$

skąd, dodając dwa razy pierwsze do drugiego znajdujemy $7x = 18$, a potem z pierwszego $y = 2x - 7 = -\frac{13}{7}$. Trzecie równanie jest wtedy też spełnione (co jest zagwarantowane tym, że układ jest niesprzeczny, ale dobrze to sprawdzić jawnie, bo można wtedy wykryć własne błędy rachunkowe). Najogólniejsze rozwiązanie wyjściowego układu jest sumą szczególnego rozwiązania układu niejednorodnego i ogólnego rozwiązania układu jednorodnego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ -7 \end{pmatrix} \ .$$

Ten sam wynik uzyskuje się oczywiście metodą ogólną: Minor uworzony z elementów dwu pierwszych kolumn i dwu pierwszych wierszy macierzy wyjściowego układu jest niezerowy, więc skreślamy ostatnie równanie, a "wystające" poza minor wyrazy z niewiadomą z przenosimy na drugą stronę podstawiając $z = \alpha$. Rozwiązujemy więc układ zredukowany

$$\begin{aligned} 2x - y &= 7 - 3\alpha \\ 3x + 2y &= 4 + 5\alpha \ , \end{aligned}$$

skąd mamy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 - 3\alpha \\ 4 + 5\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 - \alpha \\ -13 + 19\alpha \end{pmatrix} \ ,$$

Łatwo sprawdzić, że skreślone trzecie równanie jest też spełnione (z $z = \alpha$):

$$4 \cdot \frac{1}{7}(18 - \alpha) + 5 \cdot \frac{1}{7}(-13 + 19\alpha) - 13\alpha = 1 \ .$$

Widać że otrzymuje się tą drogą to samo rozwiązanie, co poprzednio.

Zadanie

Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie układu równań liniowych[1]

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_5 &= a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= b \\ -x_1 \qquad\qquad\qquad\quad - x_5 &= -a \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= c\ . \end{aligned}$$

Odp.: Macierz tego problemu i macierz rozszerzona mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Widać, że w obu macierzach trzeci wiersz jest tym samym co pierwszy pomnożony przez -1. Zatem rząd obu macierzy nie może być większy niż 3. W macierzy A zróbmy operacje: $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1$, co daje

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a następnie $\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Pokazuje to, że rząd macierzy A jest równy 3. Zatem macierz ta ma taki sam rząd jak macierz rozszerzona, bo (po wyzerowaniu trzeciego wiersza przez dodanie doń pierwszego) ma ona rząd nie większy niż trzy. Zatem układ ma rozwiązania. Zgodnie z ogólną metodą musimy teraz w macierzy A znaleźć niezerowy minor stopnia 3. Jest nim np. minor otrzymywany z podmacierzy utworzonej z elementów kolumn: pierwszej, drugiej i piątej i wierszy pierwszego, drugiego i ostatniego. Trzecie równanie, którego współczynniki do tej podmacierzy nie wchodzą skreślamy. Wyrazy z x_4 i x_5 z równań pierwszego, drugiego i ostatniego "wystają" poza tę podmacierz, zatem zgodnie z ogólną metodą podstawiamy w nich $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, gdzie α i β są dowolnymi stałymi i przenosimy je na drugą stronę otrzymując w ten sposób zredukowany układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_5 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= b - 2\alpha + \beta \\ x_1 - x_2 + x_5 &= c + 2\alpha - \beta\ . \end{aligned}$$

[1]Przykład jest wzięty z kultowego podręcznika Jacka Komorowskiego "Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk".

Układ ten można łatwo rozwiązać, np. stosując wzory Cramera: Wyznacznik macierzy układu jest równy $1-2-1+1=-1$, więc

$$x_1 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b-2\alpha+\beta & 1 & 1 \\ c+2\alpha-\beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b-2\alpha+\beta & 1 & 2 \\ c+2\alpha-\beta & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2a+b+c\ ,$$

$$x_2 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b-2\alpha+\beta & 1 \\ 1 & c+2\alpha-\beta & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b-2\alpha+\beta & 1 \\ 0 & c+2\alpha-\beta & 1 \end{vmatrix} = a-c-2\alpha+\beta\ ,$$

$$x_5 = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b-2\alpha+\beta \\ 1 & -1 & c+2\alpha-\beta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & b-2\alpha+\beta \\ 0 & -1 & c+2\alpha-\beta \end{vmatrix} = 3a-b-c\ .$$

Kompletne rozwiązanie można zapisać więc w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+b+c \\ a-c \\ 0 \\ 0 \\ 3a-b-c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Ma ono oczywistą strukturę: pierwszy wektor po prawej stronie jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego, a dwa następne wektory po prawej są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego.

Przypomnienie
Forma kwadratowa jest to takie odwzorowanie przestrzeni wektorowej V w R^1 lub C^1 (tj. w ciało), że

$$Q(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\, Q(\mathbf{v}) \ .$$

Forma biliniowa (dwuliniowa) jest to takie odwzorowanie $V \times V$ w ciało, że

$$\begin{aligned} B(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \lambda_1\, B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2\, B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \ , \\ B(\mathbf{v}, \eta_1\mathbf{w}_1 + \eta_2\mathbf{w}_2) &= \eta_1\, B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta_2\, B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) \ . \end{aligned}$$

Jeśli ciałem jest C^1 to zwykle - zwłaszcza z punktu widzenia fizyka - interesujące są formy półtoraliniowe, czyli takie, że

$$\begin{aligned} B(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \lambda_1^*\, B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2^* B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \ , \\ B(\mathbf{v}, \eta_1\mathbf{w}_1 + \eta_2\mathbf{w}_2) &= \eta_1\, B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta_2 B\,(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) \ . \end{aligned}$$

W gruncie rzeczy formę kwadratową można uważać za pewną formę biliniową $B(\cdot, \cdot)$ której obydwoma argumentami jest ten sam wektor: $Q(\mathbf{v}) \equiv B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$.

W ustalonej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V formie odpowiada macierz formy:

$$Q(\mathbf{v}) \equiv B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\, v^i_{(e)} v^j_{(e)} \equiv Q^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} v^j_{(e)} \ .$$

Jak zwykle opatrzyliśmy macierz $Q^{(e)}_{ij}$ superskryptem (e), aby pamiętać, że jest to macierz formy Q w bazie $\mathbf{e}_i$. Przez odpowiednią zmianę bazy macierz formy Q można zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej. Postać diagonalna macierzy formy Q nie jest jednoznaczna już choćby dlatego, że nic (dopóki w przestrzeni wektorowej V nie wprowadzi się iloczynu skalarnego) nie ustala "długości" wektorów bazy. Jednakże każda postać diagonalna danej formy Q (określonej na przestrzeni wektorowej nad ciałem R^1) ma tę samą liczbę dodatnich, ujemnych i zerowych elementów diagonalnych, tj. ma zawsze tę samą *sygnaturę* (twierdzenie Sylvestra).

Zadanie
Dana jest forma kwadratowa

$$Q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \ .$$

Stosując metodę Lagrange'a sprowadzić ją do postaci diagonalnej.
Odp.: Interpretując podany wzór tak, że $x \equiv v^1_{(e)}$, $y \equiv v^2_{(e)}$, $z \equiv v^3_{(e)}$, gdzie $v^i_{(e)}$ są składowymi wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ mamy

$$Q(\mathbf{v}) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv Q^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} v^j_{(e)} \ .$$

Zwróćmy tu uwagę na to, że elementy pozadiagonalne są połówkami odpowiednich wyrazów mieszanych w Q! Metoda Lagrange'a (szumna nazwa!) sprowadza się do sukcesywnego "zwijania do pełnego kwadratu":

$$
\begin{aligned}
Q &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \\
&= (x + 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 6z^2 - 7yz \\
&= (x + 2y + 3z)^2 - 2(y + \frac{7}{4}z)^2 + \frac{1}{8}z^2 \ .
\end{aligned}
$$

Z postaci tej odczytujemy, że w odpowiedniej bazie $\mathbf{f}_i$, którą znajdziemy poniżej, macierz formy będzie postaci

$$
Q^{(f)}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \ .
$$

Przypomnijmy, że zmianę bazy reprezentujemy pewną odwracalną macierzą R taką, że

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_i &= \mathbf{f}_j R^j{}_i & \qquad v^i_{(f)} &= R^i{}_j v^j_{(e)} \ , \\
\mathbf{f}_i &= \mathbf{e}_j (R^{-1})^j{}_i & \qquad v^i_{(e)} &= (R^{-1})^i{}_j v^j_{(f)} \ .
\end{aligned}
$$

W naszym przypadku, ponieważ wartość formy kwadratowej Q na wektorze $\mathbf{v}$ nie może zależeć od wyboru bazy, powinno być jasne, że jeśli znajdziemy taką bazę $\mathbf{f}_i$, w której składowe wektora $\mathbf{v}$ są postaci

$$
\begin{aligned}
v^1_{(f)} &= v^1_{(e)} + 2v^2_{(e)} + 3v^3_{(e)} \\
v^2_{(f)} &= \phantom{v^1_{(e)} + 2} v^2_{(e)} + \frac{7}{4}v^3_{(e)} \\
v^3_{(f)} &= \phantom{v^1_{(e)} + 2v^2_{(e)} + 3} v^3_{(e)} \ ,
\end{aligned}
$$

to będziemy mieć $Q = [v^1_{(f)}]^2 - 2[v^2_{(f)}]^2 + \frac{1}{8}[v^3_{(f)}]^2$, tj. w bazie $\mathbf{f}_i$ macierz formy będzie diagonalna. Z powyższego wzoru mamy natychmiast macierz R

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .
$$

Macierz odwrotną też łatwo znaleźć wyrażając $v^i_{(e)}$ przez $v^i_{(f)}$: $v^3_{(e)} = v^3_{(f)}$, $v^2_{(e)} = v^2_{(f)} - \frac{7}{4}v^3_{(f)}$, $v^1_{(e)} = v^1_{(f)} - 2(v^2_{(f)} - \frac{7}{4}v^3_{(f)}) - 3v^3_{(f)}$, co daje

$$
R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .
$$

Mamy teraz

$$
Q(\mathbf{v}) = Q^{(e)}_{ij} v^i_{(e)} v^j_{(e)} = Q^{(e)}_{ij} (R^{-1})^i{}_k (R^{-1})^j{}_l v^k_{(f)} v^l_{(f)} \equiv Q^{(f)}_{kl} v^k_{(f)} v^l_{(f)} \ ,
$$

czyli $Q^{(f)}_{kl} = Q^{(e)}_{ij}(R^{-1})^i{}_k(R^{-1})^j{}_l$. Macierzowo wzór ten wygląda tak:

$$Q^{(f)} = (R^{-1})^T \cdot Q^{(e)} \cdot R^{-1} \ .$$

Łatwo sprawdzić, że istotnie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -7/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \ .$$

Oczywiście można przejść np. do bazy $\mathbf{g}_i$ której wektory są proporcjonalne do wektorów bazy $\mathbf{f}_i$: $\mathbf{g}_i = \kappa_i \mathbf{f}_i$ (niema tu sumowania po i). Wtedy oczywiście $v^i_{(g)} = (1/\kappa_i)v^i_{(f)}$ i macierz formy kwadratowej Q w bazie $\mathbf{g}_i$ ma postać

$$Q^{(g)} = \begin{pmatrix} \kappa_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\kappa_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\kappa_3^2 \end{pmatrix} \ .$$

Widać że liczby na diagonali się zmienią ale nie ich znaki.

Zadanie

Sprowadzić do formy diagonalnej formę kwadratową

$$Q = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \ .$$

Odp.: Akurat tu od razu nie da się zastosować metody Lagrange'a bo - jak mówią komentatorzy meczów siatkarskich - "niema z czego uderzyć". Trzeba więc najpierw "ruszyć z posad bryłę" formy kwadratowej (a nie jak kiedyś chcieli niektórzy bryłę świata). Podstawmy zatem $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Forma przyjmie wtedy postać

$$Q = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 \ .$$

i teraz już można przejść do zmiennych $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, czyli $y_1 = z_1 - z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$. Ostatecznie więc zamiana zmiennych diagonalizująca formę kwadratową ma postać

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 &= z_3 \ , \end{aligned}$$

i w nowych zmiennych z_i forma ma postać

$$Q = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \ .$$

Postępujemy dalej jak w poprzednim zadaniu. Powyższa transformacja daje nam macierz R^{-1} zmiany bazy

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Macierz ta rzeczywiście diagonalizuje macierz formy Q:

$$(R^T)^{-1} \cdot Q \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Jeśli uznać, że $x_1 \equiv v^1_{(e)}$, $x_2 \equiv v^2_{(e)}$, $x_3 \equiv v^3_{(e)}$, są składowymi wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, to $z_1 \equiv v^1_{(f)}$, $z_2 \equiv v^2_{(f)}$, $z_3 \equiv v^3_{(f)}$, są składowymi tego samego wektora w bazie wektorów $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k (R^{-1})^k{}_i$:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Macierz odwrotną, R, też można znaleźć: wystarczy wyrazić zmienne z_i przez x_i. Wtedy $\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_k R^k{}_i$, czyli

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zadanie

Zbadać sygnaturę formy kwadratowej

$$Q = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz ,$$

w zależności od wartości parametru λ.

Odp.: Aby ustalić dla jakich wartości λ forma jest dodatnio określona, można posłużyć się metodą wyznacznikową, tj. zażądać by dodatnie były minory

$$|2| > 0 , \qquad \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} > 0 , \qquad \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} > 0 .$$

Dostaje się stąd warunki $\lambda^2 < 2$ i $\lambda^2 < \frac{5}{3}$, z których drugi jest oczywiście silniejszy. Metodą tą można jeszcze ustalić dla dla jakich wartości λ forma jest ujemnie określona, ale nie można ustalić jej sygnatury, gdy nie jest ona określonego znaku. W tym celu trzeba ją zdiagonalizować, np. metodą Lagrange'a:

$$\begin{aligned} Q &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) y^2 - \lambda yz + \frac{5}{2}z^2 \\ &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \left[y - \frac{\lambda}{2-\lambda^2}\, z\right]^2 + \left[\frac{5}{2} - \frac{\lambda^2}{4 - 2\lambda^2}\right] z^2 . \end{aligned}$$

Jeśli tylko $\lambda^2 \neq 2$, mamy stąd dodatni znak pierwszego wyrazu, dodatni (dla $\lambda^2 < 2$) bądź ujemny (dla $\lambda^2 > 2$) drugiego i znak współczynnika trzeciego wyraz wyznaczony przez

$$\frac{5}{2} - \frac{\lambda^2}{4 - 2\lambda^2} \equiv \frac{5 - 3\lambda^2}{2 - \lambda^2} .$$

Zatem dla $\lambda^2 < \frac{5}{3}$ forma ma sygnaturę $(+,+,+)$, dla $\lambda^2 = \frac{5}{3}$ sygnaturę $(+,0,+)$, dla $\frac{5}{3} < \lambda^2 < 2$ sygnaturę $(+,-,+)$ i dla $2 < \lambda^2$ znów (kolejność plusów i minusów nie gra tu roli!) sygnaturę $(+,-,+)$ (bo wprawdzie ujemny robi się współczynnik drugiego wyrazu, ale z kolei dodatni staje się współczynnik trzeciego). Przez ciągłość (cokolwiek by to pojęcie tu miało znaczyć!) wynika, że dla $\lambda^2 = 2$ sygnatura formy powinna być $(+,-,+)$. Można to ustalić wracając do przekształceń: Dla $\lambda = \pm\sqrt{2}$ mamy

$$\begin{aligned} Q &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z\right)^2 \mp 2yz + \frac{5}{2}z^2 \\ &= 2\left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{5}{2}\left(z \mp \frac{1}{5}\sqrt{2}\,y\right)^2 - \frac{1}{5}y^2 \,. \end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami.

Przypomnienie

Wektorem własnym (po ang. *eigenvector*) odwzorowania liniowego $F : V \to V$, gdzie $\dim V = n$, nazywa się taki wektor $\mathbf{w} \in V$, że

$$F(\mathbf{w}) = \lambda\,\mathbf{w} \,.$$

Liczba λ (należąca do ciała K, nad którym rozpięta jest przestrzeń wektorowa V) nazywa się wartością własną (po ang. *eigenvalue*) wektora $\mathbf{w}$ (przy odwzorowaniu F). Jeśli $[F_{(e)(e)}]^i{}_j$ jest macierzą odwzorowania F w bazie[2] $\mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3\ldots$, a $w^i_{(e)}$ są składowymi $\mathbf{w}$ w tej samej bazie to mamy wtedy

$$[F_{(e)(e)}]^i{}_j w^j_{(e)} = \lambda\, w^i_{(e)} \,.$$

czyli, zapisując to samo inaczej,

$$\left([F_{(e)(e)}]^i{}_j - \lambda\,\delta^i{}_j\right) w^j_{(e)} = 0 \,,$$

(zero po prawej stronie należy rozumieć jako wektor o zerowych składowych, czyli wektor zerowy). Powyższy wzór jest po prostu linowym, jednorodnym układem n równań na n współczynników $w^j_{(e)}$. Taki układ równań ma niezerowe rozwiązania $w^j_{(e)}$ tylko wtedy, gdy zeruje się wyznacznik jego macierzy, tj. gdy

$$W_F(\lambda) \equiv \det\left(F_{(e)(e)} - \lambda\, I\right) = 0 \,.$$

Wyrażenie po lewej stronie nazywa się *wielomianem charakterystycznym* macierzy (odwzorowania) F. Niezerowe wektory własne (może być ich więcej niż jeden; maksymalnie n), tj. rozwiązania na ich współczynniki $w^j_{(e)}$ w bazie $\mathbf{e}_j$ istnieją tylko dla tych wartości

[2]Ponieważ F odwzorowuje V w V będziemy zawsze tu przyjmować, iż obraz $F(\mathbf{v})$ wektora $\mathbf{v} \in V$ jest rozpisany w tej samej bazie co sam wektor $\mathbf{v}$. W zasadzie nic nie zabrania by obraz $F(\mathbf{v})$ był rozpisywany w bazie innej niż $\mathbf{e}_i$, lecz prowadziłoby to do niepotrzebnych komplikacji rachunkowych.

λ, dla których wielomian charakterystyczny zeruje się. Wartości własne λ odwzorowania liniowego F są więc pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$ macierzy tego odwzorowania. Wynika stąd[3] że pierwiastki wielomianu charakterystycznego nie zależą od wyboru bazy, od której zależy postać macierzy F, a są tylko zależne od samego odwzorowania. Wektory własne macierzy odpowiadające *różnym* wartościom własnym są liniowo niezależne.

Jeśli przestrzeń wektorowa V jest nad ciałem liczb rzeczywistych to możliwe są trzy różne sytuacje:

- $W_F(\lambda)$ może mieć n różnych pierwiastków rzeczywistych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Każdemu z nich odpowiada wtedy wektor własny $\mathbf{w}_i$ (tj. jedno rozwiązanie na składowe $w^i_{(e)}$) i układ tych n wektorów jest liniowo niezależny. Macierz F jest wtedy diagonalizowalna (tzn. przyjmuje postać diagonalną) w bazie tworzonej przez wektory własne $\mathbf{w}_i$ $i = 1, \ldots, n$.

- $W_F(\lambda)$ może mieć n różnych pierwiastków ale tylko r rzeczywistych, a pozostałe $n - r$ pierwiastków są parami zespolone sprzężone. Można wtedy formalnie rozszerzyć ciało R nad którym rozpięta jest przestrzeń V do ciała liczb zespolonych. Istnieje wtedy n liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy F z tym, że mają one zespolone składowe (są kombinacjami liniowymi wektorów bazy $\mathbf{e}_i$, ale z zespolonymi współczynnikami $w^i_{(e)}$). W rozszerzonej przestrzeni wektorowej macierz F jest diagonalizowalna.

- Niektóre pierwiastki $W_F(\lambda)$ (rzeczywiste, lub zespolone) są pierwiastkami wielokrotnymi: mamy wtedy r pierwiastków λ_i, $i = 1, \ldots, r$ o krotnościach n_i (oczywiście $n_1 + \ldots + n_r = n$). Dla każdej z wartości własnych może wtedy istnieć k_i, gdzie $1 \leq k_i \leq n_i$, liniowo niezależnych wektorów własnych. Macierz F jest diagonalizowalna tylko wtedy, gdy dla każdej z wartości własnych λ_i istnieje dokładnie n_i odpowiadających jej wektorów własnych. Jeśli dla choćby jednej z wartości własnych λ_i istnieje mniej wektorów własnych niż krotność tej wartości własnej, to macierz F jest niediagonalizowalna.

Jeśli od początku przestrzeń wektorowa V jest rozpięta nad ciałem liczb zespolonych, to oczywiście możliwości są dwie: macierz jest diagonalizowalna (gdy wszystkie pierwiastki $W_F(\lambda)$ są różne lub gdy, mimo występowania pierwiastków wielokrotnych, istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych) lub niediagonalizowalna (gdy $W_F(\lambda)$ ma pierwiastki wielokrotne i mniej wektorów własnych niż n).

Ważnym faktem jest *twierdzenie Cayleya-Hamiltona* głoszące, że

$$W_F(F) = 0 \ ,$$

[3]Dowód sprowadza się do zauważenia, że $\det\left(F_{(e)(e)} - \lambda I\right) = \det\left[R \cdot (F_{(f)(f)} - \lambda I) \cdot R^{-1}\right] = \det(R) \cdot \det\left(F_{(f)(f)} - \lambda I\right) \cdot \det(R^{-1}) = \det\left(F_{(f)(f)} - \lambda I\right)$, bo $\det(R^{-1}) = [\det(R)]^{-1}$.

tj., że każda macierz kwadratowa wymiarów $n \times n$ sama spełnia swoje równanie charakterystyczne. Ponieważ (nad ciałem C^1)

$$W_F(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \equiv (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{n_r} ,$$

tw. C-H można zapisać w postaci

$$\prod_{i=1}^{r} (F - \lambda_i I)^{n_i} \equiv (F - \lambda_1 I)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (F - \lambda_n I)^{n_r} = 0 .$$

gdzie I jest macierzą jednostkową $n \times n$.

Czasem użyteczne bywa też wiedzieć, że jeśli wartości własnej λ_i o krotności n_i odpowiada r_i liniowo niezależnych wektorów własnych to dodatkowo

$$(F - \lambda_1 I)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (F - \lambda_i I)^{n_i - r_i + 1} \cdot \ldots \cdot (F - \lambda_n I)^{n_r} = 0 .$$

Zazwyczaj sprawdzenie bezpośrednim rachunkiem ile dla danej wartości własnej jest wektorów własnych jest znacznie mniej pracochłonne niż dedukowanie tego z powyższej właściwości wielomianu charakterystycznego. Niemniej jest ona czasem przydatna do innych celów.

Zadanie
Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Jeśli to możliwe przejść do bazy, w której macierz odwzorowania F jest diagonalna. Obliczyć F^n, gdzie n jest liczbą naturalną
Odp.: Mamy

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2 = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) .$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego są dwa. Są one rzeczywiste i różne. Macierz jest więc diagonalizowalna nad ciałem R^1. Szukamy wektorów własnych odpowiadających $\lambda_1 = \sqrt{2}$ i $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

$$\lambda_1 = \sqrt{2} : \qquad \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ponieważ wyznacznik znika, tylko jedno z dwu wynikających stąd równań jest niezależne. Kładąc np. $a_1 = 1$ znajdujemy $b_1 = -1 + \sqrt{2}$. Podobnie dla λ_2 mamy

$$\lambda_2 = -\sqrt{2} : \qquad \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

i stąd, kładąc np. $b_2 = 1$ mamy $a_2 = 1 - \sqrt{2}$. Sprawdzamy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Oczywiście wektory własne nie są wyznaczone jednoznacznie, a tylko z dokładnością do pomnożenia przez liczbę (w przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym można dodatkowo narzucić na nie warunek unormowania).

Dana w zadaniu macierz jest oczywiście macierzą odwzorowania F w jakiejś bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, tj. powinna być oznaczona $F_{(e)(e)}$, a znalezione wektory są składowymi wektorów własnych w tej bazie. Przejdźmy teraz do bazy $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ tworzonej przez znalezione wektory własne $\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 - (1-\sqrt{2})\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = (1-\sqrt{2})\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ odwzorowania F (mogą one być bazą bo są liniowo niezależne). Mamy więc $\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j (R^{-1})^j{}_i$ czyli

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Macierz R^{-1} tworzą jak zwykle postawione "na sztorc" składowe znalezionych wektorów własnych macierzy F. Odwracamy R^{-1} by dostać macierz R

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} .$$

Sprawdzamy, że macierz $F_{(w)(w)} = R \cdot F_{(e)(e)} \cdot R^{-1}$ odwzorowania F w nowej bazie jest macierzą diagonalną:

$$\begin{aligned} F_{(w)(w)} &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} -4+4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Macierz F można teraz łatwo podnieść do n-tej potęgi pisząc

$$\begin{aligned} F^n_{(e)(e)} &= R^{-1} \cdot (R \cdot F_{(e)(e)} \cdot R^{-1})^n \cdot R = R^{-1} \cdot F_{(w)(w)} \cdot R \\ &= \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^{n/2}}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n(1-\sqrt{2})^2 & [(-1)^n-1](1-\sqrt{2}) \\ [(-1)^n-1](1-\sqrt{2}) & (-1)^n+(1-\sqrt{2})^2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

co oczywiście dla $n = 1$ daje znowu wyjściową macierz $F_{(e)(e)}$.

F^n można też znaleźć sposobem, który nie wymaga użycia macierzy diagonalizujących. W tym celu zapisujemy dowolny wektor w postaci kombinacji liniowej wektorów własnych macierzy F

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Współczynniki α i β nietrudno znaleźć:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Działamy teraz macierzą F^n na dowolny wektor

$$F^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha\, 2^{n/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta\, (-1)^n 2^{n/2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że macierz F działając na wektor własny mnoży go przez odpowiadającą mu wartość własną; działanie F^n daje wtedy n-tą potęgę wartości własnej. Mamy więc

$$\begin{aligned} F^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{2^{n/2}}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} [a+b(-1+\sqrt{2})] + (-1)^n[(1-\sqrt{2})a+b](1-\sqrt{2}) \\ (-1+\sqrt{2})[a+b(-1+\sqrt{2})] + (-1)^n[(1-\sqrt{2})a+b] \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^{n/2}}{2(2-\sqrt{2})} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n(1-\sqrt{2})^2 & [(-1)^n-1](1-\sqrt{2}) \\ [(-1)^n-1](1-\sqrt{2}) & (-1)^n+(-1+\sqrt{2})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

W ostatnim kroku zapisaliśmy ponownie wynik w postaci działania macierzy na dowolny wektor; macierz ta jest właśnie poszukiwaną macierzą F^n.

Na zakończenie sprawdźmy twierdzenie Cayleya-Hamiltona mówiące, że macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne, tj., że $W_F(F) = 0$ (zero w sensie macierzy zerowej oczywiście). Mieliśmy $W_F(\lambda) = \lambda^2 - 2$ więc $W_F(F) = F^2 - 2\,I$, czyli jawnie:

$$W_F(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tak, jak być powinno. W następnym zadaniu pokażemy, jak twierdzenie to można wykorzystać do znalezienia F^n jeszcze innym sposobem, również nie wymagającym użycia macierzy diagonalizujących.

Zadanie

Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Jeśli to możliwe przejść do bazy, w której macierz odwzorowania F jest diagonalna. Znaleźć F^n oraz e^{tF}, dla dowolnej wartości parametru $t \in R^1$.

Odp.: Mamy

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 .$$

Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są $\lambda_1 = 1 + i$ oraz $\lambda_1 = 1 - i$. Są to dwie liczby zespolone wzajemnie sprzężone (bo współczynniki wielomianu charakterystycznego są rzeczywiste). Odpowiadającymi im wektorami własnymi macierzy F są np.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ dla } \lambda_1, \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dla } \lambda_2 \ ,$$

Macierz jest diagonalizowalna nad ciałem C^1. Szukamy wektorów własnych

$$\begin{pmatrix} \mp i & 1 \\ -1 & \mp i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ponieważ wyznacznik macierzy znika, tylko jedno równanie jest niezależne. Wektory można wybrać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ dla } \lambda_1 = 1 + i \ , \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dla } \lambda_2 = 1 - i \ .$$

Wybierając jako nową bazę (*skompleksyfikowanej*) przestrzeni wektorowej wektory własne $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ macierzy $F_{(e)(e)}$ (jak zwykle przyjmujemy, że dana w zadniu macierz jest zapisana w jakiejś bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$) mamy macierz R^{-1} zbudowaną jak zwykle z postawionych "na sztorc" składowych wektorów własnych macierzy F w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} .$$

Macierz odwrotna ma postać

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} .$$

Oczywiście

$$F_{(w)(w)} = R \cdot F_{(e)(e)} \cdot R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} .$$

Posługując się macierzami R i R^{-1} łatwo podnieść F do n-tej potęgi:

$$\begin{aligned} F^n = R^{-1} \cdot [R \cdot F_{(e)(e)} \cdot R^{-1}]^n \cdot R &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+i)^n + (1-i)^n & -i(1+i)^n + i(1-i)^n \\ i(1+i)^n - i(1-i)^n & (1+i)^n + (1-i)^n \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Oczywiście dla $n = 1$ otrzymuje się, jak łatwo sprawdzić, wyjściową macierz F. Zauważmy też, że wszystkie elementy macierzy F^n są rzeczywiste, tak jak być powinno, mimo, że macierze diagonalizujące R i R^{-1} miały elementy zespolone. W podobny sposób znajdujemy e^{tF}:

$$\begin{aligned} e^{tF} = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{t(1+i)} & 0 \\ 0 & e^{t(1-i)} \end{pmatrix} \cdot R &= \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Możemy też sprawdzić że spełnione jest twierdzenie Cayleya-Hamiltona:

$$F^2 - 2F + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Twierdzenie to można wykorzystać do znalezienia F^n innym sposobem (bez posługiwania się macierzami diagonalizującymi). W tym celu rozkładamy jednowyrazowy wielomian (czyli tzw. *monomian*) λ^n na iloczyn wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$ i jakiegoś wielomianu $Q(\lambda)$ oraz resztę $r(\lambda)$, która, z uwagi na to, że $W_F(\lambda)$ jest stopnia 2, musi być wielomianem stopnia nie wyższego niż pierwszy:

$$\lambda^n = W_F(\lambda)Q(\lambda) + a\lambda + b .$$

Współczynniki reszty $a\lambda + b$ można znaleźć obliczając wartość lewej i prawej strony dla wartości własnych λ_1 i λ_2 macierzy F:

$$\begin{aligned} \lambda_1^n &\equiv (1+i)^n = a\lambda_1 + b = a(1+i) + b , \\ \lambda_2^n &\equiv (1-i)^n = a\lambda_1 + b = a(1-i) + b , \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że $W_F(\lambda_{1,2}) = 0$. Stąd

$$\begin{aligned} a &= -\frac{i}{2}\left[(1+i)^n - (1-i)^n\right] , \\ b &= \frac{i}{2}\left[(1-i)(1+i)^n - (1+i)(1-i)^n\right] , \end{aligned}$$

Mając a i b możemy teraz wyzyskać twierdzenie Cayleya-Hamiltona pisząc:

$$F^n = W_F(F)Q(F) + aF + bI = aF + bI ,$$

ponieważ $W_F(F) = 0$. Zatem

$$F^n = \begin{pmatrix} a+b & a \\ -a & a+b \end{pmatrix} ,$$

i nietrudno sprawdzić, że $a + b = \frac{1}{2}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]$, czyli otrzymujemy w ten sposób ten sam wynik co poprzednio. W taki sam sposób można znaleźć e^{tF}, tj. przyrównując

$$e^{tF} = \tilde{a}F + \tilde{b}I ,$$

i znajdując $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ przez podstawienie w miejsce F wartości własnych F.

Zadanie

Dana jest macierz F i wektor (wszystko jak zwykle w jakiejś bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$)

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Znaleźć wektory własne i wartości własne macierzy F oraz działanie e^{tF}, gdzie $t \in R^1$, na podany wektor.
Odp.: Znajdujemy jak zwykle najpierw wielomian charakterystyczny

$$W_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 \ .$$

Łatwo zauważyć, że jednym z pierwiastków $W_F(\lambda)$ jest $\lambda = 1$. Można więc wydzielić czynnik $(\lambda - 1)$:

$$W_F(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4) \ .$$

Równanie charakterystyczne ma zatem dwa pierwiastki: pojedyńczy $\lambda_1 = 4$ i podwójny $\lambda_2 = 1$. Nie jest więc jeszcze jasne, czy macierz F jest diagonalizowalna. Możemy sprawdzić twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Mamy

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \qquad F^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} , \qquad F^3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} ,$$

i w macierzowym wyrażeniu $-F^3+6F^2-9F+4I$ mamy na diagonali $-22+6\cdot 6-9\cdot 2+4\cdot 1 = 0$, a poza nią $-21 + 6\cdot 5 - 9\cdot 1 + 4\cdot 0 = 0$. Co więcej, można też zauważyć, że także $F^2 - 5F + 4I = 0$ (na diagonali: $6 - 5\cdot 2 + 4\cdot 1 = 0$, poza: $5 - 5\cdot 1 + 4\cdot 0 = 0$). Świadczy to o tym, że macierz jest jednak diagonalizowalna mimo, iż jeden z jej pierwiastków jest podwójny.

Szukamy wektorów własnych

$$\lambda_1 = 4 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dla λ_1 widać gołym okiem, że rozwiązaniem jest $a_1 = b_1 = c_1$. Dla λ_2 zaś mamy tylko jedno niezależne równanie na trzy współczynniki a_2, b_2, i c_2. Można zatem znaleźć dwa liniowo niezależne wektory własne odpowiadające podwójnemu pierwiastkowi λ_2. Możemy więc wybrać jako wektory własne

$$\lambda_1 = 4 : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \lambda_2 = 1 : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Jeśli macierz F była macierzą odwzorowania F w bazie $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ to wektory własne $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ odpowiadające λ_1 $(\mathbf{w}_1)$ i λ_2 $(\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3)$ mają następujące jawne postacie

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ , \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \ , \\ \mathbf{w}_3 &= \qquad\ \ \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \ , \end{aligned}$$

Możemy też odwrócić te związki (pierwsze po dodaniu doń trzeciego wraz z drugim da układ równań na $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, który już łatwo rozwikłać):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{3}(\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3) \ , \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{3}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3) \ , \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{3}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - 2\mathbf{w}_3) \ . \end{aligned}$$

Mamy zatem potrzebne do diagonalizacji macierze R^{-1} i R:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ ,$$

i oczywiście $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = I$ oraz $F_{(w)(w)} = R \cdot F_{(e)(e)} \cdot R^{-1}$:

$$F_{(w)(w)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Obliczymy teraz

$$e^{tF}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

(bo takie rzeczy są często potrzebne do rozwiązania równań różniczkowych). Jeśli tylko to wyrażenie jest potrzebne, można je znaleźć szybkim sposobem, który daje od razu wynik, ale nie pozwala znaleźć samej macierzy e^{tF}. W tym celu rozkładamy podany wektor na wektory własne macierzy F (tj. zapisujemy go w postaci kombinacji liniowej tych wektorów):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ,$$

(znalezienie współczynników tej kombinacji liniowej jest sprawą prostego rachunku). Następnie działamy:

$$
\begin{aligned}
e^{tF}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\,e^{tF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\,e^{tF}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\,e^{tF}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\,e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\,e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\,e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{4t}+2e^t\\e^{4t}-e^t\\e^{4t}-e^t\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Skorzystaliśmy tu z liniowości e^{tF} i tego, że e^{tF} działając na wektor własny F o wartości własnej λ daje ten sam wektor razy $e^{t\lambda}$.

Możemy też znaleźć samo e^{tF} korzystając z macierzy diagonalizujących R i R^{-1}:

$$
\begin{aligned}
e^{tF} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,F^n = R^{-1}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,(R\cdot F\cdot R^{-1})^n\right]\cdot R\\
&= \begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wymnażając macierze znajdujemy

$$
e^{tF}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{4t}+2e^t&e^{4t}-e^t&e^{4t}-e^t\\e^{4t}-e^t&e^{4t}+2e^t&e^{4t}-e^t\\e^{4t}-e^t&e^{4t}-e^t&e^{4t}+2e^t\end{pmatrix}.
$$

Alternatywną metodą jest znalezienie działania e^{tF} na dowolny wektor

$$
\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{3}(a+b+c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(2a-b-c)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(a+b-2c)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},
$$

rozłożony na wektory własne macierzy F (znalezienie współczynników tego rozkładu jest znów sprawą nietrudnego - gdy ma się już wprawę w rozwiązywaniu standardowych problemów liniowych - rachunku). Działając na obie strony e^{tF} otrzmujemy

$$
\begin{aligned}
e^{tF}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}(a+b+c)\,e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(2a-b-c)\,e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(a+b-2c)\,e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}(a+b+c)\,e^{4t}+(2a-b-c)\,e^t\\(a+b+c)\,e^{4t}+(-a+2b-c)\,e^t\\(a+b+c)\,e^{4t}+(-a-b+2c)\,e^t\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Prawą stronę możemy teraz zapisać w postaci macierzy M działającej na wektor o składowych (a,b,c): elementem M_{11} musi wtedy być współczynnik przy a w pierwszej składowej wektora stojącego po prawej stronie ostatniego wzoru, elementem M_{12} jest współczynnik przy b, etc.:

$$e^{tF}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{4t}+2e^t & e^{4t}-e^t & e^{4t}-e^t\\ e^{4t}-e^t & e^{4t}+2e^t & e^{4t}-e^t\\ e^{4t}-e^t & e^{4t}-e^t & e^{4t}+2e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\ .$$

Macierz M jest oczywiście macierzą e^{tF} taką samą jak wyżej.

Uwagi dodatkowe

Gdyby w przestrzeni wektorowej V odwzorowywanej przez F z poprzedniego zadania w siebie samą zadany był *iloczyn skalarny* $(\cdot|\cdot)$, tj. symetryczna, dodatnio określona forma dwuliniowa, taka że

$$(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}\ ,$$

pozwalająca znaleźć iloczyn dwu dowolnych wektorów $\mathbf{u}=\mathbf{e}_i u^i_{(e)}$ i $\mathbf{v}=\mathbf{e}_i v^i_{(e)}$

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v})=(\mathbf{v}|\mathbf{u})=\delta_{ij}u^i_{(e)}v^j_{(e)}\ ,$$

to moglibyśmy wybrać wektory własne $\mathbf{w}'_i$ macierzy F tak, by były one ortonormalne, tj. miały jednostkowe długości i były jeden do drugiego prostopadłe (w sensie powyższego iloczynu skalrnego):

$$(\mathbf{w}'_i|\mathbf{w}'_j)=\delta_{ij}\ .$$

Istototnie, wektor $\mathbf{w}_1$ wystarczy w tym celu podzielić przez $\sqrt{3}$: $\mathbf{w}'_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$. by mieć $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1)=1$. Podobnie dzieląc wektor $\mathbf{w}_2$ przez $\sqrt{2}$ otrzymujemy wektor $\mathbf{w}'_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$ o jednostkowej długości, który jest też prostopadły do $\mathbf{w}'_1$:

$$(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2)=1\ ,\qquad (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_1)=0\ .$$

Jednakże wektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)$ otrzymany przez podzielenie $\mathbf{w}_2$ przez $\sqrt{2}$ nie jest prostopadły do $\mathbf{w}'_2$. Aby otrzymać taki wektor trzeba zastosować procedurę zwaną *ortonormalizacją Gramma-Schmidta*, która polega na uprzednim "wycięciu" z $\mathbf{w}_3$ jego rzutów na już znalezione ortonormalne wektory $\mathbf{w}'_1$ i $\mathbf{w}'_2$. Tworzymy więc najpierw wektor

$$\mathbf{w}_3-\mathbf{w}'_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)-\mathbf{w}'_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)\ .$$

Jest on już prostopadły do $\mathbf{w}'_1$ i $\mathbf{w}'_2$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}'_1|[\mathbf{w}_3-\mathbf{w}'_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)-\mathbf{w}'_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)])&=(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)-(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)\,(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1)-(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)\,(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2)\\&=(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)-(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)=0\ .\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z liniowości iloczynu skalarnego oraz tego, że $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) = 1$, a $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2) = 0$. W podobny sposób sprawdzamy, że znika jego iloczyn skalarny z $\mathbf{w}'_2$. Wystarczy teraz za $\mathbf{w}'_3$ wziąc unormowany powyższy wektor

$$\mathbf{w}'_3 = \frac{\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}'_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3) - \mathbf{w}'_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)}{\sqrt{([\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}'_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3) - \mathbf{w}'_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)]|[\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}'_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3) - \mathbf{w}'_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3)])}} .$$

Postępując indukcyjnie w sposób jak wyżej można zawsze, jeśli dany jest w przestrzeni wektorowej V iloczyn skalarny, z danych n liniowo niezależnych wektorów utworzyć n wektorów ortonormalnych.

W przypadku wektorów własnych macierzy F z poprzedniego zadania (reprezentowanych tu przez ich składowe w bazie $\mathbf{e}_i$) mamy

$$\mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} , \qquad \mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} , \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} ,$$

przy czym wektory $\mathbf{w}'_1$ i $\mathbf{w}'_2$ są już unormowane i $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2) = 0$, a także $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3) = 0$, ale, jak łatwo obliczyć, $(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Musimy więc utworzyć wektor $\mathbf{w}'_3$ według przepisu Gramma-Schmidta:

$$\mathbf{w}'_3 = \frac{1}{N}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{N}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix} ,$$

(uwzględniliśmy już, że $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3) = 0$), gdzie

$$N^2 = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{2} .$$

Tak więc mamy ostatecznie trzy ortonormalne wektory

$$\mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} , \qquad \mathbf{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} , \qquad \mathbf{w}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} ,$$

które są nadal wektorami własnymi macierzy F. Kluczowe dla tego stwierdzenia jest to, że stworzyliśmy $\mathbf{w}'_3$ jako kombinację liniową $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, tj. tylko wektorów własnych F odpowiadających *tej samej* wartości własnej[4] $\lambda_2 = 1$.

[4]Gdyby iloczyn skalarny $(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}_3)$ nie znikał, procedura G-S spowodowałaby pomieszanie wektorów własnych i wektor $\mathbf{w}'_3$ nie byłby już wektorem własnym F. Tak się jednak zdarzyć nie mogło bo odwzorowanie F połączone z iloczynem skalarnym daje uczciwą formę kwadratową zadaną wzorem $Q(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|F(\mathbf{v}))$. Ogólniej, jeśli rzeczywista macierz F jest diagonalizowalna, to zawsze można znaleźć dla przestrzeni, w której ona działa taki iloczyn skalarny, że $(\mathbf{v}|F(\mathbf{v}))$ jest formę kwadratową i w tym iloczynie skalarnym wektory własne F odpowiadające różnym wartościom własnym są wzajemnie ortogonalne. Patrząc na to inaczej, jeśli taka macierz F jest diagonalizowalna, to istnieje iloczyn skalarny, przy którym F jest macierzą odwzorowania *samosprzężonego* (tj. symetrycznego) w takim sensie, że $(\mathbf{v}|F(\mathbf{v})) = (F(\mathbf{v})|\mathbf{v})$.

Mając nowe wektory własne $\mathbf{w}'_i$ możemy powtórzyć diagonalizację macierzy F. Mamy (teraz już w uczciwej notacji wektorowej) nową macierz R^{-1}

$$(\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} ,$$

Potrzebna do diagonalizacji F macierz R jest teraz dana "od ręki" przez transpozycję macierzy R^{-1}.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} .$$

Musi tak być, bo obie macierze R^{-1} i R są zbudowane ze składowych wektorów, które są wzajemnie ortonormalne (tj. ortogonalne i unormowane). Stąd dla $R \cdot R^{-1}$ mamy

$$\begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}'_1 & \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) & (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2) & (\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_3) \\ (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_1) & (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2) & (\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_3) \\ (\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_1) & (\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_2) & (\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

W taki sam sposób jest oczywiste, że macierze R i R^{-1} diagonalizują F

$$\begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix} \cdot F \cdot \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}'_1 & \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1 \mathbf{w}'_1 & \lambda_2 \mathbf{w}'_2 & \lambda_2 \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_1) & \lambda_2(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_2) & \lambda_2(\mathbf{w}'_1|\mathbf{w}'_3) \\ \lambda_1(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_1) & \lambda_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_2) & \lambda_2(\mathbf{w}'_2|\mathbf{w}'_3) \\ \lambda_1(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_1) & \lambda_2(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_2) & \lambda_2(\mathbf{w}'_3|\mathbf{w}'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Oczywiście wykorzystanie powyższych macierzy R i R^{-1} do znalezienia e^{tF} daje ten sam wynik, co poprzednio:

$$\begin{aligned} e^{tF} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F^n = R^{-1} \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (R \cdot F \cdot R^{-1})^n \right] \cdot R \\ = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{w}'_1 & \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow \mathbf{w}'_1 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_2 \rightarrow \\ \leftarrow \mathbf{w}'_3 \rightarrow \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{4t} + 2e^t & e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} + 2e^t & e^{4t} - e^t \\ e^{4t} - e^t & e^{4t} - e^t & e^{4t} + 2e^t \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zadanie
Zdiagonalizować formę kwadratową $Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ raz metodą Lagrange'a, a raz metodą szukania wektorów własnych jej macierzy

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Odp.: Aby wygenerować jakieś "x^2" przejdźmy najpierw do zmiennych

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 \\ x_2 &= y_1 + y_2 \\ x_3 &= y_3 \ , \end{aligned}$$

w których forma ma postać $Q = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2(y_1 - y_2)y_3 = 2(y_1 + \frac{1}{2}y_3)^2 - 2(y_2 + \frac{1}{2}y_3)^2$. Wynika stąd, że w zmiennych

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_2 &= y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 &= y_3 \ , \end{aligned}$$

forma ma postać diagonalną $Q = 2z_1^2 - 2z_2^2$. Wyrażając zmienne x_i przez z_i

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 &= z_3 \ , \end{aligned}$$

mamy macierz diagonalizującą R^{-1} (R^{-1} bo daje ona stare zmienne w funkcji nowych) - tę jedyną potrzebną do diagonalizowania formy kwadratowej. Jak łatwo sprawdzić

$$(R^{-1})^T \cdot Q \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Forma kwadratowa jest więc diagonalna w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{f}_i$ związane z wyjściową bazą $\mathbf{e}_i$ wzorem $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j[R^{-1}]^j{}_i$, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3 . \end{aligned}$$

Możemy jednak zdiagonalizować Q inaczej. Możemy uznać, że forma Q powstała z odwzorowania F połączonego z iloczynem skalarnym, takim, że w bazie $\mathbf{e}_i$, w której zadana jest macierz F ma on postać $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Przy takim iloczynie skalarnym macierz F w bazie $\mathbf{e}_i$, (czyli w naszej niekonwencjonalnej, ale za to pozwalającej izbieżać niedorozumienij notacji macierz $F_{(e)(e)}$), jest tożsama z macierzą Q:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|F(\mathbf{v})) &= v^l_{(e)}(\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j[F_{(e)(e)}]^j{}_i v^i_{(e)}) \\ &= v^l_{(e)}(\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j)[F_{(e)(e)}]^j{}_i v^i_{(e)} = \delta_{lj}[F_{(e)(e)}]^j{}_i v^l_{(e)} v^i_{(e)} \equiv Q^{(e)}_{li} v^l_{(e)} v^i_{(e)} \ . \end{aligned}$$

Ponieważ z macierzowego punktu widzenia δ_{lj} jest macierzą jednostkową, czyli nic nie zmieniającą[5] możemy diagonalizować Q szukając wektorów własnych F

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2) \ ,$$

i wartościami własnymi F są $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ oraz $\lambda_3 = 0$. Nietrudno znaleźć odpowiadające im wektory własne

$$\lambda_1 = \sqrt{2} : \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} , \qquad \lambda_1 = -\sqrt{2} : \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} , \qquad \lambda_1 = 0 : \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

Wybraliśmy je od razu tak, by były ortonormalne (ponieważ istnieją trzy różne wartości własne macierzy F, jej wektory własne są ortogonalne bez konieczności uciekania się do procedury Gramma-Schmidta). Macierz F, czyli także macierz formy kwadratowej Q jest zatem diagonalna w ortonormalnej bazie wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ macierzy F

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{w}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{w}_3 &= \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3 \ , \end{aligned}$$

która jest zupełnie inna, niż baza wektorów $\mathbf{f}_i$ znaleziona w pierwszej części zadania. W bazie wektorów własnych $\mathbf{w}_i$ mamy

$$Q^{(w)} = F_{(w)(w)} = [R^{-1}]^T \cdot F_{(e)(e)} \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Warto zauważyć, że jakkolwiek w ogólności wzory na diagonalizację formy kwadratowej i macierzy odwzorowania są inne (pierwsze diagonalizują się przez macierze $[R^{-1}]^T$ i R^{-1}, a drugie przez R i R^{-1}), to są one w tym przypadku zgodne bo $[R^{-1}]^T = R$.

[5] To co się zmienia przez macierz $\delta_{lj} = (\mathbf{e}_l|\mathbf{e}_j)$ to jest interpretacja drugiego wektora, czyli $v^l_{(e)}$: staje się on de facto kowektorem, ale nie musimy się tu tym przejmować.

Przykład ten pokazuje, że dowolność w wyborze bazy, w której forma kwadratowa jest diagonalna nie sprowadza się jedynie do przeskalowania wektorów: bazy wektorów $\mathbf{f}_i$ i $\mathbf{w}_i$ są istotnie różne; różne są też diagonalne postacie formy Q (ale oczywiście sygnatura formy jest zawsze taka sama, tak jak to gwarantuje twierdzenie Sylvestra).

Przypomnienie
Twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie niezmiennicze. Każda macierz kwadratowa (nad ciałem C^1) $F: \ V \to V$ ($\mathrm{dim}V = n$) zadaje rozkład przestrzeni wektorowej V na podprzestrznie niezmiennicze X_i:

$$V = \oplus_{i=1}^{p} X_i \ ,$$

gdzie p jest liczbą *różnych* pierwiastków równania charakterystycznego $W_F(\lambda) = 0$, przy czym $\mathrm{dim}X_i = n_i$, gdzie n_i jest krotnością i-tego pierwiastka $W_F(\lambda)$, tak że $\mathrm{dim}V = n_! + \ldots + n_p$. Przestrzenie X_i mają tę właściwość, że dla $\mathbf{v} \in X_i$ zachodzi

$$F(\mathbf{v}) \in X_i \ , \qquad \text{oraz} \qquad (F - \lambda_i I)^{n_i}\mathbf{v} = 0 \ .$$

Symbol $\oplus$ oznacza sumę prostą popdprzestrzeni X_i tj. $X_i \cap X_j = \{\mathbf{0}\}$ dla $i \neq j$; każdy wektor $\mathbf{u} \in V$ można wtedy *jednoznacznie* napisać w postaci $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_p$ gdzie $\mathbf{v}_i \in X_i$.

Zadanie
Znaleźć wartości i wektory własne macierzy

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Znaleźć F^n oraz e^{tF}.
Odp.: Równanie charakterystyczne ma postać

$$W_F(\lambda) = -(\lambda - 1)^3 = 0 \ .$$

Ma ono jeden potrójny pierwiastek ($n = 3$). Mamy

$$F - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad (F - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad (F - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Twierdzenie cayleya-Hamiltona jest więc spełnione, ale ani $(F - I)^2$ ani $F - I$ nie jest macierzą zerową, co oznacza, że macierz F nie jest z gatunku diagonalizowalnych bo nie znajdzie się trzech liniowo niezależnych wektorów własnych. Niemniej, F^n lub e^{tF} są dobrze określonymi macierzami i powinien być jakiś sposób znalezienia ich (inny od bezpośredniego podnoszenia macierzy do dowolnie wysokiej potęgi).

Rozwiązując równanie $(F-I)\mathbf{v}=\mathbf{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

znajduje się, że w rzeczy samej jest tylko jeden wektor własny

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

(czyli po prostu $F\mathbf{e_1}=\mathbf{e_1}$) odpowiadający $\lambda=1$.

By znaleźć F^n lub e^{tF} możemy wykorzystać twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie niezmiennicze, które w tym przypadku jest dość trywialne, bo $(F-I)^3$ jest po prostu macierzą zerową (jest tak dlatego, że jest tylko jedna wartość własna i cała przestrzeń V jest jedną wielką podprzestrzenią niezmienniczą; skoro więc zgodnie z twierdzeniem $(F-I)^3$ ma dawać zero na każdym wektorze z V, to musi być po prostu macierzą zerową). Dla każdego wektora $\mathbf{v}$ z V wykorzystując rozwinięcie dwumianowe Newtona możemy zatem napisać (oczywiście $\lambda=1$)

$$\begin{aligned} F^n\mathbf{v} &= [\lambda I + (F-\lambda I)]^n\mathbf{v} \\ &= \left[\lambda^n I + n\lambda^{n-1}(F-\lambda I) + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}(F-\lambda I)^2 + \dots\right]\mathbf{v} . \end{aligned}$$

Ponieważ $(F-\lambda I)^3$ zeruje się na każdym wektorze $\mathbf{v}$, wyrazy (zaznaczone kropkami), w których występują potęgi $(F-I)$ wyższe niż druga są macierzami zerowymi. Całe rozwinięcie sprowadza się więc do trzech wyrazów:

$$F^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}(F-\lambda I) + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}(F-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nietrudno obliczyć F^2, czy F^3 mnożąc bezpośrednio macierz F przez siebie i sprawdzić, że to co wychodzi, zgadza się z powyższym ogólnym wzorem.

Aby znaleźć e^{tF} postępujemy podobnie

$$e^{tF} = e^{t\lambda I}e^{t(F-\lambda I)} = e^{t\lambda}\left[I + t(F-\lambda I) + \frac{1}{2}t^2(F-\lambda I)^2 + \dots\right] .$$

Znów, ponieważ $(F-\lambda I)^3$ i wyższe potęgi są zerują się na każdym wektorze z V, wyrazy zaznaczone kropkami nic nie wnoszą. Otrzymujemy więc ($\lambda=1$)

$$e^{tF} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t+\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Na zakończenie tego zadania należy podkreślić, że wykorzystany tu trick

$$e^{A+B} = e^A \, e^B \ ,$$

nie jest (!!!) prawdziwy dla dowolnych dwu macierzy A i B. Jest on jednak prawdziwy dla macierzy $A = \lambda I$, która jest *przemienna (komutuje)* z dowolną macierzą B, tzn. spełnia $[A, B] \equiv A \cdot B - B \cdot A = 0$.

Zadanie

Dana jest macierz F i wektor $\mathbf{u}$ (wszystko jak zwykle w jakiejś bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$):

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \ , \qquad\qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ .$$

Znaleźć działanie e^{tF} na podany wektor.

Odp.: Wielomian charakterystyczny ma jeden łatwy do zgadnięcia pierwiastek $\lambda = 1$:

$$W_F(\lambda) = -\lambda^2 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \ .$$

Mamy więc dwa pierwiastki $W_F(\lambda)$: pojedyńczy $\lambda_1 = 2$ i podwójny $\lambda_2 = 1$. Wektor własny dla $\lambda_1 = 2$ można wybrać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

(jest on jednoznaczny z dokładnością do mnożenia przez liczbę). Szukając wektora własnego odpowiadającego $\lambda_2 = 1$ mamy

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Dwa z tych równań są niezależne (inaczej niż w przykładzie z diagonalizowalną macierzą, która też miała pierwiastek podwójny) i wyznaczają ten wektor z dokładnością do mnożenia przez liczbę, np.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Szukamy teraz drugiego wektora pierwiastkowego odpowiadającego $\lambda_2 = 1$: powinien być on taki, że działanie nań $(F - I)^2$ daje zero, tj.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Jak widać, tylko jedno z otrzymywanych z tego warunku równań jest niezależne. Nie wyznaczają więc one tego wektora jednoznacznie, co jednak nie jest zaskoczeniem: podprzestrzeń niezmiennicza dla $\lambda_2 = 1$ jest dwuwymiarowa (bo $\lambda_2 = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym $W_F(\lambda)$). Jednym z należących do niej wektorów jest już jednak znaleziony wyżej wektor własny odpowiadający $\lambda_2 = 1$ (istotnie, powyższe równanie jest spełnione dla $a = 2$, $b = -3$ i $c = 1$); trzeba więc dobrać drugi wektor, na którym zeruje się $(F-I)^2$, tak by był on liniowo niezależny od wektora własnego. Warunki te spełnia np.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

(oczywiście zawsze można do niego dodać wektor własny dla $\lambda_2 = 1$ pomnożony przez jakąkolwiek liczbę). Mamy więc rozkład przestrzeni V na dwie podprzestrzenie niezmiennicze

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Dowolny wektor można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową powyższych wektorów rozpinających podprzestrzenie X_1 i X_2:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Rozwiązanie tego układu daje $x = a + 2b + 4c$, $y = -a - 2b - 3c$ i $z = a + b + c$. Np. dla podanego w zadaniu wektora mamy

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Możemy teraz podziałać e^{tF} na ten lub, lepiej, dowolny wektor

$$\begin{aligned} e^{tF} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= (a + 2b + 4c)e^{tF} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a - 2b - 3c)e^{tF} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + (a + b + c)e^{tF} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (a + 2b + 4c)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a - 2b - 3c)e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (a + b + c)e^{t} \left[I + t(F - I) + \ldots \right] \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu to, że dwa pierwsze wektory są wektorami własnymi F i, co za tym idzie, działanie e^{tF} na nie sprowadza się do pomnożenia ich przez $e^{t\lambda_i}$ z odpowiadającą danemu wektorowi wartością własną λ_i. W ostatnim wyrazie jak poprzednio wydzieliliśmy czynnik $e^{t\lambda_2 I} = e^t$ i rozwinęliśmy $e^{t(F-\lambda_2 I)}$ w szereg potęgowy. Wprawdzie teraz macierz $(F - \lambda_2 I)^2$ i wyższe potęgi $(F - \lambda_2 I)$ nie są macierzami zerowymi, niemniej dają one zawsze zero w działaniu na stojący za nimi wektor (bo jest on właśnie tak wybrany). Można zatem jak poprzednio je opuścić. Zapisujemy teraz poszczególne składniki sumy w postaci macierzy działających na składowe a, b i c naszego dowolnego wektora:

$$
\begin{aligned}
e^{tF}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&+e^t\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t\,e^t\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

i łącząc na koniec wszystkie występujące tu macierze w jedną znajdujemy

$$
e^{tF} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^t & 2e^{2t} - 2e^t - 2te^t & 4e^{2t} - 4e^t - 2te^t \\ -2e^{2t} + 2e^t + 3te^t & -4e^{2t} + 5e^t + 3te^t & -8e^{2t} + 8e^t + 3te^t \\ e^{2t} - e^t - te^t & 2e^{2t} - 2e^t - te^t & 4e^{2t} - 3e^t - te^t \end{pmatrix}.
$$

Jeśli z jakichś powodów potrzebny jest tylko wynik działania e^{tF} na podany w zadaniu wektor, to można go uzyskać szybko bez znajdowania całej macierzy e^{tF}. Wykorzystując znaleziony jawnie rozkład tego wektora na wektory pierwiastkowe mamy

$$
e^{tF}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4e^t\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 2t \\ t & 1-t & -5t \\ 0 & t & 1+3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(macierz w ostatnim członie po prawej to $I + t(F - I)$). Wykonując operacje po prawej stronie znajdujemy

$$
e^{tF}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 6e^t - 8te^t \\ 2e^{2t} - e^t + 12te^t \\ -e^{2t} - e^t - 4te^t \end{pmatrix},
$$

co jest oczywiście tym, samym wynikiem, który dostaniemy działając na podany w zadaniu wektor znalezioną wyżej całą macierzą e^{tF}.

Geometria analityczna

Zadanie
Znaleźć zbiór punktów będących przecięciem dwu płaszczyzn P_1 i P_2 zdefiniowanych warunkami

$$P_1: \qquad \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4: \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1\} \ ,$$

$$P_2: \qquad \left\{(t_1 + t_2,\ t_1 - t_2,\ 4t_1 + 2t_2,\ 2t_1 + 4t_2) \in E_4, \quad t_1, t_2 \in R^1\right\} \ .$$

E_4 oznacza tu czterowymiarową przestrzeń euklidesową, tj. afiniczną przestrzeń wektorową nad ciałem R z (kanonicznym) iloczynem skalarnym.
Odp. Płaszczyzna P_1 jest tu zadana dwoma liniowymi warunkami (ich liniowość jest tym, co powoduje, że jest to płaszczyzna, a nie jakaś inna "krzywa" - cokolwiek by to mogło tu znaczyć - powierzchnia), a druga zadana jest parametrycznie. Płaszczyznę zadaną parametrycznie łatwo przedstawić w postaci równań: wystarczy wyeliminować parametry. Np. w przypadku P_2 mamy:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 \\ x_2 &= t_1 - t_2 \\ x_3 &= 4t_1 + 2t_2 \\ x_4 &= 2t_1 + 4t_2 \end{aligned}$$

Wstawiając $2t_1 = x_1 + x_2$, $2t_2 = x_1 - x_2$ z pierwszych dwu związków do pozostałych dwu dostajemy

$$\begin{aligned} x_3 &= 3x_1 + x_2 \\ x_4 &= 3x_1 - x_2 \ . \end{aligned}$$

otrzymujemy dwa równania zadające płaszczyznę P_2.

Równania definiujące P_1 można uprościć (odejmując od pierwszego drygie) do $x_1 = 1$ oraz $x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Parametryczne jej przedstawienie można (choć nie będzie nam potrzebne) dostać kładąc np. $x_2 = \tau_1$ i $x_3 = \tau_2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \tau_1 \\ x_3 &= \tau_2 \\ x_4 &= 1 - \tau_1 - \tau_2 \ . \end{aligned}$$

Przecięcie dwu płaszczyzn są to punkty należące i do P_1 i P_2. Muszą więc one być postaci takiej jak punkty P_2 (tzn. muszą być otrzymywane dla jakichś wartości t_1 i t_2), a zarazem spełniać równania definiujące P_1. Zatem musi dla nich zachodzić

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 1 \ , \\ (t_1 - t_2) + (4t_1 + 2t_2) + (2t_1 + 4t_2) &= 1 \ , \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 1 \ , \\ 7t_1 + 5t_2 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Równania te łatwo rozwiązać: $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Wstawiając te wartości parametrów do związków zadających P_2 dowiadujemy się, że przecięciem w E_4 płaszczyzn P_1 i P_2 jest tylko jeden punkt A o współrzędnych

$$A = (1, -5, -2, 8) \ .$$

Może się wydawać niezgodnym z intuicją, że przecięciem dwu płaszczyzn jest tylko punkt: w E_3 przecięciem dwu płaszczyzn jest zwykle prosta. Niema tu jednak błędu: w E_4 płaszczyznę definiują dwa równania liniowe, a w E_3 tylko jedno. Dlatego w E_4 punkty należące do przecięcia dwu płaszczyzn spełniają cztery liniowe równania na cztery zmienne (a E_3 dwa równania na trzy zmienne) i najbardziej typowym rozwiązaniem jest punkt. Jak wiemy z teorii równań liniowych może się też zdarzyć, że układ taki nie ma wcale rozwiązań (płaszczyzny się wtedy nie przecinają wcale) lub, że wymiar przestrzeni rozwiązań jest większy niż zero (wtedy przecięciem płaszczyzn jest prosta lub nawet płaszczyzna). Ale najbardziej typowym przecięciem dwu płaszczyzn w E_4 jest jeden punkt.

Zadanie
Znaleźć odległość w E_4 punktu $A = (5, 6, 7, 8)$ od hiperpowierzchni H zdefiniowanej następująco

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4 : \ \ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30\} \ .$$

Odp.: Odległość punktu A od hiperpowierzchni H jest to najmniejsza odległość pomiędzy A i punktami $P_H \in H$ (minimalizujemy odległość ze względu na punkty P_H). Jest ona tym samym co odległość od A punktu przecięcia z H prostej l przechodzącej przez A i prostopadłej do H (tj. prostopadłej w sensie kanonicznego iloczynu skalarnego w E_4 do wszystkich wektorów stycznych do H w punkcie przecięcia). Do rozwiązania problemu wystarczy zatem znaleźć wektor prostopadły do H oraz prostą przechodzącą przez A i mającą kierunek tego wektora.

Tu wygodnie jest zapomnieć o (nieistniejącym w rzeczywistości) podziale na analizę i algebrę (to co istnieje rzeczywiście to konkretny problem do rozwiązania) i skorzystać z tego, że gdy hiperpowierzchnia zadana jest ogólnym warunkiem

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \ ,$$

(tu $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 30$), to wektor prostopadły do niej (w punkcie o współrzędnych (x_1, x_2, x_3, x_4)) jest gradientem f, tj. ma składowe

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ \frac{\partial f}{\partial x_4} \right) \ .$$

U nas wektor prostopadły do H ma zatem składowe

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez A i mającej kierunek tego wektora możemy napisać "od ręki"

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Punkt jej przecięcia z hiperpowierzchnią H wyznacza równanie (tj. wyznacza wartość parametru t)

$$4(5 + 4t) + 3(6 + 3t) + 2(7 + 2t) + (8 + t) = 30 ,$$

tj. $60 + 30t = 30$. Punkt przecięcia l z H charakteryzuje się zatem parametrem $t = -1$. Tak więc prosta l dla $t = 0$ przechodzi przez punkt A, dla $t = -1$ zaś przebija hiperpowierzchnię H. Odległość d tych dwu punktów dana jest zatem przez

$$\begin{aligned} d^2 = [x_1(0) - x_1(-1)]^2 + [x_2(0) - x_2(-1)]^2 + [x_3(0) - x_3(-1)]^2 + [x_4(0) - x_4(-1)]^2 \\ = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30 . \end{aligned}$$

Odległość A od H wynosi zatem $\sqrt{30}$.

Zadanie
Znaleźć odległość w E_3 między prostymi l_1 i l_2 zadanymi następująco

$$l_1 : \qquad \{(x_1, x_2, x_3) \in E_3 : \; x_1 + x_2 = 1, \; x_1 + 2x_2 + x_1 = 2\} .$$

$$l_2 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Odp.: Odległość dwu prostych jest to długość łączącego je odcinka skonstruowanego tak, że jest on prostopadły i do jednej i do drugiej prostej. Zapiszmy najpierw prostą l_1 w postaci patrametrycznej (co pozwoli nam zidentyfikować wektor do niej styczny). W tym celu wystarczy znaleźć jakiś punkt do niej należący. Jest nim np. punkt $(0, 1, 0)$. Prosta l_1 może zatem być zapisana jako

$$l_1 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} ,$$

przy czym stałe α, β i γ należy tak dobrać by spełnione były (dla dowolnej wartości parametru $\tilde{t}$) równości definiujące l_1:

$$\begin{aligned}\tilde{t}\alpha + (1+\tilde{t}\beta) &= 1\\ \tilde{t}\alpha + 2(1+\tilde{t}\beta) + \tilde{t}\gamma &= 2\ .\end{aligned}$$

Musi wiec być $\alpha + \beta = 0$ i $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$. Oczywiście wektor styczny do prostej l_1 może być dowolnej długości, więc możemy sobie wziąć jako rozwiązanie $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Zatem w postaci parametrycznej

$$l_1:\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ .$$

Możemy teraz znaleźć wektor prostopadły zarówno do l_1 jak i do l_2. W E_3 jest tylko jeden taki wektor (z dokładnością do wyboru jego długości). Aby go znaleźć najwygodniej skorzystać z iloczynu wektorowego wyktorów stycznych do l_1 i l_2: iloczyn taki daje bowiem zawsze wektor prostopadły do przemnożonych przez siebie wektorowo wektorów[6] Wykorzystujemy tu znaną sztuczkę z wyznacznikiem: wektor $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_i w^i_{(e)}) \times (\mathbf{e}_j u^j_{(e)})$ jest dany przez

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ w^1_{(e)} & w^2_{(e)} & w^3_{(e)}\\ u^1_{(e)} & u^2_{(e)} & u^3_{(e)}\end{vmatrix}\ .$$

Tu mamy

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = -3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}\ .$$

Zatem wektor o składowych

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}\ ,$$

jest prostopadły do prostych l_1 i l_2.

Możemy teraz przedstawić prostą l_3 prostopadłą do l_1 i l_2 w ogólnej postaci

$$l_3:\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}\ ,$$

[6] Trzeba tu zwrócić uwagę, że coś takiego jak iloczyn wektorowy dwu wektorów istnieje tylko w E_3; w E_4 np. dwa wektory wyznaczają płaszczyznę, do której prostopadłe są aż dwa wektory; znany z E_3 iloczyn wektorowy staje się tu tensorem (brr... straszne słowo! - zawsze budzi na widowni szmer popłochu...) antysymetrycznym drugiego rzędu.

z parametrem $\tau \in R^1$. Trzeba następnie dobrać a, b i c tak, by prosta l_3 dla pewnej wartości parametru τ, np. dla $\tau = 0$, przecinała prostą l_2 w jakimś punkcie $A_2 \in l_2$ scharakteryzowanym wartością t_2 parametru t, a dla jakiejś innej wartości τ przecinała prostą l_1 w punkcie $A_1 \in l_1$ scharakteryzowanym przez $\tilde{t} = t_1$. Daje to układ sześciu równań na sześć niewiadomych (a, b, c, τ, t_1, t_2):

$$
\begin{aligned}
a &= t_2 \\
b &= 2 + t_2 \\
c &= 2t_2 \\
a - 3\tau &= t_1 \\
b - \tau &= 1 - t_1 \\
c + 2\tau &= t_1 \ .
\end{aligned}
$$

Aby je rozwiązać sprawnie, a systematycznie eliminujemy najpierw a, b i c (biorąc je z trzech pierwszych równań):

$$
\begin{aligned}
t_2 - 3\tau &= t_1 \\
2 + t_2 - \tau &= 1 - t_1 \\
2t_2 + 2\tau &= t_1 \ .
\end{aligned}
$$

Odejmując od ostatniego pierwsze mamy $t_2 = -5\tau$, a drugie i trzecie, po wstawieniu tego do nich sprowadzają się do

$$
\begin{aligned}
2 - 6\tau &= 1 - t_1 \\
-8\tau &= t_1 \ ,
\end{aligned}
$$

i stąd już gładko $\tau = 1/14$, $t_1 = -8/14$, $t_2 = -5/14$. Wracając do równań z a, b i c znajdujemy $a = -5/14$, $b = 23/14$ i $c = -10/14$. Zatem prosta l_3 prostopadła do l_1 i do l_2 ma postać

$$
l_3 : \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -5 \\ 23 \\ -10 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \ ,
$$

i dla $\tau = 0$ przecina l_2, a dla $\tau = 1/14$ przecina l_1. Zatem odległość d prostych l_1 i l_2 od siebie jest dana przez

$$
d^2 = [x_1(0) - x_1(1/14)]^2 + [x_2(0) - x_2(1/14)]^2 + [x_3(0) - x_3(-1/14)]^2 = \frac{1}{14} \ ,
$$

i wynosi $1/\sqrt{14}$.

Zadanie Rozwiązać poprzednie dwa zadania metodami analizy (aby przeciwdziałać powstawaniu w młodych umysłach podziału matematyki na analizę i algebrę...).

Odp.: W przypadku szukania odległości punktu $A = (5, 6, , 7, 8) \in E_4$ od hiperpłaszczyzny H zadanej warunkiem $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 30$ mamy problem zminimalizowania funkcji

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 + (x_3 - 7)^2 + (x_4 - 8)^2 \ ,$$

dającej kwadrat odległości od punktu A punktu X o współrzędnych (x_1, x_2, x_3, x_4) z warunkiem ubocznym, by punkt X należał do hiperpłaszczyzny H

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 30 = 0 \ .$$

Zgodnie z ogólną metodą minimalizujemy więc funkcję

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda g(x_1, x_2, x_3, x_4) \ .$$

Przyrównujemy do zera cztery pochodne

$$\begin{aligned} F'_{x_1} = 2(x_1 - 5) + 4\lambda &= 0 \\ F'_{x_2} = 2(x_2 - 6) + 3\lambda &= 0 \\ F'_{x_3} = 2(x_3 - 7) + 2\lambda &= 0 \\ F'_{x_4} = 2(x_4 - 8) + \lambda &= 0 \ , \end{aligned}$$

i rozwiązujemy powstałe równania razem z warunkiem $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Po wyznaczeniu x_i z warunków $F'_{x_i} = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 2\lambda \\ x_2 &= 6 - \frac{3}{2}\lambda \\ x_3 &= 7 - \lambda \\ x_4 &= 8 - \frac{1}{2}\lambda \ , \end{aligned}$$

i wstawieniu do $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ znajdujemy $60 + 15\lambda = 30$, czyli $\lambda = 2$. Stąd $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ i $x_4 = 7$. Macierz drugich pochodnych funkcji $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ jest nizależna od punktu, diagonalna

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ ,$$

i dodatnio określona. W znalezionym punkcie $(1, 3, 5, 7)$, w którym zerują się pierwsze pochodne mamy zatem minimum. Wartość funkcji $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ w tym punkcie wynosi 30, czyli odległość punktu A od hiperpłaszczyzny H jest równa $\sqrt{30}$.
W drugim zadaniu wprowadzamy funkcję

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1 - t)^2 + (x_2 - t - 2)^2 + (x_3 - 2t)^2 \ ,$$

będącą kwadratem odległości punktu X o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) od punktu na prostej l_2 scharakteryzowanego parametrem t. Minimalizujemy zatem funkcję czterech zmiennych. Warunkiem dodatkowym jest to, że punkt X musi leżeć na prostej l_1, co oznacza, że współrzędne (x_1, x_2, x_3) muszą spełniać warunki

$$g_1(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 + x_2 - 1 = 0 \ ,$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3, t) = x_2 + x_3 - 1 = 0 \ ,$$

(wprawdzie warunki g_1 i g_2 dotyczą tylko współrzędnych punktu X to mimo to, należy je formalnie traktować jak funkcje wszystkich zmiennych, ze względu na które minimalizujemy funkcję f). Znów tworzymy funkcję pomocniczą zależną od dwu mnożników Lagrange'a λ_1 i λ_2:

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3, t) + 2\lambda_1 g_1(x_1, x_2, x_3, t) + 2\lambda_2 g_2(x_1, x_2, x_3, t) \ ,$$

(żeby się ładniej liczby komponowały przyjęliśmy za mnożniki Lagrange'a $2\lambda_1$ i $2\lambda_2$) i przyrównujemy do zera jej pochodne cząstkowe po x_1, x_2, x_3 i t:

$$\begin{aligned}
F'_{x_1} &= 2(x_1 - t) + 2\lambda_1 = 0 \\
F'_{x_2} &= 2(x_2 - t - 2) + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\
F'_{x_3} &= 2(x_3 - 2t) + 2\lambda_2 = 0 \\
F'_{t} &= -2(x_1 - t) - 2(x_2 - t - 2) - 4(x_3 - 2t) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

W połączeniu z warunkami ubocznymi daje to układ sześciu równań

$$\begin{aligned}
& x_1 - t + \lambda_1 = 0 \\
& x_2 - t + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\
& x_3 - 2t + \lambda_2 = 0 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 - 6t + \lambda_2 = 2 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_2 + x_3 = 1 \ .
\end{aligned}$$

Aby je systematycznie rozwiązać wyznaczamy z pierwszych trzech $x_1 = t - \lambda_1$, $x_2 = t - \lambda_1 - \lambda_2 + 2$, $x_3 = 2t - \lambda_2$ i wstawiamy do pozostałych trzech. Pierwsze z nich daje wtedy

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \ ,$$

a pozostałe

$$2t - 2\lambda_1 - \lambda_2 = -1 \ ,$$
$$3t - \lambda_1 - 2\lambda_2 = -1 \ ,$$

Po wyeliminowaniu λ_1 otrzymujemy dwa równania

$$\begin{aligned} 2t + 2\lambda_2 &= -1 \ , \\ 3t - \frac{1}{2}\lambda_2 &= -1 \ , \end{aligned}$$

których rozwiązaniem są $t = -\frac{5}{14}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{14}$, dalej już łatwo $\lambda_1 = \frac{3}{14}$ oraz

$$x_1 = x_3 = -\frac{8}{14} \ , \qquad x_2 = \frac{22}{14} \ .$$

Wartość minimalizowanej funkcji $f(x_1, x_2, x_3, t)$ w tym punkcie wynosi $\frac{1}{14}$. Macierz drugich pochodnych $F(x_1, x_2, x_3, t, \lambda_1, \lambda_2)$ ma postać

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \ .$$

Jest ona dodatnio określona bo największy jej minor jest też dodatni. W znalezionym punkcie mamy zatem (tak jak należało oczekiwać) minimum.