Zadania domowe z analizy i algebry.
(wykład prof.prof. J. Wojtkiewicza i K. Napiórkowskiego)

ANALIZA. FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

Zadanie 1

Zbadać czy granice funkcji dwu zmiennych x i y w podanym punkcie względnie powiedzieć czy funkcja jest ciągła w tym punkcie (lub czy może być zdefiniowana tak, by była w nim ciągła).

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y} & \text{dla} \quad x \neq y \\ 0 & \text{dla} \quad x = y \end{cases} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{9 + x^2 + y^2} - 3}{x^2 + y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3}{2x^2 + y^4} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y}{2x^2 + y^4} \qquad \text{w} \quad (0,0) \ ,$$

$$f(x,y)=\sin\left(\frac{a}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{w} \quad (0,0)\ ,$$

$$f(x,y)=x\ \sin\left(\frac{a}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{w} \quad (0,0)\ ,$$

$$f(x,y)=\frac{\sin\left(x^4+y^4\right)}{x^2+y^2} \qquad \text{w} \quad (0,0)\ ,$$

$$f(x,y)=\Big(1+x^2+y^2\Big)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \qquad \text{w} \quad (0,0)\ ,$$

Zadanie 2
Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji dwu lub trzy zmiennych. Sprawdzić równość drugich pochodnych mieszanych, tj. np. równość $f_{xy}=f_{yx}$, itp.; może to być też traktowane jak sprawdzenie poprawności obliczenia pierwszych pochodnych cząstkowych.

$$f(x,y,z)=(3x^2y+z^4)^3\ ,$$

$$f(x,y)=(\ln x)^{\sin y} \qquad \text{gdzie} \quad x>1\ ,$$

$$f(x,y)=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{x}} \qquad \text{gdzie} \quad x,y>0\ ,$$

$$f(x,y)=(x\,\mathrm{tg}z)^{\ln y} \qquad \text{gdzie} \quad x,y>0\ ,$$

$$f(x,y,z)=y^2(5y-2z)^{xy} \qquad \text{gdzie} \quad 5y-2z>0\ ,$$

$$f(x,y,z)=(\sin x)^{\mathrm{tg}z}(\mathrm{ctg}z)^{\cos y} \qquad \text{gdzie} \quad x>0,\mathrm{ctg}z>0\ ,$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{xy}\,(3x+2z)^{\sqrt{yz}} \qquad \text{gdzie} \quad x,y,z>0\ ,$$

$$f(x,y,z)=x^{y\ \mathrm{ctg}z} \qquad \text{gdzie} \quad x>0\ ,$$

$$f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \text{gdzie} \quad x>0\ ,$$

$$f(x,y,z) = (\sin x)^{(\sin y)^{\sin z}} \qquad \text{gdzie} \quad \sin x, \sin y > 0 \ ,$$

Zadanie 3
Pokazać, że podane funkcje spełniają podane obok nich równania.

$$f(x,y) = x^y\, y^x \quad \text{spelnia} \quad x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\,(x+y+\ln f) \ ,$$

$$f(x,y) = e^{x/y^2} \quad \text{spelnia} \quad 2x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ ,$$

$$f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z} \quad \text{spelnia} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \ ,$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{spelnia} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 1 \ ,$$

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \quad \text{spelnia} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 0 \ ,$$

Zadanie 4
Obliczyć pochodne funkcji w podanym punkcie i kierunku

$$f(x,y,z) = (3x^2y+z^4)^3 \quad \text{w} \quad (1,1,1) \quad \text{w kierunku} \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \ ,$$

$$f(x,y) = (\ln x)^{\sin y} \quad \text{w} \quad (1,0) \quad \text{w kierunku} \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \ ,$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{xy}\,(3x+2z)^{\sqrt{yz}} \quad \text{w} \quad (2,2,2) \quad \text{w kierunku} \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \ ,$$

Zadanie 5
Obliczyć wartości różniczek zupełnych funkcji w podanym punkcie na podanych przyrostach (dx, dy) $(\varepsilon \ll 1)$.

$$f(x,y,z) = (3x^2y+z^4)^3 \quad \text{w} \quad (1,1,1) \quad \text{na przyroscie} \quad (\varepsilon, -2\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon) \ ,$$

$$f(x,y) = (\ln x)^{\sin y} \quad \text{w} \quad (1,0) \quad \text{na przyroscie} \quad (\varepsilon, \varepsilon) \ ,$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{xy}\,(3x+2z)^{\sqrt{yz}} \quad \text{w} \quad (2,2,2) \quad \text{na przyroscie} \quad (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) \ ,$$

Zadanie 6
Znaleźć ekstrema funkcji dwu zmiennych x i y

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1 \ ,$$

$$f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ ,$$

$$f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \ ,$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5 \ ,$$