F4
Własności optyczne studni kwantowych i centrów barwnych

Celem ćwiczenia jest pomiar optyczny studni kwantowych (GaIn)N oraz jonu chromu wewnątrz sieci kryształu, w tym: widma absorpcji, widma luminescencji oraz widma pobudzania luminescencji w temperaturze pokojowej i ciekłego azotu. Na podstawie pomiarów należy zidentyfikować poszczególne przejścia wewnątrz-centrowe i określić ich przesunięcie w funkcji temperatury.

1. Co należy wiedzieć przed przystąpieniem do ćwiczenia?

1. Należy posiadać ogólne wiadomości z fizyki ciała stałego: [1, 2].
   a) struktura krystaliczna a model pasmowy, struktura pasmowa $E(\boldsymbol{k})$,
   b) struktura krystaliczna a drgania sieci, dyspersja fononów.
2. Własności optyczne: [1, 2, 3, 4, 5]
   a) mechanizmy absorpcji i obszary ich występowania,
   b) mechanizmy rekombinacji, luminescencja,
   c) reguły wyboru dla przejść optycznych.
3. Studnie kwantowe. Elektron w potencjale prostokątnym i trójkątnym (stałe pole elektryczne). Poziomy energetyczne. Przejścia optyczne. [6]
4. Głębokie stany domieszkowe. Teoria pola krystalicznego [1, 7]
5. Podstawowe wiadomości o pomiarach optycznych [8]:
   a) zasada działania i budowa monochromatora,
   b) zasada działania kamery CCD.

Należy przeczytać i zrozumieć poniższy tekst, ze szczególnym uwzględnieniem słów pogrubionych.

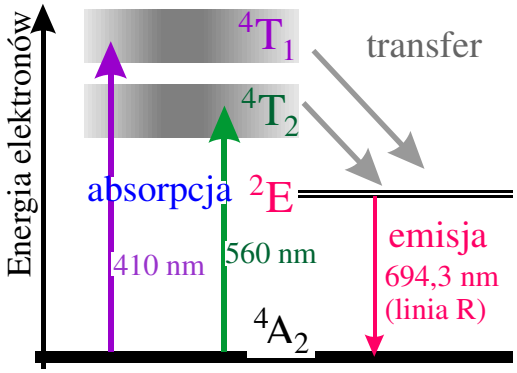
1. Absorpcja i emisja światła

Światło jest falą elektromagnetyczną, rozchodzącą się zgodnie z równaniami Maxwella. W ośrodku materialnym prędkość fali zmniejsza się. Jeżeli ośrodek absorbuje energię, natężenie fali propagującej się wzdłuż osi Z, $I(z)$, zanika zgodnie ze wzorem (prawo Lamberta-Beera):

$$I(z) = I(0)\exp(-\alpha z), \qquad (1)$$

gdzie: α to **współczynnik absorpcji**, $I(0)$ - natężenie światła po wejściu do ośrodka. Natężenie to pomniejszone jest na ogół przez odbicie.

Absorpcja fotonu może prowadzić do przekazania energii w postaci ciepła lub do przejście elektronu na stan wzbudzony. Wzbudzony elektron może spaść na stan podstawowy emitując światło w sposób spontaniczny (luminescencja) lub wymuszony (np. w laserach). Mamy także inne sposoby wzbudzania, które w ogólności prowadzą do obsadzenia niezgodnego z równowaga termodynamiczną (nietermicznego). Luminescencja jest spontaniczną emisją przy przejściu z nietermicznie wzbudzonego stanu kwantowego. Istotne przy tym jest oddzielenie procesu absorpcji i emisji. Jeżeli emisja zachodzi w trakcie działania czynnika pobudzającego (rozpraszanie, generacja wyższych harmonicznych, generacja promieniowania synchrotronowego) to nie mówimy o luminescencji.



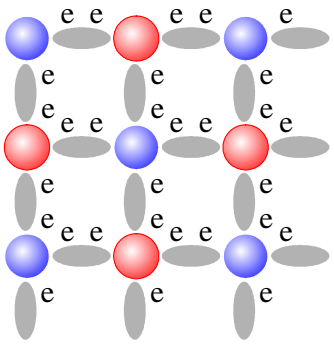
Rys. 1. Diagram Jabłońskiego przedstawiający przejścia elektronowe w rubinie.

Oddzielenie procesu absorpcji i emisji (czasem tylko o 10^{-14} s) pozwala wyróżnić stan wzbudzony i stan końcowy. Badając tak wyemitowane fotony możemy poznać stany kwantowe, pomiędzy którymi

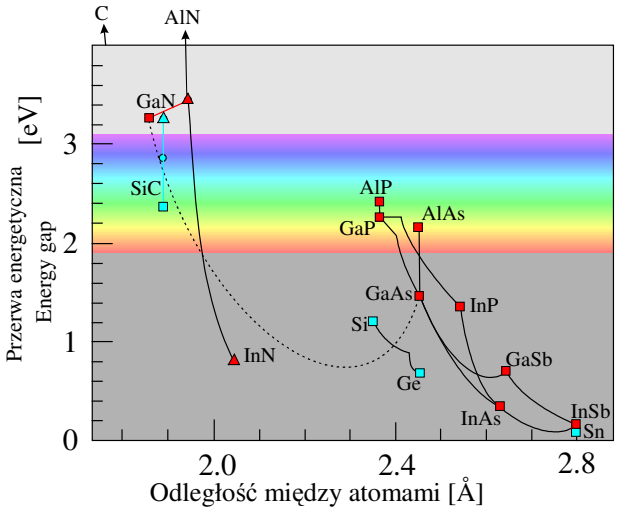
zachodzą przejścia. Zwyczajowo, wprowadza się podział na szybką fluorescencję (gdy czas życia $\tau < 1$ μs) i powolną fosforescencję ($\tau > 1$ μs).
Przykład przejść absorpcyjnych i luminescencyjnych przedstawiony jest na rysunku 1. Diagram obrazujący przejścia pomiędzy stanami kwantowymi nazywamy diagramem Jabłońskiego. Widać, że oprócz przejść optycznych musimy uwzględnić transfer wzbudzenia, który odbywa się na ogół niepromieniście.
Prosta obserwacja diagramu prowadzi do wniosku, że w przypadku emisji energia fotonów będzie na ogół niższa, niż w przypadku absorpcji (reguła Stokesa).Zarówno prawdopodobieństwo absorpcji, jak i natężenie luminescencji zależą od siły oscylatora dla danego przejścia. Siła oscylatora natomiast jest proporcjonalna do kwadratu momentu przejścia pomiędzy stanami. Możemy ją oszacować znając **kwantowe reguły wyboru** (omawiane na wykładzie "Mechanika i chemia kwantowa" na II roku).
W zależności od sposobu wzbudzenia luminescencję możemy podzielić na fotoluminescencje (wzbudzenie światłem), elektroluminescencję (wzbudzenie przepływem ładunku), chemoluminescencję, bioluminescencję itp.

2. Badane obiekty

W ciałach krystalicznych elektrony przebywają w potencjale mającym charakter okresowy. Na skutek tego ich funkcje falowe mają postać **funkcji Blocha**. Postać ta dopuszcza możliwość ruchu **elektronów**, aczkolwiek cząsteczki przez nią opisywane mają nieoczekiwane własności – ich **masy** różnią się od masy elektronu w próżni, a ich ładunki mogą być dodatnie. Zależność ich energii, E, od pseudopędu, $p = \hbar k$, $E(k)$, nazywamy **strukturą pasmową**.
Rozróżniamy **pasmo walencyjne**, zawierające cząsteczki o ładunku dodatnim – **dziury** i pasmo przewodnictwa, w którym znajdują się ujemnie naładowane elektrony (poprawnie **kwazi-elektrony**). Pasma te oddzielone są przerwą energetyczną. Szerokość **przerwy energetycznej** w półprzewodniku mieści się w granicach od 0 eV (CdHgTe) do ponad 5 eV (AlN, diament). Półprzewodniki różnią się od metali tym, że w zerowej temperaturze, mają całkowicie zapełnione pasmo walencyjne i całkowicie puste pasmo przewodnictwa.



Rys. 2. Schemat obsadzenia wiązań przez elektrony w materiale III-V. Na każdy atom przypada po 4 wiązania, każde może być obsadzone przez 2 elektrony. Atomy z grupy III dostarczają po 3 elektrony, a atomy z grupy V po 5. Dzięki temu liczba elektronów jest równa liczbie stanów w paśmie walencyjnym.



Rys. 3. Mapa półprzewodników z grupy IV (C, Si, Ge Sn) i III-V (pozostałe). Można zauważyć, że im cięższe są pierwiastki składowe, tym węższa jest przerwa energetyczna.

Przy pomocy epitaksji można wytworzyć struktury półprzewodnikowe z materiałów o różnych szerokościach przerw energetycznych, dobierają je, na przykład, spośród różnych materiałów z grupy III-V. Rysunek 2. przedstawia strukturę, a na rys. 3. można zobaczyć "mapę" tych materiałów. Materiały z różnymi kationami można mieszać np. InN z GaN daje stop półprzewodnikowy (GaIn)N.

Parametry takich stopów trójskładnikowych zaznaczono na rys. 3. liniami łączącymi dane związki dwuskładnikowe. Jeżeli cienka (grubość L rzędu 10 nm) warstwa materiału o wąskiej przerwie energetycznej zostanie otoczona materiałem o szerszej przerwie, to dla elektronów dostępna będzie jedynie dwuwymiarowa (2D) przestrzeń zwana **studnią kwantową**. Takie studnie wykorzystywane są np. w diodach elektroluminescencyjnych (LED).

Luminescencję studni kwantowych badać będziemy na przykładzie próbek ze studniami kwantowymi z (GaIn)N [9] i barierami z GaN. GaN jest materiałem piezoelektrycznym i diody na bazie tego materiału mają wbudowane silne pole elektryczne. Pole to działając na elektrony, powoduje zmniejszenie ich energii (efekt Starka). Po przyłożeniu napięcia zmniejszamy to pole, co powoduje zwiększenie energii emisji [10]. GaN jest bardzo twardym materiałem i trudności w jego produkcji są porównywalne do otrzymywania diamentu, za to wyprodukowane urządzenia są bardzo trwałe. Szczególne ważne są diody niebieskie, gdyż po wyposażeniu w luminofor mogą dawać białe światło. Wydajność takiego świecenia jest dużo większa niż żarówek, więc wprowadzenie białych diod świecących dało ogromne oszczędności w skali świata. W 2014 r. za opracowanie techniki otrzymywania diod świecących na bazie GaN przyznano nagrodę Nobla.

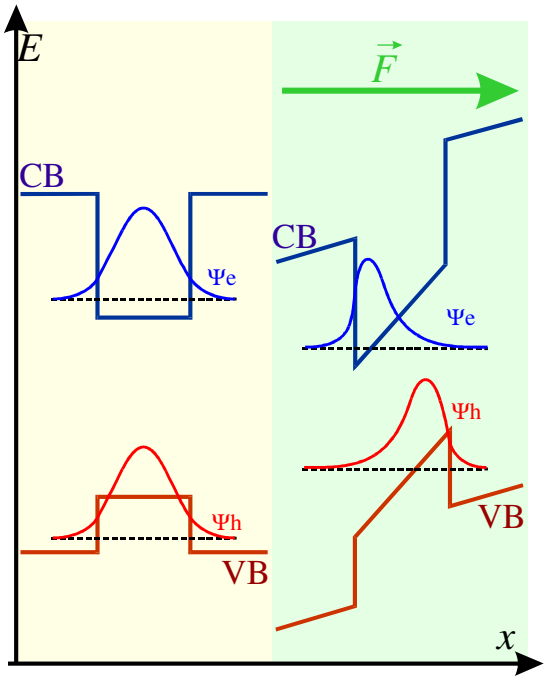
Energia nośników zamkniętych w prostokątnej studni jest zwiększona o energię kwantyzacji, E_n:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8L^2 m^*}, \qquad (2)$$

gdzie n = 1, 2,.. – kolejne poziomy w studni.
W złączu p-n (w diodzie) i w materiałach piezoelektrycznych powstaje pole elektryczne. Potencjał elektronu w polu elektrycznym F rośnie liniowo: $U(x) = eFx$.
Zatem pole elektryczne zamieni prostokątną studnię kwantową w trójkątną, jak na rys. 2. Ciekawa sytuacje powstanie, gdy obok siebie znajda się dwie studnie kwantowe odległe o d. Pole elektryczne sprawi, że potencjały tych studni będą się różnić o:

$$\Delta U = eFd. \qquad (3)$$

Jeżeli w takich studniach zachodzić będzie rekombinacja skośna (elektron z pierwszej studni rekombinuje z dziura z drugiej), to energia emisji obniżona będzie o ΔU. Pobudzając kryształ światłem możemy doprowadzić do częściowego zaekranowania pola, co doprowadzi do zmniejszenia ΔU i wzrostu energii emitowanego światła. Na zajęciach będziemy mierzyli studnie GaN/(GaIn)N/GaN wyhodowane w Instytucie Wysokich Ciśnień „Unipress”.



Rys. 4. Studnia kwantowa bez pola (po lewej) i w polu elektrycznym. Pole zamienia potencjały na trójkątne i przesuwa elektrony i dziury, zmniejszając różnicę ich energii.

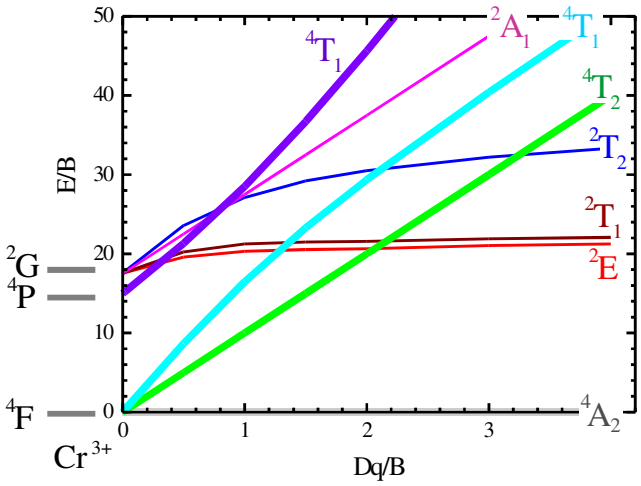
Rubin (Al_2O_3:Cr) jest odmianą korundu, Al_2O_3, zawierającą chrom jako domieszkę. Czysty korund jest przezroczysty dla światła widzialnego i UV do energii 9 eV. Rubin, dzięki domieszce Cr, posiada czerwoną barwę oraz inne właściwości optyczne, które sprawiły, że był powszechnie stosowany do produkcji laserów.

YAG - granat itrowo-glinowy $Y_3Al_5O_{12}$ nie występuje w przyrodzie. Kryształy YAG:Cr będące na pracowni wyhodowano w ITME (Instytut Technologii Materiałów Elektronowych). Kryształy YAG wykorzystywane są w optyce i do produkcji laserów. Czysty kryształ YAG jest bezbarwny, a z chromem - zielony.

Chmura **elektronów walencyjnych** otaczających atom opisywana jest funkcją falową, która może odpowiadać kilku dobrze określonym energiom. W przypadku jonu Cr^{3+} powłoka walencyjna ma konfigurację $3d^3$.

Stanem podstawowym jest stan ^4F, stanami wzbudzonymi ^4P i ^2G (stosujemy tu **notację spektroskopową,** zapis ^nX oznacza stan o multipletowości n i symetrii X).

Jony domieszek mają niewielkie średnice (np. Cr^{3+} ma około 1.3 Å) i gdy znajdą się wewnątrz kryształu, pole pochodzące od otaczających ich jonów (ligandów) możemy traktować, jako zaburzenie. Zaburzenie to będzie prowadziło do rozszczepienia poziomów przez tzw. **pole krystaliczne**. Ponieważ otoczenie chromu w rubinie ma **symetrię oktaedryczną** (O_h), funkcje falowe przyjmą symetrie A_1, A_2, E, T_1 lub T_2.



Rys. 5. Uproszczony diagram Tanabe-Sugano przedstawiający rozszczepienie poziomów w Cr^{3+}. [11][12]

Oddziaływanie pochodzące od pola krystalicznego możemy sparametryzować poprzez stosunek Dq/B (Dq - rozszczepienie od pola krystalicznego, B – energia oddziaływania elektronów). Wykres energii poszczególnych poziomów w funkcji pola krystalicznego (patrz rys. 5.) nazywamy **diagramem Tanabe–Sugano** [11][12]**.** Natężenie pola krystalicznego zależy oczywiście od kryształu, w którym zanurzony jest jon Cr^{3+}. Najprostszy związek obserwujemy pomiędzy parametrem rozszczepienia Dq, a energią przejścia $^4T_2 \rightarrow {}^4A_2$:

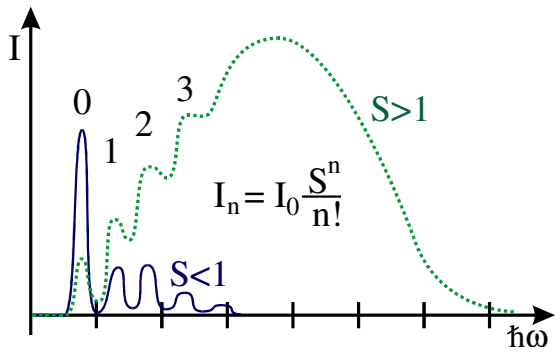
$$E(^4T_2) = 10\ \mathrm{Dq}. \qquad (4)$$

Diagram pozwala porównywać linie pochodzące od tych samych stanów w różnych kryształach, ale także dla danego kryształu w różnych temperaturach. Jeżeli kryształ schładzamy, to odległości międzyatomowe maleją, wpływ pola krystalicznego staje się silniejszy i w efekcie przesuwamy się na diagramie w prawo. Diagram pozwala nam oszacować też wpływ drgań sieci (**fononów**). Oddziaływanie z fononami powoduje **poszerzenie pików**.

Przykłady przejść elektronowych w rubinie zostały przedstawione na rys. 1. (na pierwszej stronie). Absorpcja fotonu powoduje przejście elektronu na stan wzbudzony, na przykład: $^4A_2 \rightarrow {}^4T_2$. Wzbudzony elektron może spaść na stan podstawowy emitując światło. Na przykład, wykorzystywana w laserach linia R_1 to przejście: $^2E \rightarrow {}^4A_2$ w rubinie.

Elektron może też zrelaksować na niższy poziom (np. $^4T_2 \rightarrow {}^2E$) przekazując energię drganiom kryształu (**fononom**) i dopiero, z niższego poziomu wyemitować foton. Na ogół energia emitowanego fotonu jest mniejsza od energii fotonu absorbowanego.

Przejścia elektronowe mogą sprzęgać się z drganiami jonu lub kryształu. Obserwujemy wtedy **linie oscylacyjne** lub **powtórzenia fononowe**. Jeżeli przejściu elektronowemu towarzyszy emisja fononu (lub przejście na wyższy **poziom oscylacyjny**), emitowany foton będzie miał mniejszą energię i oprócz głównej linii emisyjnej zaobserwujemy ciąg pików lub pasmo emisyjne o niższej energii.



Rys. 6. Widma absorpcji z uwzględnieniem powtórzeń fononowych (S – czynnik Huanga-Rhys).

W wysokich temperaturach, przejściu elektronowemu towarzyszy czasem pochłonięcie fononu (lub przejście na niższy poziom oscylacyjny). Wtedy emitowany foton ma wyższą energię.

W przypadku widm emisyjnych obserwujemy na ogół pasma o energii niższej od energii linii podstawowej (zero-fononowej). W przypadku widm absorpcyjnych obserwujemy na ogół pasma o energii wyższej od energii linii podstawowej (zero-fononowej), takie jak pokazane na rys. 6.

3. Przebieg ćwiczenia

A. Przygotowanie układu spektrometru komputerowego: ustalenie czasu naświetlania i wczytanie widma tła. Należy przy tym tak dobrać czas naświetlania, aby w pełni wykorzystać rejestry kamery CCD. Czynności te powtarzamy przed każdym następnym pomiarem.

B. Pomiar widm fotoluminescencji (PL) dwóch warstw ze studniami kwantowymi w funkcji mocy. Fotoluminescencję pobudzamy laserem i rejestrujemy przy pomocy spektrometru. Należy zadbać o dobra skupienie (zogniskowanie) wiązki lasera. Natężenie światła pobudzającego zmieniamy przy pomocy filtrów szarych. Zaczynamy od pomiaru widma PL bez filtra, następnie wkładamy kolejne, coraz silniejsze filtry aż do utraty sygnału. Filtry opisane są przez podanie gęstości optycznej OD. Transmisja filtru wynosi:

$$T = 10^{-OD}. \qquad (5)$$

Na przykład OD = 0.3 oznacza transmisję 50%, a OD = 1, daje T = 10%.

C. Pomiar widm fotoluminescencji kryształów z chromem (rubinu i granatu). Fotoluminescencję pobudzamy laserem i rejestrujemy przy pomocy spektrometru.

D. Pomiar widm absorpcji optycznej rubinu i granatu. Kryształy oświetlamy lampą. Rejestrujemy widmo lampy i widmo światła, które przeszło przez kryształ. W tym pomiarze należy zwrócić szczególną uwagę na odejmowanie tła i minimalizację szumu, gdyż najbardziej interesującym fragmentem widma jest zakres o najmniejszej ilości przepuszczanego światła. Zakres ten odpowiada najsilniejszej absorpcji.

E. Pomiary luminescencji i absorpcji kryształów z chromem powtarzamy na próbkach umieszczonych w kriostacie w ciekłym azocie.

F. Pomiar widm pobudzania fotoluminescencji (PLE) dla linii R rubinu i granatu. Próbki pobudzamy światłem z monochromatora. Pomiary wykonujemy w zakresie 400 - 640 nm, co 10 - 15 nm.

4. Przygotowanie raportu

Raport powinien składać się z następujących części:

1. Streszczenia,
2. Wstępu teoretycznego,
3. Opisu układu pomiarowego i próbek,
4. Wyników i ich analizy,
5. Podsumowania zawierającego wnioski.

Ad. 1. Streszczenie powinno być krótkie (kilka zdań), ale powinno zawierać opis doświadczeń oraz najważniejsze wyniki i wnioski.

Ad. 2. Należy przedstawić teoretyczne podstawy przeprowadzonych eksperymentów oraz wszystkie potrzebne do dalszej analizy wzory. Teoria powinna przedstawić uzasadnienie stosowanych wzorów.

Ad. 3. Należy narysować też schematy układów pomiarowych. Układy do pomiaru elektroluminescencji, fotoluminescencji i absorpcji mają różne konfiguracje i należy to przedstawić w postaci graficznej.

Ad. 4. Wynikami pomiarów są widma fotoluminescencji, transmisji (absorpcji) i widma pobudzania luminescencji. Dla studni kwantowych wyznaczamy zależność natężenia światła od natężenia prądu (dopasowujemy prostą) i energii emitowanego światła od napięcia. Energie fotonów $h\nu$ w eV, obliczamy na podstawie długości fali λ mierzonej w nm, na podstawie wzoru:

$$h\nu = 1240 \text{ nm eV}/\lambda, \qquad (6)$$

W przypadku studni przygotowujemy wykres natężenia i energii od mocy pobudzania. Zakładając szerokość studni wynosi d = 1,06 nm i 5.2 nm, na podstawie równania (3), należy omówić zależność pola elektrycznego w studni od napięcia (dla diody) lub mocy pobudzania dla warstwy bez kontaktów elektrycznych.

Absorpcję przedstawiamy w postaci wykresów $\alpha(\lambda)$. Współczynnik α wyliczamy biorąc pod uwagę, że grubości próbek wynoszą dla rubinu 1,1 cm, a dla granatu 0,5 cm. Zakładając, że dla λ = 750 nm absorpcja jest zerowa, dokonujemy korekty wyników na odbicie i geometrię pomiaru

Następnie należy zidentyfikować i opisać linie absorpcyjne i luminescencyjne.

Porównując widma luminescencji i absorpcji zmierzone w temperaturze ciekłego azotu i pokojowej można wyznaczyć przesunięcie pików z temperaturą. W przypadku luminescencji, dokładne wyznaczenie położenia linii R (przejścia $^2E \rightarrow {}^4A_2$) wymaga dopasowania krzywej Lorentza:

$$I(E) = \frac{\beta\Gamma/2}{\left(E - E_0\right)^2 + \left(\Gamma/2\right)^2}, \qquad (7)$$

gdzie: E_0 – położenie, Γ – szerokość a β – wysokość piku. Dopasowując krzywe Lorentza należy określić położenia i szerokości pików absorpcyjnych i luminescencyjnych.

Przedyskutować zmiany wywołane temperaturą w oparciu o wzór na zależność Eg(T) (w przypadku diody) i diagram Tanabe-Sugano (kryształy). Podać, jak linie z udziałem fononów zmieniają swoje natężenie.

Wyznaczyć energię linii zero-fononowej przejścia $^4A_2 \rightarrow {}^4T_2$ w azocie i obliczyć rozszczepienie polem krystalicznym Dq dla Cr^{3+} w rubinie i granacie itrowym (YAG) wykorzystując równanie (4). Widmo pobudzania luminescencji należy porównać z widmem absorpcji i przedyskutować podobieństwa i różnice.

Ad. 5. Przedstawić należy fizyczne (naukowe) znaczenie własnych wyników.

Przygotowując opis, należy pamiętać o numeracji rysunków (patrz rys. 1.) i wzorów (1). Przy korzystaniu z materiałów (teksty, rysunki, programy) pochodzących od innych autorów należy w tekście umieścić odnośnik [1], a na końcu podać spis cytowanych źródeł (autor, tytuł, adres strony itp.).

Literatura

Podręczniki:

[1] J. Ginter - „Wstęp do fizyki atomu, cząsteczki i ciała stałego.” rozdz. I, III i IV
[2] K. W. Szalimowa - „Fizyka półprzewodników”
[3] C. Kittel - „Wstęp do fizyki ciała stałego.”
[4] T. S. Moss - „Optical properties of semiconductors”
[5] J. I. Pankove - „Zjawiska optyczne w półprzewodnikach.”
[6] L. I. Schiff - Mechanika kwantowa, rozdz. 2.
[7] F. A. Cotton - „ Teoria grup. Zastosowanie w chemii.”
[8] Encyklopedia fizyki lub Wikipedia w wersji angielskiej - hasła: monochromator, kamera CCD.

Czasopisma:

[9] Shuji Nakamura,"InGaN-based blue light-emitting diodes and laser diodes", J. Crystal Growth **201–202**, 290 (1999) (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002202489801344X)
[10] G. Muziol, *et al.* " Beyond Quantum Efficiency Limitations Originating from the Piezoelectric Polarization in Light-Emitting Devices", ACS Photonics **6,** 1963 (*2019)* DOI: 10.1021/acsphotonics.9b00327
[11] Zanatta *et al.* "Thermally synthesized ruby microstructures and luminescence centers", J. Appl. Phys. 100, 113112 (2006)
[12] http://wwwchem.uwimona.edu.jm:1104/courses/Tanabe-Sugano/TanSugd3.html

K.K., 8 II 2024

Dodatek CCD

Zasada działania kamery CCD

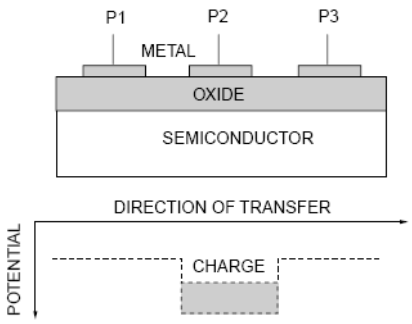
Kamerą CCD nazywamy matrycę detektorów półprzewodnikowych (przeważnie fotodiod), których sygnał jest zapisywany przy pomocy rejestrów CCD (Charge Coupled Device).

Światło zamieniane jest na sygnał elektryczny w fotodiodach. W obszarze złącza fotodiody panuje silne pole elektryczne. Pary elektron-dziura wygenerowane przez fotony zaabsorbowane w tym obszarze są rozdzielane przez pole. Dziury wędrują do podłoża, elektrony gromadzą się w katodzie. Wygenerowany w ten sposób ładunek jest następnie przesuwany przez obwody ze sprzężeniem ładunkowym i zliczany przez rejestry.

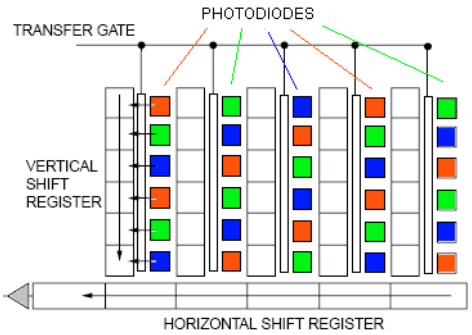
Zasada działania obwodów ze sprzężeniem ładunkowym polega na zamykaniu lub otwieraniu kanałów w warstwie półprzewodnika pokrytej izolatorem. Kanały są otwierane lub zamykane przez przykładanie potencjału do elektrod umieszczonych na dielektryku.

Zasada wykorzystania obwodów ze sprzężeniem ładunkowym (CCD) do rejestracji sygnałów optycznych w kamerze CCD:

1. Przekrój linii przesyłowej ze sprzężeniem CCD. Do elektrod P1 i P3 przyłożony jest ujemny potencjał, co powoduje zablokowanie przepływu ładunku zgromadzonego pod elektroda P2. Zmiana potencjału np. na elektrodzie P3 spowoduje przepływ ładunku w prawo.



2. Struktura kamery CCD widziana z góry. Fotodiody ułożone są w kolumnach. Siatka elektrod steruje przesyłaniem ładunku najpierw w kolumnach, a potem w rzędach.



Rejestry kamer CCD zliczają ładunek metodą cyfrową. Przy zbyt słabym oświetleniu lub zbyt krótkim czasie naświetlania w rejestrach otrzymamy zera lub niewielką liczbę bitów, przez co sygnał będzie schodkowy. W aparatach fotograficznych rejestry są na ogół 8-bitowe (liczą od 0 do 255). W urządzeniach pomiarowych spotykamy rejestry od 10 do 16 bitów (16 bitów odpowiada 0 - 65535). Dobierając czas naświetlania należy upewnić się ilu bitowym rejestrem dysponujemy i pamiętać, aby nie przekroczyć maksymalnej wartości rejestru.

Program pomiarowy odczytuje każdy rejestr wiele razy i uśrednia wyniki. Jeżeli dokonamy m uśrednień pojedynczego rejestru, to otrzymamy średnią liczbę zliczeń $n_S \pm \delta n_S$, gdzie:

$$n_S = \Sigma n_i / m, \tag{C1}$$

$$\delta n_S = \frac{\sqrt{\sum n_i}}{m} = \sqrt{\frac{n_S}{m}}\,. \tag{C2}$$

Jak widać ze wzrostem liczby uśrednień maleje niepewność średniej.