

Wykład 4 – odpowiedzi do zadań

Zadanie 1. Wykonano $n = 245$ pomiarów pojedynczego okresu drgań wahadła matematycznego. Jeśli przez $T_i, i = 1, \dots, n$ oznaczmy wynik pomiaru i -tego okresu, to:

$$\sum_{i=1}^n T_i = 694,40 \text{ s}, \quad \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 = 1,1824 \text{ s}^2.$$

Zakładając, że pomiary te wykonano stoperem pozwalającym na odczyt czasu z dokładnością $\Delta = 0,01 \text{ s}$ wyznacz okres wahadła i jego niepewność.

Rozwiązanie: W treści zadania podano sumę wartości zmierzonych okresów:

$$\sum_{i=1}^n T_i = 694,40 \text{ s},$$

liczbę pomiarów $n = 245$, sumę kwadratów odchyłeń mierzonych okresów od ich średniej wartości:

$$\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 = 1,1824 \text{ s}^2$$

oraz dokładność odczytu stopera $\Delta = 0,01 \text{ s}$. Na podstawie tych danych należy wyznaczyć ocenę wartości czasu trwania jednego okresu wahadła oraz podać niepewność tej oceny.

Wykonano serię $n = 245$ niezależnych pomiarów. Najlepszą oceną czasu trwania jednego okresu jest więc średnia arytmetyczna wszystkich wyników serii:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = 2,834286 \text{ s}$$

Niepewność tego wyniku wyznaczymy na podstawie znajomości oceny wariancji rozkładu wyników serii:

$$s_T^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2 = 1,9779 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2$$

oraz znajomości dokładności odczytu $\Delta = 0,01 \text{ s} \rightarrow \Delta^2/3 = 3,333\ldots \cdot 10^{-5} \text{ s}^2$. Niepewność standardowa wynosi:

$$u^2(\bar{T}) = s_T^2 + \frac{1}{3}\Delta^2 = 5,31125 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2 = (7,28783 \cdot 10^{-3} \text{ s})^2.$$

Zaokrąglamy niepewność do dwóch cyfr znaczących: $u(\bar{T}) = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, a następnie zaokrąglamy wynik, tak żeby jego ostatnia cyfra znacząca była na tym samym miejscu, co ostatnia cyfra znacząca niepewności: $\bar{T} = 2,8343 \text{ s}$.

Wynik końcowy: $T = (2,8343 \pm 0,0073) \text{ s}$, podano niepewność standardową.

Uwaga: W tym pomiarze wkład do niepewności związany z dokładnością odczytu jest większy od wkładu związanego z rozrzutem zarejestrowanych wyników. Dokładniejszą ocenę okresu można by próbować uzyskać np. mierząc 25 razy czas trwania 10 pełnych okresów – taka metoda zmniejszyłaby 10 razy wkład dokładności odczytu do niepewności końcowej, ale jednocześnie zapewne wzrósłby wkład od rozrzutu wyników.

Zadanie 2. Podczas zajęć pracowni fizycznej pięciu kolejnych studentów mierzyło, każdy jednokrotnie, wartość współczynnika załamania n tej samej szklanej płytki płasko-równoległościennej. Pomiarzy wykonywali metodą pomiaru przesunięcia promienia świetlnego, jakiemu ulega on po przejściu przez płytkę. Każdy ze studentów wykonał pomiar dokładnie w ten sam sposób, rzucając promień świetlny o tej samej długości fali na płytkę pod tym samym kątem. Otrzymali oni następujące wartości współczynnika załamania: 1,4629; 1,4392; 1,4761; 1,5011 oraz 1,4992. Niestety, ostatni student po wykonaniu pomiaru stłukł płytkę. Asystent wiedział, że płytka wykonana była z jednego z typów szkła:

- kwarcowego o współczynniku załamania 1,4584;
- kron o współczynniku załamania 1,5162;
- flint o współczynniku załamania 1,6032 lub
- szkła ołowiowego o współczynniku załamania 1,7550.

Płytkę z jakiego typu szkła musi zamówić asystent, aby uzupełnić brak?

Rozwiązanie: Podane wartości współczynników załamania studenci wyznaczyli na podstawie pomiarów i obliczeń. Nie znamy wyników bezpośrednich pomiarów. Studenci nie podali też swoich ocen niepewności uzyskanych wyników. Ponieważ jednak wiemy, że ich pomiary i obliczenia dotyczyły tej samej płytki, a różnice podanych wartości dotyczą więcej niż dwóch ostatnich miejsc dziesiętnych, to możemy potraktować dane, jako wyniki pomiarów, w których dominuje błąd przypadkowy i do wyznaczenia niepewności posłużyć się jedynie wariancją próby: s_n^2 .

Wynik pomiaru jest średnią z wyników uzyskanych przez studentów:

$$\bar{n} = \frac{1}{5}(1,4629 + 1,4392 + 1,4761 + 1,5011 + 1,4992) = 1,475700,$$

a niepewność:

$$s_n^2 = \frac{1}{5 \cdot 4} \sum_{i=1}^5 (n_i - \bar{n})^2 = 1,346830 \cdot 10^{-4} = (1,16053 \cdot 10^{-2})^2.$$

Po odpowiednim zaokrągleniu liczb otrzymujemy wynik końcowy:

$$n = 1,476 \pm 0,012$$

Pozostaje decyzja, z jakiego rodzaju szkła wykonana była płytka. Stosujemy najprostszy test „ 3σ ” i sprawdzamy, który z podanych „tablicowych” współczynników załamania mieści się w przedziale $[\bar{n} - 3s_n; \bar{n} + 3s_n] = [1,440; 1,512]$. W tym przedziale mieści się jedynie współczynnik załamania szkła kwarcowego $n = 1,4584$. Stłuczona płytka wykonana była ze szkła kwarcowego.

Zadanie 3. Podczas zajęć pracowni fizycznej trzech studenci: A, B oraz C mierzyli gęstość trzech próbek metalu (każdy ze studentów badał jedną próbkę) dostarczonych przez asystenta. O asystencie wiadomo, że dysponuje tylko dwoma typami próbek, jakie daje studentom do analizy i są to próbki żelaza i chromu. W tablicach można znaleźć, że gęstość żelaza wynosi $7,874 \text{ g/cm}^3$, a chromu $7,140 \text{ g/cm}^3$. Dwaj studenci A i B wykonali prostsze pomiary i z momentem zakończenia zajęć otrzymali następujące rezultaty: $\rho_A = (7,09 \pm 0,15) \text{ g/cm}^3$, $\rho_B = (8,01 \pm 0,15) \text{ g/cm}^3$. Trzeci student wybrał bardziej pracochłonną metodę i w momencie zakończenia zajęć dysponował następującym czterokrotnym pomiarem gęstości swojej próbki: 7,03, 6,67, 7,23 oraz 7,61 (wszystkie wyniki w g/cm^3).

- (a) Przeprowadź analizę, jaką będzie musiał wykonać student C i podaj ocenę gęstości ρ_C oraz jej niepewność, jakie wynikają z jego danych.
- (b) Zidentyfikuj rodzaj metalu, który badał każdy ze studentów.

Rozwiązanie: Podobnie jak w Zadaniu 2 dane trzeciego studenta uznajemy za wyniki pomiarów, w których dominuje błąd przypadkowy. Obliczenia wykonujemy jak poprzednio. Otrzymujemy: $\rho_C = 7,1350 \text{ g/cm}^3$ oraz $s_{\bar{\rho}} = 0,1962 \text{ g/cm}^3$. Po odpowiednich zaokrągleniach jako wynik końcowy podajemy (wartość $\pm$ niepewność standardowa):

$$\rho_C = (7,14 \pm 0,20) \text{ g/cm}^3.$$

Pozostaje „identyfikacja” metali za pomocą testu „ 3σ ”. Otrzymujemy, że ρ_A jest zgodne z gęstością chromu, ρ_B z gęstością żelaza i ρ_C z gęstością chromu.