

Wykład 5 – odpowiedzi do zadań

Zadanie 1. Podczas przepływu prądu o natężeniu I przez grzałkę o oporze R w czasie t , wydzielane jest ciepło $Q = I^2 R t$. Wyznacz ocenę ilości wydzielonego ciepła Q i niepewność tej oceny, jeśli $R = (30, 0 \pm 0, 2) \Omega$, $I = (10, 0 \pm 0, 1) \text{ A}$ oraz $t = (50 \pm 5) \text{ s}$.

Rozwiązanie. W treści zadania podany jest wzór pozwalający wyznaczyć szukaną wielkość Q wraz z wszystkimi danymi pomiarowymi i ich niepewnościami. Rozwiązanie polega więc jedynie na poprawnym podstawieniu do wzorów na Q i niepewność $u(Q)$.

$Q = I^2 R t = 10^2 \cdot 30 \cdot 50 \text{ J} = 150 \text{ kJ}$. Mamy także:

$$u^2(Q) = (2IRtu(I))^2 + (I^2tu(R))^2 + (I^2Ru(t))^2.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy: $u(Q) = 15,33 \text{ kJ} \approx 15 \text{ kJ}$.

Odpowiedź: $Q = (150 \pm 15) \text{ kJ}$.

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru Snella:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

student miał wyznaczyć współczynnik załamania n pewnego gatunku szkła. Wyniki jego pomiarów to, kąt padania $\alpha = 31^\circ \pm 1^\circ$ oraz kąt załamania $\beta = 20^\circ \pm 1^\circ$. Wyznacz ocenę wartości współczynnika załamania n i niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Podstawiamy wartość kątów do wzoru Snella i otrzymujemy:

$$n = \frac{0,515038..}{0,342020..} \approx 1,50587.$$

Do wyznaczenia niepewności $u(n)$ stosujemy wzór na propagację małych niepewności:

$$u^2(n) = \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} u(\alpha) \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \beta} u(\beta) \right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} u(\alpha) \right)^2 + \left(\frac{-\sin \alpha \cos \beta}{\sin^2 \beta} u(\beta) \right)^2.$$

Obliczając pochodne funkcji trygonometrycznych korzystaliśmy z faktu, że gdy kąt wyrażony jest w mierze łukowej, to pochodną funkcji $\sin \alpha$ jest funkcja $\cos \alpha$ itd. Oznacza to, że wartości niepewności $u(\alpha)$ i $u(\beta)$ musimy wyrazić w radianach: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radiana $\approx 0,017453$ radiana. Po tej zmianie jednostki podstawiamy wartość $u(\alpha) = u(\beta) = 0,017453 \text{ rad}$ do wzoru na $u(n)$ i otrzymujemy: $u(n) \approx 0,084425$. Po poprawnym zaokrągleniu wyniku otrzymujemy:

Odpowiedź: $n = 1,506 \pm 0,084$.

Zadanie 3. Dysponując równią pochyłą o zmiennym kącie nachylenia z naklejonym na nią papierem, monetą 5 zł oraz kątomierzem o podziałce co $0,5^\circ$, studentka wyznaczała współczynnik μ tarcia statycznego monety o papier. Zwiększając powoli kąt nachylenia równi, na której spoczywała moneta, studentka rejestrowała wartość kąta granicznego, przy którym moneta zaczynała się ześlizgiwać z równi. Powtarzając pięciokrotnie pomiar otrzymała następującą serię wartości kąta granicznego: $14,5^\circ$, $14,5^\circ$, $14,0^\circ$, $14,0^\circ$ oraz $15,0^\circ$. Współczynnik tarcia statycznego $\mu = \tan \alpha$, gdzie α jest kątem granicznym. Wyznacz najlepszą ocenę wartości współczynnika μ oraz niepewność tej oceny.

Rozwiązanie. Najlepszą oceną kąta granicznego, kiedy moneta zaczyna zsuwać się po równi, jest średnia arytmetyczna wszystkich wyników pomiaru kąta:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i = \frac{1}{5} (14,5^\circ + 14,5^\circ + 14,0^\circ + 14,0^\circ + 15,0^\circ) = 14,4^\circ,$$

Niepewność tak obliczonej oceny kąta granicznego wynosi:

$$u^2(\bar{\alpha}) = \frac{1}{4 \cdot 5} (0,01 + 0,01 + 0,16 + 0,16 + 0,36) \cdot (1^\circ)^2 + 0,25 \cdot (1^\circ)^2 / 3 = 0,118333 \cdot (1^\circ)^2.$$

Ostatecznie $u(\bar{\alpha}) = 0,343996^\circ$.

Współczynnik tarcia $\hat{\mu} = \tan \bar{\alpha} = 0,256756$, a jego niepewność:

$$u^2(\hat{\mu}) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} u(\bar{\alpha}) \right)^2.$$

Pochodna $\tan \alpha$ względem α wynosi $1/\cos^2 \alpha$ – pamiętamy o mierze łukowej – $u(\bar{\alpha}) = 0,006004$ rad, co prowadzi do wyniku $u(\hat{\mu}) = 0,00639966 \approx 0,0064$.

Odpowiedź: $\mu = 0,2568 \pm 0,0064$.

Zadanie 4. Do wykonania doświadczenia chemicznego potrzebna jest objętość $V = 500 \text{ cm}^3$ wody destylowanej. Student dysponuje szklaną, walcową menzurką o wewnętrznej średnicy $D = (8,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ i wysokości $H = 15 \text{ cm}$ oraz elektroniczną wagą kuchenną podającą masę z dokładnością $\Delta = 5 \text{ g}$. W tablicach student odczytał gęstość $\rho = 0,99821 \text{ g/cm}^3$ wody destylowanej w temperaturze 20°C (taka temperatura panowała w laboratorium). Wysokość słupa wody w menzurce student mierzy linijką o podziałce $\delta = 0,1 \text{ cm}$. Którą z dwóch metod powinien wybrać, aby jak najdokładniej odmierzyć potrzebną ilość wody destylowanej:

- Czy powinien odmierzyć odpowiednią wysokość słupa wody w menzurce?
- Czy powinien postawić pustą menzurkę na wadze, a następnie ostrożnie wlewać do niej wodę, aż odczyta odpowiednią różnicę mas?

Odpowiedź należy poprzeć odpowiedziami obliczeniami.

Rozwiązanie. Decyzję dotyczącą metody należy podjąć po wyznaczeniu niepewności, z jaką potrzebna ilość wody zostanie odmierzona każdą z metod. Pojemność wewnętrzna walca o średnicy wewnętrznej D i wysokości h (wodę nalewamy do wysokości $h < H$) wynosi:

$$V = \pi \frac{D^2 h}{4}.$$

Niepewność u_1 tak wyznaczonej pojemności wynosi:

$$u_1^2 = \left(\frac{2\pi D h u(D)}{4} \right)^2 + \left(\frac{\pi D^2 u(h)}{4} \right)^2,$$

gdzie $u(D) = 0,1$ cm (wartość niepewności podana w treści zadania), $u(h) = 0,1/\sqrt{3}$ cm – (pamiętamy, że za niepewność pomiaru przyrządem o rozdzielczości δ przyjmujemy $\delta/\sqrt{3}$). Do wykonania obliczenia niepewności u_1 potrzebujemy oszacować wartość wysokości h , do jakiej należy nalać wody do menzurki: $h = 4V/(\pi D^2) = 9,94718..$ cm. Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy: $u_1 \approx 12,83$ cm³ (jeśli przyjmiemy $u(h) = \delta$, co jest dopuszczalne, to $u_1 \approx 13,47$ cm³).

W przypadku użycia wagi należy odmierzyć masę $m = V/0,99821$ g = 500,897 g.

Powinniśmy jeszcze zastanowić się jak taki pomiar będzie przeprowadzany. Jeśli waga posiada funkcję tarowania (wiele wag elektornicznych taką funkcję posiada), to wówczas odczytujemy bezpośrednio masę dodaną po „wytarowaniu” wagi i możemy przyjąć $u_2 = \Delta/(\rho\sqrt{3}) = 2,8919$ cm³ lub, gdy przyjmujemy $u(m) = \Delta$, $u_2 = \Delta/\rho = 5,00897$ cm³. Jeśli pomiar wykonujemy poprzez dwukrotne ważenie: raz pustej menzurki, a następnie menzurki wypełnionej wodą, to nasz wynik będzie różnicą wyników obu ważen: $m_{woda} = m_{menzurka+woda} - m_{menzurka}$, a więc $u(m_{woda}) = \sqrt{2}\Delta/\sqrt{3}$ (lub $u(m_{woda}) = \sqrt{2}\Delta$, gdy uznamy rozdzielczość wagi za niepewność wykonanych za jej pomocą pomiarów). Odpowiednio przeliczona niepewność $u_2 = 4,0898$ cm³ lub $u_2 = 7,08375$ cm³, gdy utożsamiamy niepewność pomiaru masy z rozdzielczością wagi.

Odpowiedź: użycie wagi jest metodą dokładniejszą i tą metodą powinien posłużyć się student. Podając niepewność student powinien oczywiście odpowiednio zaokrąglić otrzymaną ocenę do nie więcej niż 2 cyfr znaczących.

Uwaga: Podane w rozwiązaniu oceny niepewności wydają się niejednoznaczne. Należy jednak pamiętać, że wykonując pomiary mamy obowiązek dokładnie zapoznać się z „działaniem” przyrządów pomiarowych (czy waga ma funkcję tarowania, czy nie, i czy tej funkcji używamy). W przypadku, gdy mamy do czynienia z przyrządem analogowym (menzurka, waga kuchenna „ze wskazówką”) możemy utożsamiać najmniejszą działkę podziałki z niepewnością wskazań. Nasza decyzja w znacznym stopniu zależy od oceny dokładności naniesienia skali – gdy podziałka analogowa wykonana jest bardzo starannie, to dopuszczalne jest nawet „interpolowanie” odczytu „pomiędzy” kreskami podziałki z dokładnością do 0,2 - 0,5 najmniejszej działki.

Poprawne rozwiązanie zadania tego typu powinno zawierać informacje o sposobie interpretowania danych – tę rolę spełniają w powyższym rozwiązaniu uwagi o przyjętym związku niepewności z rozdzielczością przyrządu oraz uwagi o funkcji tarowania wagi. Dopiero z takimi objaśnieniami można ocenić poprawność obliczeń.