

Analiza niepewności pomiarowych

Wstęp do analizy danych

Wykład 5

Pomiary pośrednie i „propagacja małych niepewności”

1 Uwagi wstępne

Poprzedni wykład poświęcony był bezpośrednim pomiarom pojedynczej wielkości fizycznej. Przedstawione zostały sposoby wyznaczania wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu błędów przypadkowych na podstawie wyników serii niezależnych, równoważnych pomiarów. W rozważaniach tych, o rozkładzie jakiego podlega błąd przypadkowy, zakładaliśmy jedynie, że jego wartość oczekiwana i wariancja są skończone. Ocenę wartości oczekiwanej (średnią arytmetyczną) przyjęliśmy za wynik pomiaru. Ocena niepewności tak otrzymanego wyniku wymagała uwzględnienia dokładności wskazań użytego przyrządu – przyjęliśmy (model błędu kwantyzacji), że błąd odczytu podlega rozkładowi jednostajnemu. Niepewność wyniku określiliśmy jako pierwiastek z wariancji sumy zmiennych: *błąd przypadkowy* + *błąd odczytu*. Tę część rozważań zakończyliśmy sformułowaniem testu „ 3σ ”. Skonstruowanie testu wymagało przyjęcia konkretnego modelu rozkładu błędu przypadkowego. Przyjęliśmy, że jest to rozkład Gaussa. Test pozwala nam porównywać wynik pomiaru z przewidywaniami modeli teoretycznych oraz porównywać między sobą wyniki różnych pomiarów tej samej wielkości fizycznej.

W kolejnej części wykładu będziemy zajmowali się oceną wartości oczekiwanych i wariancji rozkładów zmiennych losowych, które są funkcjami innych zmiennych losowych. Będziemy przy tym korzystali z ogólnych założeń o skończonych wartościach: wartości oczekiwanych, wariancji oraz macierzy kowariancji rozkładów argumentów tych funkcji.

2 Pomiary pośrednie

§18. Znaczna część pomiarów w nauce i technice, to pomiary pośrednie. Korzystamy w nich ze znanej postaci funkcji łączącej wielkość y , której wartość chcemy poznać, z wielkościami $x_i, i = 1, k$, które potrafimy bezpośrednio zmierzyć:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Postać tej funkcji możemy znać na podstawie rozważań teoretycznych lub związków odkrytych wcześniej na drodze badań doświadczalnych. Zakładamy, że postać tej funkcji znamy dokładnie, a potrzebna jest nam jej wartość dla konkretnych wartości jej argumentów, które potrafimy zmierzyć bezpośrednio.

Argumenty funkcji (zbiór wielkości x_i) są zmiennymi losowymi. Wyprowadzając potrzebne nam wzory przyjmujemy jedynie ogólne założenia dotyczące rozkładów tych zmiennych: zakładamy, że istnieją i są skończone ich wartości oczekiwane i wariancje oraz kowariancje tych zmiennych (jeśli zmienne nie są niezależne) i traktujemy te wartości jak znane liczby. Po wyprowadzeniu wzorów końcowych podstawiamy do nich nasze najlepsze oceny tych wielkości (w tej części wykładu symbole s^2 z odpowiednimi indeksami ($\bar{x}_i$), jak dla ocen na podstawie próby z rozkładu, tj. serii pomiarów, i ogólniejsze symbole $u^2(\bar{x}_i)$, jak dla pełnej oceny niepewności, stosowane są zamiennie).

Twierdzenie przytoczone na stronie 41 *Slajdów/transparencji do wykładu* dotyczy przypadku, gdy interesująca nas wielkość jest liniową funkcją innych wielkości, które potrafimy mierzyć bezpośrednio. Dowód polega na skorzystaniu z liniowości wartości oczekiwanej po rozwinięciu kwadratu, którego wartość oczekiwaną obliczamy, a następnie bezpośrednim skorzystaniem z założeń dotyczących rozkładów zmiennych losowych – argumentów funkcji. Przeważnie zakłada się, że argumenty funkcji są wielkościami mierzonymi niezależnie i tym samym są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Ogólniejszy przypadek przedstawiony jest w *Uwadze*. Różna od zera macierz kowariancji może pojawić się, gdy zmienne x_i użyte do obliczenia $\hat{y}$ zostały wyznaczone na drodze pośredniej (jak w przypadku parametrów prostej – przykładem takich wielkości są np. parametry prostej wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów – patrz dalsza część wykładu).

Dla zależności liniowej uzyskane we *Wniosku* wzory są ścisłe. Bardzo często jednak związek wielkości y z wielkościami x_i jest nieliniowy – tzn $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ nie jest funkcją liniową. Wówczas obliczamy wartość tej funkcji podstawiając najlepsze znane nam oceny wartości oczekiwanych jej argumentów $\hat{x}_i$. Jest to dobre przybliżenie $f(\mu_i, \dots, \mu_k)$, jeśli $\hat{x}_i$ dobrze przybliżają μ_i – wartości oczekiwane zmiennych x_i . Dla oceny dokładności tego przybliżenia obliczamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\hat{y} - \eta) &= \mathcal{E}(f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) - f(\mu_1, \dots, \mu_k)) \\ &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}_i - \mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}_i - \mu_i)(\hat{x}_j - \mu_j) + \dots\right)\end{aligned}$$

W powyższym wzorze pochodne cząstkowe f brane są w punkcie $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ – to są liczby (nie zmienne losowe). Wartość oczekiwana pierwszej z sum (pojedynczej) w drugiej linijce wynosi zero (bo $\mathcal{E}(\hat{x}_i) = \mu_i$). Pozostaną więc wyrazy kwadratowe i wyższe w odchyleniach $(\hat{x}_i - \mu_i)$. Podstawienie $\hat{x}_i$ zamiast μ_i do funkcji f będzie dobrym przybliżeniem, gdy drugie pochodne f będą małe – tzn. f będzie niewiele odbiegała od funkcji liniowej, gdy $(x_i - \mu_i)$ zmienia się w przedziale $\pm u(\hat{x}_i)$ (wtedy w tym przedziale, pierwsze pochodne f są w przybliżeniu stałe). Wyznaczenie niepewności $\hat{y}$ wymaga obliczenia $\mathcal{E}((\hat{y} - f(\mu_1, \dots, \mu_k))^2)$. Znowu stosujemy rozwinięcie f , jak poprzednio. Jak widać, wiodącym wyrazem tak obliczanej wariancji $\hat{y}$ jest kwadrat pierwszej z sum w drugiej linijce przytoczonego przed chwilą wzoru. Pochodne f obliczane w punkcie $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ są liczbami, a więc (w tym przybliżeniu) obliczenia sprowadzają się do zastosowania Twierdzenia ze str. 41 *Slajdów/transparencji do wykładu*.

Znaleźliśmy przybliżoną wartość wariancji $\hat{y}$. Nie znamy jednak wartości pochodnych f w punkcie $(\mu_1, \dots, \mu_k)$. W tym miejscu stosujemy następne przybliżenie i zamiast μ_i do obliczania pochodnych bierzemy $\hat{x}_i$.

Podobnie jak dla funkcji liniowej otrzymane wyrażenie można uogólnić na przypadek, gdy argumenty f nie są niezależne (w sensie niezależności zmiennych losowych) – odpowiedni wzór

jest w ostatniej linijce strony 42 *Slajdów/ transparencji do wykładu*.

Wyprowadzony w tym paragrafie wzór opisuje „propagację niepewności” argumentów do niepewności wartości funkcji. Według dawnej terminologii wzór ten nazywano „propagacją małych błędów” – ta nazwa ma bardzo długą tradycję.

Przykład:

Chcemy wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g na podstawie pomiarów czasu trwania okresu T wahadła o długości l . Znamy wzór na okres małych drgań wahadła: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, a więc, gdy znane są l i T można obliczyć g :

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Budujemy wahadło. Wykonujemy serię pomiarów jego długości l i na ich podstawie wyznaczamy $\hat{l} \pm u(\hat{l})$, a następnie wprawiamy wahadło w ruch i wielokrotnie mierzymy jego okres T , co pozwala nam wyznaczyć $\hat{T} \pm u(\hat{T})$. Zgodnie z rozważaniami tego paragrafu obliczamy g jako:

$$\hat{g} = 4\pi^2 \frac{\hat{l}}{\hat{T}^2}.$$

następnie obliczamy niepewność $u(\hat{g})$:

$$u^2(\hat{g}) = \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{l}} u(\hat{l}) \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{T}} u(\hat{T}) \right)^2 = \left(\frac{4\pi^2 u(\hat{l})}{\hat{T}^2} \right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot 4\pi^2 \hat{l}}{\hat{T}^3} u(\hat{T}) \right)^2.$$

Po uporządkowaniu wyrazów dostrzegamy, że ten wzór można uprościć do postaci:

$$u^2(\hat{g}) = \hat{g}^2 \left(\frac{u^2(\hat{l})}{\hat{l}^2} + 4 \frac{u^2(\hat{T})}{\hat{T}^2} \right).$$

Otrzymany wzór pozwala nam nie tylko wyznaczyć niepewność $u(\hat{g})$, ale także ocenić, który pomiar – wielkości: $\hat{l}$, czy $\hat{T}$ – daje większy wkład do niepewności wyniku końcowego i tę obserwację uwzględnić podczas planowania pomiarów.

Uwagi: Tak prostą postać wzoru na niepewność wyniku jak otrzymaliśmy powyżej – kwadrat wielkości obliczonej mnożony przez sumę kwadratów względnych niepewności argumentów – można otrzymać tylko w przypadku funkcji postaci: $f(x_1, x_2, x_3, \dots) = Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \dots$.

Zadania do Wykładu 5

Zadanie 1. Podczas przepływu prądu o natężeniu I przez grzałkę o oporze R w czasie t , wydzielane jest ciepło $Q = I^2 R t$. Wyznacz ocenę ilości wydzielonego ciepła Q i niepewność tej oceny, jeśli $R = (30, 0 \pm 0, 2) \Omega$, $I = (10, 0 \pm 0, 1) \text{ A}$ oraz $t = (50 \pm 5) \text{ s}$.

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru Snella:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

student miał wyznaczyć współczynnik załamania n pewnego gatunku szkła. Wyniki jego pomiarów to, kąt padania $\alpha = 31^\circ \pm 1^\circ$ oraz kąt załamania $\beta = 20^\circ \pm 1^\circ$. Wyznacz ocenę wartość współczynnika załamania n i niepewność tej oceny.

Zadanie 3. Dysponując równią pochyłą o zmiennym kącie nachylenia z naklejonym na nią papierem, monetą 5 zł oraz kątomierzem o podziałce co $0,5^\circ$, studentka wyznaczała współczynnik μ tarcia statycznego monety o papier. Zwiększając powoli kąt nachylenia równi, na której spoczywała moneta, studentka rejestrowała wartość kąta granicznego, przy którym moneta zaczynała się ześlizgiwać z równi. Powtarzając pięciokrotnie pomiar otrzymała następującą serię wartości kąta granicznego: $14,5^\circ$, $14,5^\circ$, $14,0^\circ$, $14,0^\circ$ oraz $15,0^\circ$. Współczynnik tarcia statycznego $\mu = \tan \alpha$, gdzie α jest kątem granicznym. Wyznacz najlepszą ocenę wartości współczynnika μ oraz niepewność tej oceny.

Zadanie 4. Do wykonania doświadczenia chemicznego potrzebna jest objętość $V = 500 \text{ cm}^3$ wody destylowanej. Student dysponuje szklaną, walcową menzurką o wewnętrznej średnicy $D = (8,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ i wysokości $H = 15 \text{ cm}$ oraz elektroniczną wagą kuchenną podającą masę z dokładnością $\Delta = 5 \text{ g}$. W tablicach student odczytał gęstość $\rho = 0,99821 \text{ g/cm}^3$ wody destylowanej w temperaturze 20°C (taka temperatura panowała w laboratorium). Wysokość słupa wody w menzurce student zmierzy linijką o podziałce $\delta = 0,1 \text{ cm}$. Którą z dwóch metod powinien wybrać, aby jak najdokładniej odmierzyć potrzebną ilość wody destylowanej:

- Czy powinien odmierzyć odpowiednią wysokość słupa wody w menzurce?
- Czy powinien postawić pustą menzurkę na wadze, a następnie ostrożnie wlewać do niej wodę, aż odczyta odpowiednią różnicę mas?

Odpowiedź należy poprzeć odpowiednimi obliczeniami.