

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2015-01-09)

Całkowanie równania ruchu, całka wielokrotna

Zadanie 1*. Kamień o masie m spadając z wysokości h wbija się w piasek. Na jaką głębokość wbije się kamień, jeśli podczas wbijania oprócz siły ciężkości działa na niego siła tarcia o wartości $T(x) = 2\beta x$, $\beta > 0$, gdzie x jest aktualną głębokością? W chwili zatrzymania siła tarcia zmienia wartość i staje się równa ciężarowi ciała (wypadkowa siła znika).

Zadanie 2*. Znaleźć zależność od czasu położenia ciała o masie m , na które od chwili $t = 0$ działa siła oporu $F(t) = \frac{F_0 t}{t + t_0}$, $t_0 > 0$, skierowana przeciwnie do prędkości. W chwili początkowej $t = 0$ ciało przechodziło przez punkt $x(t = 0) = 0$, poruszając się w kierunku dodatnim osi x z prędkością $\mathbf{v}_0$ równoległą do tej osi.

Wskazówka: $\frac{t}{t + t_0} = 1 - \frac{t_0}{t + t_0}$.

Zadanie 3*. Obliczyć całki

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x + y + z) \, dx \, dy \, dz, \quad \int_0^2 \int_1^4 \int_0^2 \frac{2}{(x + y + z)^3} \, dx \, dy \, dz, \quad \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)^2 \, dx \, dy \, dz$$

Zadanie 4*. Znaleźć pole powierzchni figury opisanej równaniem

$$y^2 = 4(x^2 - x^4),$$

dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 5*. Obliczyć całkę

$$\int_D xy \, dx \, dy$$

po obszarze D ograniczonym łukiem hiperboli $xy = 2$ i prostą $x + y = 3$. Znaleźć pole powierzchni obszaru D .

Zadanie 6*. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót paraboli $3y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ (parabola stopnia 3) wokół osi x .

Zadanie 7. Płaszczyzna $z = \frac{1}{2}$ dzieli półkulę

$$V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

na dwie części. Obliczyć objętość obu części.

* zadania obowiązkowe