

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2015-10-06)

Funkcje elementarne, właściwości funkcji

Zadanie 1. Dla jakich wartości parametru m funkcja

$$f(x) = \frac{x}{m} + \frac{3}{x} + \frac{4}{mx} - 2$$

ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 , spełniające nierówność

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 0 ?$$

Zadanie 2. Korzystając z faktu, że współczynnik kątowy prostej równy jest tangensowi kąta pomiędzy prostą i osią x pokazać, że współczynniki kątowe a_1 i a_2 prostych prostopadłych spełniają relację $a_1 a_2 = -1$.

Wskazówka: $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$, $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$.

Zadanie 3. Podać równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 5x - 1$ i przechodzącej przez punkt $(5, 2)$.

Zadanie 4. Znaleźć punkty przecięcia wykresów funkcji $\sin x$ i $\cos x$, $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

Zadanie 5. Znaleźć funkcję liniową $g(x)$, której złożenie $g^2(x) = 4x + 3$.

Zadanie 6. Dla jakich wartości współczynników $a, b \in \mathbb{R}$ miejscami zerowymi funkcji $h(x) = f(g(x))$ są punkty $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$, jeżeli $f(x) = x^2 - 6x + 8$ i $g(x) = ax + b$?

Zadanie 7. Korzystając w właściwości funkcji wykładniczej pokazać, że zachodzą tożsamości

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 8. Obliczyć $\log_{10} 0.001$, $\log_{10}(10 \cdot 10^4)$, $\log_{25} 125$, $\log_{10}((\log_2 1024))$.