

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2015-11-10)

Całka funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywymi

a) $y = x^2 - 2x - 3$, $y = -x^2 + 3x + 4$

b) $y = x^3 - x^2$, $y = x - 1$

c) $y = x^2 - 4$, $y = x + 2$

d) $y^2 = 1 - x$, $y = x + 1$

Zadanie 2. Obliczyć całki

$$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx, \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx, \quad \int (\sin^5 x + \cos^5 x) dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int \ln(x^2 - 4) dx, \quad \int \sqrt{1 - x^2} dx$$

Wskazówka: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, $\ln x = 1 \cdot \ln x$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Zadanie 3. Korzystając z metody całkowania przez części, obliczyć całki

$$\int \sin^3 x dx, \quad \int \cos^3 x dx, \quad \int \cos^5 x \sin^3 x dx.$$

Powtórzyć obliczenia, korzystając z metody całkowania przez podstawienie.

Zadanie 4. Znaleźć pole obszaru ograniczonego osią x , prostymi $x = -1$ i $x = 0$ oraz wykresem funkcji

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Zadanie 5. Obliczyć całkę $\int_0^1 f(x) dx$, gdzie $f(x) = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$.

Zadanie 6. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 - 4x} dx.$$

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, wykorzystać podstawienie $t = 1 + 2\sqrt{x}$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$$

Wskazówka: zauważyć, że dwukrotne całkowanie przez części prowadzi do całki wyjściowej.

Zadanie 8. Przyspieszenie ciała w pewnym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem

$$a(t) = \sin(t/2) - \cos(t/2).$$

Znaleźć zależność od czasu prędkości i położenia ciała, jeżeli $v(t = 0) = 0$ i $x(t = 0) = 1$.