

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2015-12-15)

Całka wielokrotna, środek masy, moment bezwładności

Zadanie 1. Obliczyć całki

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y+z) dx dy dz, \quad \int_0^2 \int_1^4 \int_0^2 \frac{2}{(x+y+z)^3} dx dy dz, \quad \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+y+z)^2 dx dy dz$$

Zadanie 2. Znaleźć pole powierzchni figury opisanej równaniem

$$y^2 = 4(x^2 - x^4),$$

dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 3. Obliczyć całkę

$$\int_D xy dx dy$$

po obszarze D ograniczonym łukiem hiperboli $xy = 2$ i prostą $x + y = 3$. Znaleźć pole powierzchni obszaru D .

Zadanie 4*. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót paraboli $3y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ (parabola stopnia 3) wokół osi x .

Zadanie 5*. Płaszczyzna $z = \frac{1}{2}$ dzieli półkulę

$$V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

na dwie części. Obliczyć objętość obu części.

Zadanie 6. Masy punktowe m , $2m$ i $3m$ zostały umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a . Znaleźć środek masy układu.

Zadanie 7. Znaleźć środek masy jednorodnego półkola o promieniu R .

Zadanie 8. Znaleźć moment bezwładności względem osi symetrii jednorodnego stożka prostego o masie m , promieniu podstawy R i wysokości h .

Zadanie 9. Znaleźć moment bezwładności cienkiej prostokątnej płyty o bokach a i b względem osi zawierających oba równoległe boki o długości b , jeżeli powierzchniowa gęstość masy płyty zmienia się wzdłuż boku a w sposób określony zależnością $\sigma(x) = \sigma_0 \left(\frac{x}{a}\right)^n$ ($n \geq 0$, $\sigma_0 > 0$), gdzie x jest odległością od krawędzi płyty.

Zadanie 10. Znaleźć moment bezwładności względem osi symetrii walca o promieniu r i wysokości h , którego gęstość masy jest określona zależnością

$$\varrho(z) = a \left(z - \frac{h}{2}\right)^2, \quad a > 0,$$

gdzie z jest odległością od podstawy. Wyznaczyć stałą a wiedząc, że masa walca wynosi m .

* zadania nieobowiązkowe