

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2016-01-12)

Liczby zespolone

Zadanie 1. Podaj w postaci trygonometrycznej i wykładniczej $z, z^*, z^2, (z^*)^2, z^3, (z^*)^3$, gdzie

$$z = \sqrt{2}(1 + i).$$

Przedstaw wszystkie liczby na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 2. Podaj w postaci algebraicznej, trygonometrycznej i wykładniczej

$$\text{a) } z = \frac{2}{1 - i\sqrt{3}}, \quad \text{b) } z = \frac{1 + 3i}{1 - 2i}, \quad \text{c) } z = \frac{(\sqrt{3} - 2) - i(2\sqrt{3} + 1)}{2 - 4i}$$

i przedstaw rozwiązanie na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie

$$\text{a) } (1 + 2i)z = -1 + 3i, \quad \text{b) } (-1 + 2i)z = 1 + 3i, \quad \text{c) } (1 + i)z = (1 + i)^4, \quad \text{d) } (1 - 2i)z = 3 + 4i$$

i przedstaw rozwiązanie na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 4. Wyprowadź tożsamości trygonometryczne

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Wskazówka: $(e^{i\alpha})^2 = e^{i2\alpha}$.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie

$$\text{a) } z^2 - 2z + 4 = 0, \quad \text{b) } z^2 - 4z + 8 = 0, \quad \text{c) } z^2 - 4iz - 8 = 0, \quad \text{d) } z^2 + 2iz - 2 = 0$$

i przedstaw rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej. Oblicz moduł i argument z .

Zadanie 6. Znajdź pierwiastki równania

$$\text{a) } z^3 - i = 0, \quad \text{b) } z^3 + i = 0, \quad \text{c) } z^3 - 1 = 0, \quad \text{d) } z^3 + 1 = 0,$$

przedstaw je na płaszczyźnie zespolonej i podaj ich postać algebraiczną.

Zadanie 7. Oblicz

$$\text{a) } z = \sqrt{(1 + i\sqrt{3})/2}, \quad \text{b) } z = 1^i, \quad \text{c) } z = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3i}.$$

Wyznacz moduł i argument z .