

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2016-11-23)

Całka funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1. Korzystając z metody całkowania przez części, obliczyć całki

$$\int \sin^3 x \, dx, \quad \int \cos^3 x \, dx, \quad \int \cos^5 x \sin^3 x \, dx.$$

Powtórzyć obliczenia, korzystając z metody całkowania przez podstawienie.

Zadanie 2. Znaleźć pole obszaru ograniczonego krzywymi

a) $y = x^2 - 2x - 3, \quad y = -x^2 + 3x + 4$

b) $y = x^3 - x^2, \quad y = x - 1$

c) $y = x^2 - 4, \quad y = x + 2$

d) $y^2 = 1 - x, \quad y = x + 1$

Zadanie 3. Znaleźć pole obszaru ograniczonego osią x , prostymi $x = -1$ i $x = 0$ oraz wykresem funkcji

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Zadanie 4. Znaleźć pole obszaru ograniczonego prostą $y = 1$ oraz wykresem funkcji

$$y(x) = \cos 2x, \quad \text{dla } x \in (0, \pi).$$

Zadanie 5. Obliczyć całkę $\int_0^1 f(x) \, dx$, gdzie $f(x) = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$.

Zadanie 6. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 - 4x} \, dx.$$

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, wykorzystać podstawienie $t = 1 + 2\sqrt{x}$.

Zadanie 7. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx$$

Wskazówka: zauważyć, że dwukrotne całkowanie przez części prowadzi do całki wyjściowej.

Zadanie 8. Przyspieszenie ciała w pewnym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem

$$a(t) = \sin(t/2) - \cos(t/2).$$

Znaleźć zależność od czasu prędkości i położenia ciała, jeżeli $v(t = 0) = 0$ i $x(t = 0) = 1$.