

Fizyka z Matematyką I

(zadania domowe 2018-12-07)

Zastosowanie rachunku różniczkowego. Szeregi potęgowe

Zadanie 1. Pokazać, że wśród wszystkich prostokątów o danym obwodzie, figurą o największym polu powierzchni jest kwadrat.

Zadanie 2. Pokazać, że wśród wszystkich trójkątów równoramiennych o danym obwodzie, największe pole powierzchni ma trójkąt równoboczny.

Wskazówka: wyrazić pole trójkąta równoramiennego przez obwód L (lub połowę obwodu p) i pół długości podstawy, x . Bez utraty ogólności można przyjąć $L = 2$ (lub $p = 1$).

Zadanie 3. Dobrać tak wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, aby wykresy funkcji

$$f_1(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} \quad \text{ i } \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{ax}$$

miały punkty wspólne w ekstremach funkcji.

Zadanie 4. Wyznaczyć promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n, \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n) x^n, \\ \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+2)}, \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{2n^2}, \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n} \end{aligned}$$

Zadanie 5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \text{b) } f(x) = x e^x, \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

i wyznaczyć promień zbieżności każdego ze znalezionych szeregów.

Zadanie 6. Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 1$ funkcje

$$\text{a) } f(x) = \ln x, \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Zadanie 7. Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = -1$ funkcje

$$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

Zadanie 8. Oszacować z dokładnością 0.01 wartość liczby $\sqrt{2}$.