

Fizyka z Matematyką II

(zadania domowe 2015-03-04 - seria 2)

Równania różniczkowe liniowe

Zadanie 1*. Znaleźć poprzez rozdzielenie zmiennych rozwiązanie ogólne równania

$$\dot{x} - 2tx = 0.$$

Podać postać funkcji $x(t)$ spełniającej warunek początkowy $x(0) = 2$.

Zadanie 2*. Ciało o masie m porusza się pod wpływem siły $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 e^{-\beta t}$ ($\beta > 0$, $\mathbf{F}_0$ jest stałym wektorem) i siły oporu proporcjonalnej do prędkości, $\mathbf{F}_{op} = -2m\beta\mathbf{v}$. Znaleźć zależność prędkości ciała od czasu, jeżeli w chwili początkowej ciało spoczywało.

Zadanie 3*. Znaleźć rozwiązania ogólne równań

$$\text{a) } \ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0, \quad \text{b) } \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$$

i wyznaczyć funkcje $x(t)$ spełniające warunki początkowe $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Zadanie 4*. Znaleźć rozwiązania ogólne równań

$$\text{a) } \ddot{x} - \dot{x} = 1, \quad \text{b) } \ddot{x} + 4\dot{x} = 4.$$

Wskazówka: rozwiązać równanie dla funkcji $u(t) = \dot{x}(t)$, a następnie znaleźć funkcję $x(t)$. Szukając rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego zaproponować to rozwiązanie w postaci $u(t) = A$ i znaleźć współczynnik A .

Zadanie 5*. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 5e^{2t}.$$

Podać postać funkcji $x(t)$ spełniającej warunki początkowe $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 6$.

Wskazówka: szukając rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego zaproponować to rozwiązanie w postaci $x(t) = Ae^{2t}$ i znaleźć współczynnik A .

Zadanie 6*. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4e^{-t}$$

i wyznaczyć funkcję $x(t)$ spełniającą warunki początkowe $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 1$.

Wskazówka: szukając rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego zaproponować to rozwiązanie w postaci $x(t) = Ae^{-t}$ i znaleźć współczynnik A .

Zadanie 7. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\ddot{x} - x = 4te^t$$

i wyznaczyć funkcję $x(t)$ spełniającą warunki początkowe $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 2$.

Wskazówka: szukając rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego zaproponować to rozwiązanie w postaci $x(t) = (At^2 + Bt)e^t$ i znaleźć współczynniki A i B .

* zadania obowiązkowe