

Fizyka z Matematyką II

(zadania domowe 2015-05-06, seria 11)

Operatory różniczkowe, pole ładunków punktowych, dipol elektryczny

Zadanie 1*. Obliczyć rotację pola $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [-y, x, z]$.

Zadanie 2*. Pokazać, że dla pola wektorowego $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$,

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{2}{r}.$$

Zadanie 3*. Pokazać, że dla dowolnych ciągłych pól $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (pole skalarne) i $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (pole wektorowe),

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

Zadanie 4*. Korzystając z tożsamości

$$V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} \mathbf{r} \, ds,$$

znaleźć objętość stożka prostego o wysokości h i promieniu podstawy r .

Zadanie 5*. Trzy ładunki punktowe q , $-q$ i q zostały kolejno umieszczone w wierzchołkach kwadratu o boku a , zaczynając od lewego górnego wierzchołka. Wyznaczyć energię tego układu.

Znaleźć potencjał i natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu i w czwartym wierzchołku. Jak zmieni się potencjał i natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu, jeśli w czwartym wierzchołku umieścimy ładunek $-q$? Jaka będzie wówczas energia układu?

Zadanie 6*. Natężenie pola elektrycznego dipola w układzie współrzędnych, w którym moment dipolowy jest równoległy osi z (czyli $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$), przyjmuje we współrzędnych sferycznych postać

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta).$$

Pokazać, że

$$2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta = 3(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z$$

i natężenie pola elektrycznego dipola można zapisać w postaci

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{r^3}.$$

Wskazówka: współrzędne kartezjańskie wersorów

$$\mathbf{e}_r = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta], \quad \mathbf{e}_\theta = [\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta].$$

* zadania obowiązkowe