

Fizyka z Matematyką II

(zadania domowe 2016-03-02 - seria 1)

Przekształcenia liniowe, macierze, wyznaczniki

Zadanie 1. Przekształcenia liniowe $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ są określone wzorami

$$L_1(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + 2z, -x + y + z),$$

$$L_2(x, y, z) = (x + y + z, x + y - 2z, 2x - y - z),$$

$$L_3(x, y, z) = (2x + y - z, -2x + y - z, -x + y - z).$$

Podać macierze tych przekształceń w bazach standardowych oraz wyznaczyć macierze następujących przekształceń liniowych

$$\text{a) } L_1 \circ L_2, \quad \text{b) } L_2 \circ L_1, \quad \text{c) } L_2 \circ L_3, \quad \text{d) } L_3 \circ L_1, \quad \text{e) } L_1 \circ L_2 \circ L_3, \quad \text{f) } L_3 \circ L_2 \circ L_1.$$

Zadanie 2. Sprawdzić, czy wektory $[-1, 1, 1]$ i $[1, -1, 1]$ należą do podprzestrzeni jądra przekształcenia liniowego $L(x, y, z) = (2x + 2y - z, 2x + y + z, x + y + 2z)$.

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$$

poprzez sprowadzenie macierzy rozszerzonej tego układu do postaci schodkowej. Powtórzyć rozwiązanie metodą wyznaczników.

Zadanie 4. Rozwiązać układy równań

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 + 2y_1 + z_1 = 1 \\ x_1 - y_1 + 3z_1 = 0 \\ 4x_1 + 3y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 - y_2 + 3z_2 = 1 \\ 4x_2 + 3y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 3x_3 + 2y_3 + z_3 = 0 \\ x_3 - y_3 + 3z_3 = 0 \\ 4x_3 + 3y_3 - 2z_3 = 1 \end{cases}$$

i obliczyć iloczyn AB , gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Jaki jest związek pomiędzy macierzami A i B ?

Zadanie 5. Znaleźć macierz odwrotną układu równań

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x - y + 3z = -2 \\ 4x + 3y - 2z = -1 \end{cases},$$

a następnie rozwiązać ten układ równań.

Zadanie 6. Sprawdzić, czy wektory $\mathbf{a} = [1, 1, 3]$, $\mathbf{b} = [2, -1, 0]$ i $\mathbf{c} = [2, 1, 4]$ są liniowo zależne. Jeżeli tak, wyrazić jeden z tych wektorów przez pozostałe.