

Fizyka z Matematyką II

Liczby zespolone

Zadanie 18. Oblicz

a) $w = z^2$

b) $w = z\bar{z}$

c) $w = \frac{z}{z}$

d) $w = \frac{z}{\bar{z}}$

gdzie $z = 1 + i$. Przedstaw wynik w postaci algebraicznej i wykładniczej.

Zadanie 19. Podaj geometryczną interpretację liczb sprzężonych.

Zadanie 20. Podaj geometryczną interpretację odwrotności liczby zespolonej $z \neq 0$. Rozważ przypadki $|z| = 1$, $|z| < 1$, $|z| > 1$.

Zadanie 21. Znajdź zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej spełniających warunek

$$|z - z_0| = r$$

gdzie z_0 jest ustalonym punktem, a r jest rzeczywistą stałą dodatnią.

Zadanie 22. Podaj geometryczną interpretację iloczynu

$$z_1 z_2 = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z|e^{i\alpha},$$

gdy $z \neq 0$.

Zadanie 23. Wyraż $\sin(\alpha + \beta)$ oraz $\cos(\alpha + \beta)$ przez funkcje trygonometryczne kątów α i β .

Zadanie 24. Wyprowadź tożsamości trygonometryczne

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

Zadanie 25. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

Zadanie 26. Przedstaw w postaci algebraicznej i wykładniczej

a) $z = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$

b) $z = 4(\cos \pi/4 - i \sin \pi/4)$

Zadanie 27. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i algebraicznej

a) $z = 4e^{i\pi/3}$

b) $z = 2e^{-i\pi/6}$

Zadanie 28. Przedstaw w postaci algebraicznej $w_{\pm} = z \pm \bar{z}$, gdzie $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pokaż, że $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Zadanie 29. Rozwiąż w dziedzinie liczb zespolonych równanie

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

Spróbuj rozwiązać to równanie w sposób tradycyjny, wprowadzając wielkość $i = \sqrt{-1}$.

Zadanie 30. Znajdź w dziedzinie liczb zespolonych pierwiastki równania

$$z^2 + 2(1 + i)z + 2i = 0.$$

Zadanie 31. Znajdź w dziedzinie liczb zespolonych pierwiastki równania

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $z^4 - 1 = 0$

c) $z^4 - i = 0$

i przedstaw je na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 32. Oblicz $\sqrt[3]{z}$, gdzie $z = 4(1 + i\sqrt{3})$.

Zadanie 33. Przedstaw w postaci algebraicznej

a) $\sin i$

b) $\cos i$

c) $\operatorname{Log} i$

d) $\operatorname{Log}(-1)$

e) i^i

Wskazówka: wykorzystać tożsamości

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{Log} z = \ln |z| + i\varphi, \quad z^w = e^{w \operatorname{Log} z}$$

gdzie $z = |z|e^{i\varphi}$ i przyjmujemy $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Zadanie 34. Znajdź błąd w następującym rachunku

$$-2 = \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4} = 2$$